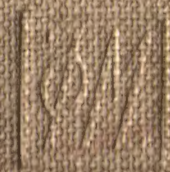
VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

Л. В. КАНТОРОВИЧ и В. И. КРЫЛОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕГО АНАЛИЗА



Л. В. КАНТОРОВИЧ и В. И. КРЫЛОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ
ПЯТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА · 1962 · ЛЕНИНГРАД

Леонид Витальевич Канторович и *Владимир Иванович Крылов*

Приближенные методы высшего анализа.

Л., Физматгиз, 1962 г., 708 стр. с илл.

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов* Корректор *Т. А. Фомкина*

Сдано в набор 3/II 1962 г. Подписано к печати 10/V 1962 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$.
Физ. печ. л. 44,25. Усл. печ. л. 44,25. Уч.-изд. л. 45,19. Тираж 16 000 экз. Т-04763.
Цена книги 2 р. 41 к. Заказ № 1241.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической промышленности.
Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького, Ленинград, Гатчинская, 26.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию 9

Глава I. Методы, основанные на представлении решения в виде бесконечного ряда

§ 1. Метод Фурье 11

1. Задача Дирихле для прямоугольника 11
2. Задачи Дирихле и Неймана для кольца в случае уравнения Лапласа 22
3. Пример бигармонической проблемы 26

§ 2. Бесконечные системы уравнений 29

1. Основные определения 29
2. Теоремы о сравнении систем 30
3. Регулярные и вполне регулярные системы 37
4. Приближенное решение регулярных систем 44
5. Лимитанты. Различные обобщения регулярных систем 49
6. Краткий обзор других исследований, относящихся к бесконечным системам 54

§ 3. Решение граничных задач с помощью неортогональных рядов 56

1. Общие принципы 56
2. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным функциям с помощью ортогонализации 57
3. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным с помощью бесконечных систем уравнений . . . 67
4. Пример 1. Смешанная граничная задача для уравнения Лапласа 69
5. Пример 2. Расчет защемленной пластинки 74

§ 4. Применение двойных рядов к решению граничных задач 82

1. Постановка задачи. Основания метода 82
2. Уравнение Пуассона для прямоугольника 83
3. Применение к уравнениям четвертого порядка 86

§ 5. Улучшение сходимости рядов, получаемых при решении 91

1. Общие принципы, на которых основаны методы улучшения сходимости 91

1*

2. Метод А. Н. Крылова улучшения сходимости тригонометрических рядов . . . 93
3. Ряды Фурье с усиленной сходимостью . . . 100
4. Общие методы улучшения сходимости при приближенном решении граничных задач . . . 102

Глава II. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма

§ 1. Замена интегрального уравнения системой линейных уравнений . . . 110
1. Основные определения . . . 110
2. Замена интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений . . . 111
3. Оценка погрешности, получающейся в результате замены интегрального уравнения системой линейных уравнений . . . 117
4. Пример . . . 121

§ 2. Метод последовательных приближений и аналитическое продолжение . . . 124
1. Метод последовательных приближений . . . 124
2. Применение аналитического продолжения для приближенного решения интегральных уравнений . . . 131

§ 3. Применение интегральных уравнений к решению задачи Дирихле . . . 133
1. Интегральное уравнение теории потенциала . . . 133
2. Метод Неймана . . . 138
3. Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова . . . 143
4. Пример . . . 149

§ 4. Решение интегральных уравнений с помощью замены произвольного ядра на вырожденное . . . 155
1. Интегральное уравнение с вырожденным ядром . . . 155
2. Замена произвольного ядра вырожденным . . . 157
3. Пример . . . 160
4. Другая оценка погрешности . . . 161
5. Метод моментов . . . 165
6. Метод Бэтмена . . . 170

Глава III. Метод сеток

§ 1. Выражения производных через разностные отношения. Соотношения между значениями функции в узлах сетки, гармоническим и бигармоническим операторами . . . 179
1. Выражения производных через разностные отношения . . . 179
2. Соотношения между значениями функции в узлах сетки, оператором Лапласа и бигармоническим оператором . . . 197

§ 2. Дифференциальные уравнения и соответствующие им уравнения в конечных разностях . . . 208
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . 208
2. Уравнения в частных производных эллиптического типа . . . 216

3. Граничные условия для уравнений в конечных разностях . . 228
4. Уравнение $\Delta^2 u = f(x, y)$ 231

§ 3. Решение уравнений в конечных разностях 234

1. Существование и единственность решения 234
2. Два метода решения уравнений в конечных разностях. Примеры 239
3. Оценка погрешности. Сходимость процесса 250

Глава IV. Вариационные методы

§ 1. Вариационные проблемы, связанные с важнейшими дифференциальными уравнениями 260

1. Задачи, приводящие к обыкновенному уравнению 260
2. Вариационные задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона 266
3. Другие виды граничных условий 269
4. Вариационные задачи, связанные с бигармоническим уравнением 272
5. Вариационные проблемы, связанные с нахождением собственных чисел и собственных функций 274

§ 2. Метод Ритца и метод Б. Г. Галеркина 277

1. Основная идея метода Ритца и метода Б. Г. Галеркина . . . 278
2. Применение методов Ритца и Б. Г. Галеркина к обыкновенным дифференциальным уравнениям 282
3. Применение методов Ритца и Б. Г. Галеркина к решению уравнений в частных производных второго порядка 292
4. Применение к бигармоническому уравнению 303
5. Применение к нахождению собственных значений и функций 312

§ 3. Приведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям 323

1. Основные уравнения 326
2. Примеры нахождения первого приближения 329
3. Примеры уточнения решения 336
4. Пример применения метода к бигармоническому уравнению 341
5. Применение метода к нахождению собственных значений и собственных функций 344

§ 4. Оценка погрешности в вариационных методах и порядок сходимости их 346

1. Случай обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .
2. Проблема сходимости минимальных последовательностей для уравнений эллиптического типа 357
3. Сходимость метода Ритца и метода приведения к обыкновенным уравнениям 366

Глава V. Конформное преобразование областей

§ 1. Введение 376

1. Конформное преобразование и уравнение Лапласа 376
2. Преобразование односвязных областей 378
3. Преобразование многосвязных областей 380

§ 2. Свойство минимума площади при преобразовании области на круг 383

1. Экстремальное свойство функции, преобразующей область на круг 383
2. Приложение метода Ритца 385
3. Минимизация при помощи полиномов 389
4. О сходимости последовательных приближений. Полнота системы координатных функций 390
5. Внешние области 393

§ 3. Свойство минимума длины контура при преобразовании области на круг 394

1. Экстремальное свойство преобразующей функции 394
2. Применение метода Ритца 396
3. Преобразование внешних областей 398

§ 4. Ортогональные полиномы и конформное преобразование 400

1. Полиномы, ортогональные на контуре 400
2. Приложение к конформному преобразованию 402
3. Полиномы, ортогональные в области 407
4. Приложение к конформному преобразованию 408

§ 5. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования области на круг 409

1. Постановка задачи. Приведение к системе уравнений 409
2. Метод последовательных приближений 420
3. Конформное преобразование внешних областей 425

§ 6. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования круга на область 433

1. Нормальное представление контура 433
2. Метод бесконечных систем 435
3. Примеры 439
4. Метод последовательных приближений для областей, близких к кругу, контур которых задан неявным уравнением 444
5. Метод последовательных приближений для областей, близких к таким, конформное преобразование круга на которые известно 448
6. Метод последовательных приближений для кривых, заданных в параметрической форме 452
7. Доказательство сходимости процесса последовательных приближений 455
8. Замечание об отображении круга на внешность кривой. Примеры 466

§ 7. Метод П. В. Мелентьева приближенного конформного преобразования 472

1. Алгорифм последовательных приближений 472
2. Выбор первого приближения. Схемы вычислений 481
3. Об отображении внешних областей 493
4. Случай симметричных контуров. Примеры 495

§ 8. Функция Грина и конформное преобразование областей 500

1. Введение. Функция Грина для задачи Дирихле 500
2. Приближенное построение функции Грина 507
3. Функция Грина для задачи Неймана 512
4. Функция Грина для смешанной задачи 518

§ 9. Приложение интегральных уравнений к конформному преобразованию 523

1. Интегральное уравнение для преобразования внутренних областей 523
2. Замечания о решении интегрального уравнения и приближенном построении отображающей функции 527
3. Интегральное уравнение для преобразования внешних областей 529
4. Преобразование области на плоскость с параллельными разрезами 533
5. Преобразование многосвязной области на плоскость с разрезами, лежащими на лучах, исходящих из одной точки 539

§ 10. Отображение многоугольника на полуплоскость 542

1. Вывод формулы Кристоффеля—Шварца 542
2. Значение параметров, входящих в интеграл Кристоффеля — Шварца 545
3. О методе Ньютона — Фурье для системы уравнений и о вычислении несобственных интегралов 547
4. Примеры 550
5. Отображение полуплоскости на произвольный четырехугольник 557

Глава VI. Принципы приложения конформного преобразования к решению основных задач для канонических областей

§ 1. Введение 566

1. О преобразовании оператора Лапласа 566
2. О преобразовании бигармонического оператора. Формула Гурса. Связь бигармонических функций с плоской задачей теории упругости 567
3. Преобразование предельных условий 576
4. Интегралы типа Коши; их вычисление 579

§ 2. Задача Дирихле 584

1. Интеграл Пуассона 584
2. Интеграл Пуассона для внешности круга 588
3. Задача Дирихле для полуплоскости 590
4. Задача Дирихле для кольца 590
5. Формула Шварца. Нахождение сопряженной гармонической функции 592
6. Решение уравнения Пуассона в круге 595

§ 3. Задача Неймана 598

1. Формула Дини 598
2. Внешность окружности 600

3. Задача Неймана для полуплоскости 601
4. Задача Неймана для кольца 603

§ 4. Общая предельная задача для гармонических функций 604

1. Постановка задачи. Случай постоянных коэффициентов в предельном условии 604
2. Задача Гильберта 610
3. Общая предельная задача 613

§ 5. Основные задачи для бигармонических функций 618

1. Первая основная задача. Приведение к системе уравнений 618
2. Вторая основная задача. Приведение к системе уравнений 628
3. Первая основная задача. Приведение к функциональным уравнениям 629
4. Вторая основная задача. Приведение к функциональным уравнениям 636

Глава VII. Метод Шварца

§ 1. Метод Шварца решения задачи Дирихле для случая суммы двух областей 639

1. Метод Шварца в общем случае. Исследование сходимости 639
2. Случай линейного уравнения эллиптического типа. Оценка быстроты сходимости процесса Шварца для уравнения Лапласа 649
3. Приведение метода Шварца к решению системы интегральных уравнений последовательными приближениями 659

§ 2. Метод Шварца—Неймана решения задачи Дирихле для случая пересечения двух областей 664

1. Описание метода и исследование сходимости последовательных приближений 664
2. Пример исследования сходимости метода Шварца—Неймана. Оценка быстроты сходимости в случае уравнения Лапласа 667
3. Приведение метода Шварца — Неймана к решению системы интегральных уравнений последовательными приближениями 681

§ 3. Пример приложения метода Шварца 685

Цитированная литература 698

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Исследование большого круга естественно-научных и инженерных проблем приводит к математическим задачам, относящимся к решению дифференциальных уравнений и граничных проблем для них, интегральных и других функциональных уравнений.

Классические курсы, посвященные этим дисциплинам, содержат в основном теоретическое исследование соответствующих проблем, а также точные аналитические их решения для некоторых простейших случаев. В практике же постоянно встречаются задачи, для которых точное решение не может быть найдено или оно мало эффективно.

Поэтому приближенные методы решения задач математической физики, в особенности метод сеток и вариационные методы, развитые в начале этого столетия, были встречены техниками с большим интересом и сразу получили широкое распространение. Основные достоинства приближенных методов состояли в том, что они являлись универсальными и эффективными, так как позволяли находить приближенное решение для широкого класса случаев и при применении требовали простых и вполне осуществимых вычислений.

За последние четыре десятилетия приближенные методы получили особенно большое развитие в Советском Союзе. Одновременно с разработкой уже известных методов советскими учеными был предложен ряд новых. В этом общем труде, вызванном главным образом потребностями естествознания и техники, приняли участие, наряду с математиками, многие представители механики и других прикладных наук.

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникших с развитием современной физики и новейших областей техники. Появление электронных счетных машин, благодаря которым эффективность численных алгорифмов возросла во много раз, также вызвало широкий поток новых исследований, посвященных разработке численных методов и их новым трактовкам.

Данная книга, впервые вышедшая в 1936 году под заглавием „Методы приближенного решения уравнений в частных производных“, была, по-видимому, первым руководством, посвященным этому

предмету. Впоследствии она неоднократно переиздавалась уже под названием „Приближенные методы высшего анализа“, более соответствующим ее содержанию, поскольку наряду с уравнениями в частных производных значительное место в книге уделено интегральным уравнениям и приближенному конформному отображению. При переизданиях была добавлена новая глава, а некоторые главы были подвергнуты коренной переработке. Однако книга далеко не охватывает всего круга проблем данной области, в ней рассматриваются только задачи с граничными условиями (для уравнений эллиптического типа), притом по преимуществу линейные.

В настоящее издание внесены лишь небольшие изменения по сравнению с предыдущим. Помимо отдельных исправлений и добавлений существенно дополнена библиография по вопросам, затронутым в тексте. Более полный обзор советской литературы по приближенным методам можно найти в книге „Математика в СССР за сорок лет“. Главы I, II и IV написаны Л. В. Канторовичем, главы III, V, VI и VII — В. И. Крыловым. Все главы независимы одна от другой, за исключением шестой главы, существенно опирающейся на пятую.

Л. В. Канторович
В. И. Крылов

ГЛАВА I

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА

§ 1. Метод Фурье

Одним из основных и наиболее распространенных методов решения задач математической физики является метод Фурье. Решение, найденное по этому методу, получается обычно в форме бесконечного ряда, во многих случаях быстро сходящегося, поэтому метод Фурье часто может быть использован и для нахождения необходимых численных результатов; отрезок же этого ряда дает приближенное решение задачи. Мы предполагаем, что читатель знаком с простейшими применениями метода Фурье к решению задач математической физики, например с решением задачи о струне по методу Фурье.[1]) Поэтому мы не будем излагать здесь метод Фурье со всей полнотой и подробностью, а рассмотрим только его применение к нескольким задачам, относящимся к уравнениям эллиптического типа и главным образом к уравнению Лапласа.

1. Задача Дирихле для прямоугольника. Простейшим и основным уравнением в частных производных эллиптического типа является уравнение Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Функции непрерывные с частными производными первого и второго порядка, являющиеся решениями этого уравнения, называются гармоническими.

Первая основная задача, относящаяся к уравнению Лапласа, есть задача Дирихле. Она формулируется так: *найти функцию u, гармоническую в данной области D и принимающую на замкнутом контуре L, ограничивающем область D, заданные значения.*

---

[1]) См. В. И. Смирнов [1], т. II, Р. Курант и Д. Гильберт [1], С. Л. Соболев [1], И. Г. Петровский [1], В. И. Левин и Ю. И. Гросберг [1].

Если уравнения контура L даны в параметрическом виде: $x=x(s)$ $y=y(s)$, то это условие можно, например, записать так:

$$u[x(s), y(s)] = f(s),$$

где $f(s)$ — заданная функция. Короче будем записывать:

$$u = f(s) \text{ на } L.$$

Сделаем одно замечание, которое будет нам полезно. Если функция $f(s)$ есть сумма $f(s)=f_1(s)+f_2(s)$, то достаточно, очевидно, найти решения u_1 и u_2, обращающиеся на L соответственно в $f_1(s)$ и $f_2(s)$, так как $u=u_1+u_2$ даст решение задачи, обращающееся на L в $f(s)$.

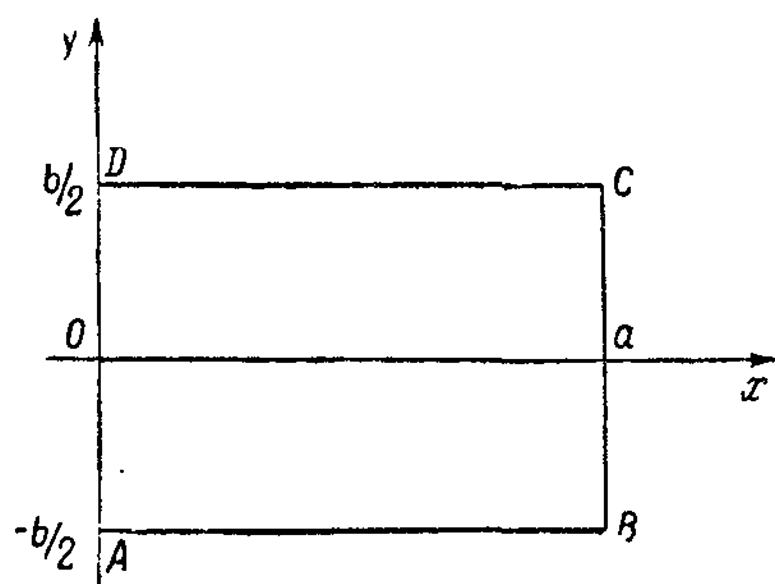


Рис. 1.

Перейдем теперь к решению задачи Дирихле для случая, когда область D есть прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b. Оси координат выберем, как указано на рис. 1, т. е. за ось абсцисс возьмем горизонтальную среднюю линию, а за ось ординат — левую сторону.

Общая задача Дирихле будет состоять здесь в нахождении гармонической функции, обращающейся в заданные произвольные функции на сторонах прямоугольника. Следовательно, граничные условия можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} u &= \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = \frac{b}{2}, \\ \varphi_2(x) & \text{при } y = -\frac{b}{2}, \end{cases} \\ u &= \begin{cases} \psi_1(y) & \text{при } x = 0, \\ \psi_2(y) & \text{при } x = a. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Решение этой задачи можно получить как сумму u_1+u_2 решений двух более простых задач:

$$u_1 = \left\{\begin{array}{ll} \varphi_1(x) & \text{при } y = \frac{b}{2}, \\ \varphi_2(x) & \text{при } y = -\frac{b}{2}, \\ 0 & \text{при } x = 0 \text{ и } x = a, \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$u_2 = \left\{\begin{array}{ll} \psi_1(y) & \text{при } x = 0, \\ \psi_2(y) & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } y = \pm\frac{b}{2}. \end{array}\right\} \tag{3'}$$

Эти задачи являются более простыми, так как в них мы имеем на двух сторонах нулевые условия. Обе задачи несущественно разнятся между собой и решение одной из них может быть легко сведено к решению другой, поэтому мы рассмотрим подробно лишь задачу нахождения функции u_1.

Задачу решаем методом Фурье. Ищем прежде всего элементарные основные решения, именно функции вида:

$$u = X(x) \cdot Y(y), \tag{4}$$

которые удовлетворяли бы уравнению Лапласа (1) и лишь последнему из условий (3).

Подставляя (4) в уравнение Лапласа, найдем:

$$X''Y + Y''X = 0 \quad \text{или} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k, \tag{5}$$

где k — некоторая постоянная, ибо оба выражения X''/X и Y''/Y должны быть постоянными, так как только в этом случае функция одного x может тождественно равняться функции одного y. Для нахождения функции X из (5) получим уравнение второго порядка:

$$X'' - kX = 0, \tag{6}$$

а чтобы функция u, определенная равенством (4), удовлетворяла последнему из условий (3), функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$X(0) = X(a) = 0. \tag{7}$$

Мы должны найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию (7). Если положить $k = -\lambda^2$, [1]) то общее решение уравнения (6) будет:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Условия (7) дают

$$C_1 = 0; \qquad C_1 \cos \lambda a + C_2 \sin \lambda a = 0,$$

следовательно, $C_1 = 0$ непременно, а C_2 можно взять неравным нулю только при условии

$$\sin \lambda a = 0, \tag{8}$$

т. е. если λa — число, кратное π:

$$\lambda a = n\pi \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

---

[1]) Можно было бы рассмотреть и положительные значения k, но они не дали бы никаких отличных от нуля решений. Действительно, положив $k = \lambda^2$, нашли бы $X(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \operatorname{sh} \lambda x$, начальные условия (7) заставили бы здесь принять $C_1 = C_2 = 0$, т. е. мы не получили бы никакого нетривиального решения.

n неположительные здесь отсутствуют, так как новых решений они не дают. Итак, при $\lambda=\frac{n\pi}{a}$ мы получаем решение:

$$X(x)=C\sin\frac{n\pi x}{a}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{9}$$

Подставляя $k=-\lambda^2=-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ в (5), получим для Y уравнение

$$Y''-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y=0, \tag{9'}$$

решая которое найдем

$$Y=C_1^*e^{\frac{n\pi}{a}y}+C_2^*e^{-\frac{n\pi}{a}y}=C_1\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+C_2\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Окончательно основное решение (4) ввиду (9) и (10) можем записать так:

$$u=\left(A\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+B\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x, \tag{11}$$

где A и B — опять произвольные постоянные.

Теперь решение нашей задачи — функцию u_1 можем искать в виде суммы основных решений:

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x. \tag{12}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа (1) и последнему из условий (3), остается подобрать постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворить первым двум из условий (3). На основании этих условий пишем следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} u_1\Big|_{y=\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi_1(x),\\ u_1\Big|_{y=-\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}-B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}\right]\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi_2(x).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

С другой стороны, разлагая $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в ряды по $\sin\frac{n\pi}{a}x$ в промежутке $(0,\ a)$, имеем:

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(1)}\sin\frac{n\pi x}{a};\qquad \varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(2)}\sin\frac{n\pi x}{a}, \tag{14}$$

где

$$\beta_n^{(1)}=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx;\qquad \beta_n^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx. \tag{15}$$

Сравнивая коэффициенты рядов (13) и (14), получаем:

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} &= \beta_n^{(1)}; \\ A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} &= \beta_n^{(2)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Если из этих равенств определить A_n и B_n и подставить в (12), то для u_1 получаем окончательно:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \sin \frac{n\pi x}{a}. \tag{17}$$

Этот ряд будет наверное сходящимся во всякой точке внутри прямоугольника, ибо $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$, как коэффициенты Фурье интегрируемой функции, стремятся к нулю, а отношения

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}; \qquad \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}}$$

представляют величины порядка $e^{n\frac{\pi}{2}\left(|y|-\frac{b}{2}\right)}$, и так как $|y| < \frac{b}{2}$, то ряд для u_1 сходится как прогрессия со знаменателем $e^{\frac{\pi}{a}\left(|y|-\frac{b}{2}\right)}$.

Следует отметить, что для быстроты сходимости ряда (17), особенно в точках, близких к контуру (когда $|y|$ близок к $b/2$), имеет существенное значение быстрота убывания коэффициентов $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$. Это обстоятельство дает путь для улучшения сходимости ряда (17) [см. § 5].

Ввиду быстрой сходимости ряда (17) будут сходиться ряды для производных u_1 и будет допустимо почленное дифференцирование, а потому, так как каждое слагаемое есть решение уравнения, ясно, что функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (1). Далее, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны, то можно показать, что предельные значения для $u_1(x, y)$ при приближении к контуру будут те, которые предписаны условиями (3). Итак, найденная функция u_1 удовлетворяет всем поставленным условиям.

Для нахождения функции u_2 нужно решить уравнение Лапласа при условиях (3'). Но, вводя преобразование координат при помощи формул

$$x' = y + \frac{b}{2}; \qquad y' = x - \frac{a}{2},$$

приведем условия (3') к виду (3), только при этом обменяются ролями числа a и b и вместо функций φ_1 и φ_2 войдут ψ_1 и ψ_2. Поэтому,

воспользовавшись формулой (17), а затем вернувшись к переменным x и y, решение для функции u_2 получаем в следующем виде:

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\delta_n^{(1)}+\delta_n^{(2)}}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi a}{2b}}\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta_n^{(1)}-\delta_n^{(2)}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi a}{2b}}\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\sin\frac{n\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right), \quad (18)$$

где

$$\delta_n^{(1)}=\frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\psi_1(y)\sin\frac{n\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)dy;$$
$$\delta_n^{(2)}=\frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\psi_2(y)\sin\frac{n\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)dy. \quad (19)$$

Полное решение поставленной задачи — функцию u — получим, складывая решение (17) и (18). Следует заметить, что выражения для функций u_1 и u_2 упрощаются, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ [соответственно $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$] равны между собой. Например, если $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi(x)$, то

$$\beta_n^{(1)}=\beta_n^{(2)}=\beta_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

и выражение для u_1 принимает вид

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi y}{a}}{\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2a}}\sin\frac{n\pi x}{a}. \quad (20)$$

Таким же образом может быть решена для случая прямоугольника и вторая основная граничная задача — задача Неймана.

Задача Неймана вообще ставится так: *найти функцию u, гармоническую в области D, у которой нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е. производная по направлению нормали к контуру, имеет заданные значения на контуре L,*

$$\frac{\partial u}{\partial n}=f_1(s)\ \text{на}\ L. \quad (21)$$

Задача Неймана имеет некоторые особенности по сравнению с задачей Дирихле. Во-первых, она имеет не единственное решение, ибо

очевидно, что если мы к некоторому решению задачи прибавим любую постоянную, то снова получим решение. Во-вторых, функция $f_1(s)$ не может быть взята произвольно. Именно, по известному свойству гармонической функции, интеграл от ее нормальной производной по замкнутому контуру должен равняться нулю:[1])

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_L f_1(s)\,ds = 0. \tag{22}$$

Перейдем теперь к случаю прямоугольника. Обозначения и систему координат сохраняем те же, что и в задаче Дирихле. Так же как и там, можем разбить задачу на две, причем в каждом случае на двух сторонах условия нулевые.

Для функции u_1 будем иметь условия

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \begin{cases} \chi_1(x) & \text{при} \quad y = \frac{b}{2}, \\ \chi_2(x) & \text{при} \quad y = -\frac{b}{2}, \end{cases} \tag{23}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a.$$

Задачу решаем методом Фурье. Отыскивая решение в форме $u = XY$, имеем здесь для $X(x)$ вместо (7) условие

$$X'(0) = X'(a) = 0. \tag{24}$$

На основании этого условия получим тем же путем, что $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ и

$$X = \cos\frac{n\pi}{a}x \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{25}$$

Тогда для u_1 найдем вместо (12) ряд

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x + A_0 y + B_0; \tag{26}$$

последнее слагаемое $A_0 y + B_0$ есть решение уравнения (9′), отвечающее случаю $n = 0$.

---

[1]) См. В. И. Смирнов [1], т. II, стр. 574. Правда, там приведено доказательство этого равенства для контура, лежащего внутри области, но переходом к пределу отсюда получается то же равенство для граничного контура.

Постоянные A_n и B_n можем определить, пользуясь первыми двумя из условий (23). Именно на основании этих условий и ряда (26) пишем

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x+A_0=\chi_1(x),\\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=-\frac{b}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[-A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x+A_0=\chi_2(x).\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Обозначим через $\alpha_n^{(1)}$ и $\alpha_n^{(2)}$ коэффициенты Фурье функций $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ при разложении их в ряд по $\cos\frac{n\pi}{a}x$:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n^{(1)} &= \frac{2}{a}\int_0^a \chi_1(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx,\\ \alpha_n^{(2)} &= \frac{2}{a}\int_0^a \chi_2(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx.\end{aligned}\right\} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Если сравнить теперь коэффициенты при $\cos\frac{n\pi x}{a}$ в обеих частях равенств (27), то найдем систему для определения A_n и B_n:

$$\left.\begin{aligned}A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a} &= \frac{a}{n\pi}\alpha_n^{(1)},\\ -A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a} &= \frac{a}{n\pi}\alpha_n^{(2)}.\end{aligned}\right\} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (27')$$

Для $n=0$ получим непосредственно из (27) равенства:

$$A_0=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}; \qquad A_0=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}.$$

Последним равенствам можно удовлетворить только, если $\alpha_0^{(1)}=\alpha_0^{(2)}$. При этом же условии будет $A_0=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}=\frac{\alpha}{2}$. Определяя же A_n и B_n из систем (27') и подставляя полученные значения в (26), найдем окончательно:

$$u_1=\frac{\alpha}{2}y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n^{(1)}-\alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}+\frac{\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi x}{a}. \qquad (28)$$

В процессе решения сами собой выявились отмеченные выше особенности задачи Неймана: во-первых, вошла в решение произволь-

ная постоянная B_0; во-вторых, мы получили дополнительное условие $\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=0$. Это условие означает не что иное, как условие (22) для рассматриваемой задачи. Действительно,

$$\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a \chi_1(x)\,dx-\frac{2}{a}\int_0^a \chi_2(x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{a}\left[\int_{DC}\frac{\partial u_1}{\partial y}\,dx-\int_{AB}\frac{\partial u_1}{\partial y}\,dx\right]=-\frac{2}{a}\int_L \frac{\partial u_1}{\partial n}\,ds,$$

так как по остальным сторонам последний интеграл равен нулю. Итак условие $\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=0$ равносильно (22).

Задача об определении второй части u_2 может быть поставлена и решена аналогичным образом.

Отметим еще, что методом Фурье можно найти решение задачи и для того случая, когда на одних сторонах дана сама неизвестная функция, а на других — ее нормальная производная, а также когда задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

Возможность решения основных граничных задач для уравнения Лапласа в случае прямоугольника позволяет во многих случаях получить решение тех же задач и для уравнения Пуассона

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\ y). \tag{29}$$

Действительно, пусть для определенности речь идет о задаче Дирихле: $u=\varphi(s)$ на L. Предположим, что нам удалось найти какое-то частное решение $u_0(x,\ y)$ уравнения Пуассона $\Delta u_0=f$. Введем тогда новую неизвестную функцию

$$u_1(x,\ y)=u(x,\ y)-u_0(x,\ y).$$

Функция $u_1(x,\ y)$ должна уже удовлетворять уравнению Лапласа, ибо

$$\Delta u_1=\Delta u-\Delta u_0=f-f=0.$$

Граничные условия для u_1 будут, правда, другие, именно если обозначить $f_0(s)$ ту известную функцию, в которую обращается $u_0(x,\ y)$ на контуре L, то для u_1 получим условие:

$$u_1=f(s)-f_0(s)=f_1(s) \text{ на } L.$$

Таким образом всегда решение граничной задачи для уравнения Пуассона приводится к нахождению частного его решения и к решению граничной задачи для уравнения Лапласа.

Что касается частного решения $u_0(x,\ y)$, то его часто бывает легко найти, отыскивая в форме, отвечающей правой части и содержащей неопределенные коэффициенты. Например, если правая часть $f(x,\ y)$ есть полином n-й степени, то решение нужно искать в виде полинома $(n+2)$-й степени с неопределенными коэффициентами. При этом в членах каждой степени $k\leqslant n+2$ двум из коэффициентов

можно дать произвольные значения, остальные определятся тогда единственным образом. Эта произвольность может быть использована для придания частному решению возможно более простого вида.

Рассмотрим теперь один пример решения задачи Дирихле, именно в случае уравнения Пуассона.

Пример. Задача о кручении прямоугольной призмы.

По теории Сен-Венана задача о кручении любого призматического тела, сечение которого—область D, ограниченная контуром L, — приводится к следующей граничной задаче: найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -2, \tag{30}$$

обращающееся в нуль на контуре L:

$$u = 0 \text{ на } L. \tag{31}$$

При этом основные величины, требующиеся для расчета, выражаются через функцию u (ее называют функцией напряжения) следующим образом:[1])

компоненты касательного напряжения

$$\tau_{zx} = G\vartheta \frac{\partial u}{\partial y}; \qquad \tau_{zy} = -G\vartheta \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{32}$$

а момент при кручении

$$M = 2G\vartheta \iint_D u\, dx\, dy. \tag{33}$$

Здесь ϑ — угол поворота, отнесенный к единице длины, а G — модуль сдвига.

Дадим теперь решение задачи о кручении для прямоугольника со сторонами a и b. Мы должны найти решение уравнения (30), обращающееся в нуль на контуре. Чтобы свести дело к решению уравнения Лапласа, ищем частное решение u_0 уравнения (30).

Разыскиваем его в виде $u_0 = Ax^2 + By^2$. Подставляя u_0 в упомянутое уравнение, получаем:

$$2A + 2B = -2.$$

Проще всего принять $A = -1$ и $B = 0$. Кроме того, к полученному решению можно добавить произвольную линейную функцию. Удобнее всего принять

$$u_0 = -x^2 + ax,$$

[1]) См. П. Ф. Папкович [1], Л. С. Лейбензон [2], М. М. Филоненко-Бородич [1], Н. В. Геккелер [1], стр. 17. Физическое значение функции u таково: если перемещение в направлении оси Z есть $w = \vartheta\varphi(x, y)$ и если ψ — функция, сопряженная с φ, т. е. такая, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{dx}$, то $u = \psi - \frac{x^2 + y^2}{2}$.

так как тогда u_0 обращается в 0 на сторонах $x=0$ и $x=a$. Если ввести теперь неизвестную функцию $u_1=u-u_0$, то она удовлетворяет уравнению $\Delta u_1=0$ и начальные условия для нее

$$u_1=-(ax-x^2) \quad \text{при} \quad y=\pm\frac{b}{2},$$
$$u=0 \qquad\qquad \text{при} \quad x=0;\ x=a.$$

Для u_1 мы можем воспользоваться решением (20), причем в данном случае $\varphi(x)=-(ax-x^2)$, а потому

$$\beta_n=-\frac{2}{a}\int_0^a (ax-x^2)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx=$$

$$=-\left[-\frac{2}{a}(ax-x^2)\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}x\right]_0^a-\frac{2}{a}\frac{a}{n\pi}\int_0^a (a-2x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx=$$

$$=-\left[\frac{2}{n\pi}(a-2x)\frac{a}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\right]_0^a-\frac{2a}{n^2\pi^2}\int_0^a 2\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx=$$

$$=-\frac{4a}{n^2\pi^2}\left[-\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\right]_0^a=-\frac{4a^2}{n^3\pi^3}\left[1-\cos n\pi\right].$$

Таким образом, при n четном $\beta_n=0$, при n нечетном $\beta_n=-\frac{8a^2}{n^3\pi^3}$. Подставляя найденное значение β_n в (20), получим:

$$u_1=-\sum_{n=1,\,3,\,5\,\ldots}\frac{8a^2\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}}{\pi^3 n^3\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

Для u получим окончательно решение

$$u=x(a-x)-\frac{8a^2}{\pi^3}\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}}{1^3\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi y}{a}}{3^3\operatorname{ch}\frac{3\pi b}{2a}}\sin\frac{3\pi x}{a}+\ldots\right] \quad (34)$$

С помощью этого решения могут быть найдены касательные напряжения τ и момент M. Так, для момента имеем

$$M=2G\vartheta\int_0^a\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u\,dx\,dy=2G\vartheta\left\{b\left|\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^a-\right.$$

$$\left.-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,\,3,\,\ldots}\frac{1}{n^3\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\left|\frac{a}{n\pi}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left|-\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\right]_0^a\right\}=$$

$$=2G\vartheta\left\{\frac{a^3b}{6}-\frac{32a^4}{\pi^5}\sum_{n=1,\,3,\,\ldots}\frac{1}{n^5}\operatorname{th}\frac{n\pi b}{2a}\right\}.$$

Ряды для τ_{zx} и τ_{zy} получаются дифференцированием ряда (34).

Приведем некоторые численные данные.[1]) Для момента M получаем такие значения:

$$M = 0{,}1408G\vartheta a^4 \quad \text{при} \quad \frac{a}{b} = 1,$$

$$M = 0{,}1957G\vartheta ab^3 \quad \text{при} \quad \frac{a}{b} = 1{,}5,$$

$$M = 0{,}2287G\vartheta ab^3 \quad \text{при} \quad \frac{a}{b} = 2.$$

Далее приведем значения u в некоторых точках для случая $a = 2$ и $b = 1$.

$$u(1,\ 0) = 0{,}91098,\ u\left(\frac{1}{2},\ 0\right) = 0{,}77694,$$

$$u\left(1,\ \frac{1}{4}\right) = 0{,}66374,\ u\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right) = 0{,}58982.$$

Заметим, что решенная сейчас математическая задача может быть и иначе использована в теории упругости. Именно прогиб u равномерно загруженной мембраны удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = C,$$

где C — постоянная. Если мембрана оперта по контуру прямоугольника, то должно быть $u = 0$ на контуре. Ясно поэтому, что решение задачи о равномерно загруженной мембране может быть легко получено из (34). В частности, приведенные выше значения u дают нам (с точностью до постоянного множителя) величину прогиба мембраны со сторонами 1 и 2 в различных точках.

2. Задачи Дирихле и Неймана для кольца в случае уравнения Лапласа. Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0$$

в случае области, заключенной между двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 с центром в начале.

Вводя полярные координаты, можем упомянутое уравнение переписать в виде [2])

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{35}$$

Областью в полярных координатах служит бесконечный прямоугольник $(-\infty < \theta < +\infty;\ R_1 \leqslant r \leqslant R_2)$, граничными условиями

---

[1]) См. также Н. В. Геккелер [1], стр. 30, П. Ф. Папкович [1], стр. 231.

[2]) См. В. И. Смирнов [1], т. II, стр. 342.

являются периодичность искомого решения как функции θ и заданные значения на окружностях:

$$\left.\begin{aligned} &u(r, \theta+2\pi)=u(r, \theta), \\ &u(R_1, \theta)=f_1(\theta); \quad u(R_2, \theta)=f_2(\theta). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Для решения задачи применим метод Фурье. Подставляя $u=T(\theta)R(r)$, получим после преобразований

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-k^2. \tag{37}$$

При этом постоянную в правой части (37) нужно выбрать отрицательной, в противном случае невозможно будет удовлетворить первому из условий (36). Первое из уравнений (37) дает

$$T(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta. \tag{38}$$

Для того чтобы было удовлетворено первое из условий (36), нужно, чтобы k было целым числом: $k=0, 1, 2, \ldots$

Второе уравнение принимает вид:

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0.$$

При $k\neq 0$ это уравнение — типа Эйлера, и основные решения его: r^k и r^{-k}. При $k=0$ убеждаемся непосредственно, что его решения суть 1 и $\ln r$.

Принимая во внимание это и (38), можем написать решение u в виде ряда:

$$u(r, \theta)=\sum_{k=1}^{\infty}[(A_kr^k+B_kr^{-k})\cos k\theta+ \\ +(C_kr^k+D_kr^{-k})\sin k\theta]+A_0\ln r+B_0. \tag{39}$$

Для определения постоянных разлагаем функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ в тригонометрические ряды:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(\theta)=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}\cos k\theta+\beta_k^{(1)}\sin k\theta), \\ &f_2(\theta)=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(2)}\cos k\theta+\beta_k^{(2)}\sin k\theta). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Пользуясь последними из условий (36), приравняв коэффициенты при соответственных синусах и косинусах в (39) и (40), получим

для определения постоянных A, B, C, D следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} A_kR_1^k + B_kR_1^{-k} &= \alpha_k^{(1)}; & C_kR_1^k + D_kR_1^{-k} &= \beta_k^{(1)},\\ A_kR_2^k + B_kR_2^{-k} &= \alpha_k^{(2)}; & C_kR_2^k + D_kR_2^{-k} &= \beta_k^{(2)},\\ A_0 \ln R_1 + B_0 &= \frac{\alpha_0^{(1)}}{2}; & A_0 \ln R_2 + B_0 &= \frac{\alpha_0^{(2)}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Находя из этих уравнений значения постоянных и подставляя в (39), получим окончательно

$$u = \frac{\alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}}{2(\ln R_2 - \ln R_1)} \ln r + \frac{\alpha_0^{(1)} \ln R_2 - \alpha_0^{(2)} \ln R_1}{2(\ln R_2 - \ln R_1)} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\alpha_k^{(1)} R_2^{-k} - \alpha_k^{(2)} R_1^{-k}) r^k - (\alpha_k^{(1)} R_2^k - \alpha_k^{(2)} R_1^k) r^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_1^{-k} R_2^k} \cos k\theta + \right. \\ \left. + \frac{(\beta_k^{(1)} R_2^{-k} - \beta_k^{(2)} R_1^{-k}) r^k - (\beta_k^{(1)} R_2^k - \beta_k^{(2)} R_1^k) r^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} - R_1^{-k} R_2^k} \sin k\theta \right]. \tag{42}$$

Легко проверить непосредственно, что ряд (42) наверное сходится при $R_1 < r < R_2$, так как величины α_k и β_k стремятся к нулю. При этом, если функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ удовлетворяют условию Дирихле, то сходятся ряды (40), а потому ряд (42) сходится и при $r = R_1$ и $r = R_2$.

Рассмотрим два важнейших предельных случая, когда кольцо обращается в круг и в внешность круга. Для первого случая, беря в (42)

$$R_1 = 0; \quad R_2 = R; \quad f_1(\theta) = \frac{\alpha_0}{2}; \quad f_2(\theta) = f(\theta); \quad \alpha_k^{(2)} = \alpha_k; \quad \beta_k^{(2)} = \beta_k,$$

найдем решение задачи Дирихле для круга:

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\alpha_k r^k}{-R^k} \cos k\theta + \frac{-\beta_k r^k}{-R^k} \sin k\theta \right) = \\ = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta). \tag{43}$$

Во втором случае, беря

$$R_1 = R; \ R_2 \to \infty; \ f_1(\theta) = f(\theta); \ f_2(\theta) = \frac{\alpha_0}{2}; \quad \alpha_k^{(1)} = \alpha_k; \quad \beta_k^{(1)} = \beta_k,$$

получим решение задачи Дирихле для внешности круга радиуса R:

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\alpha_k r^{-k}}{-R^{-k}} \cos k\theta + \frac{-\beta_k r^{-k}}{-R^{-k}} \sin k\theta \right) = \\ = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^k (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta). \tag{44}$$

Полученное решение $u(r, \theta)$ при $r \to \infty$ имеет пределом число $\frac{\alpha_0}{2}$.

Найденные здесь решения (43) и (44) представлены в форме бесконечных рядов, однако их можно преобразовать в определенные интегралы. Проведя это, например, для решения (43), получим:

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda)\, d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \cos k\lambda\, d\lambda\right) \cos k\theta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \sin k\lambda\, d\lambda\right) \sin k\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (\cos k\lambda \cos k\theta + \sin k\lambda \sin k\theta)\right] f(\lambda) d\lambda. \quad (45)$$

Но стоящий в скобках бесконечный ряд может быть просуммирован. Воспользовавшись формулами Эйлера, найдем:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k(\lambda - \theta) = 1 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k e^{i(\theta-\lambda)k}\right]^{1)} =$$

$$= 1 + 2\mathrm{Re}\left[\frac{\frac{r}{R} e^{i(\theta-\lambda)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\theta-\lambda)}}\right] = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \lambda) + r^2};$$

подставляя полученное выражение в (45), найдем решение внутренней задачи Дирихле для круга в форме так называемого интеграла Пуассона:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \lambda) + r^2} f(\lambda)\, d\lambda.^{2)} \quad (46)$$

Для внешней задачи аналогично находим:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \lambda) + r^2} f(\lambda)\, d\lambda. \quad (46')$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем знак Re означает, что должна быть взята действительная часть следующего за ним выражения.

[2]) Более строгое математически изложение решения задачи Дирихле для прямоугольника и круга можно найти, например, в книге Л. В. Канторовича [12].

Такого же рода суммирование и преобразование решения (42) в определенный интеграл для случая кольца не может быть выполнено в элементарных функциях и выполнимо только при привлечении специальных — эллиптических функций.

Так же, как и задача Дирихле, может быть решена задача Неймана для кольца, внутренности и внешности круга. В случае кольца граничные условия будут состоять в задании значений нормальной производной:

$$\left.\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = f_1(\theta); \quad \left.\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=R_2} = f_2(\theta). \tag{47}$$

Тогда, если искать решение задачи в форме (39) и обозначить, как и прежде, через $\alpha_k^{(1)}$, $\beta_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(2)}$, $\beta_k^{(2)}$ коэффициенты Фурье функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$, найдем:

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0^{(1)} R_1}{2} \ln r + B_0 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_k^{(1)} R_2^{-k-1} - \alpha_k^{(2)} R_1^{-k-1}) r^k + (\alpha_k^{(1)} R_2^{k-1} - \alpha_k^{(2)} R_1^{k-1}) r^{-k}}{k(R_1^{k-1} R_2^{-k-1} - R_2^{k-1} R_1^{-k-1})} \cos k\theta +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta_k^{(1)} R_2^{-k-1} - \beta_k^{(2)} R_1^{-k-1}) r^k + (\beta_k^{(1)} R_2^{k-1} - \beta_k^{(2)} R_1^{k-1}) r^{-k}}{k(R_1^{k-1} R_2^{-k-1} - R_1^{k-1} R_1^{-k-1})} \sin k\theta, \tag{48}$$

при этом решение задачи возможно только при выполнении условия

$$\alpha_0^{(1)} R_1 = \alpha_0^{(2)} R_2, \tag{49}$$

и тогда решение задачи не единственно, а содержит в своем составе произвольную постоянную B_0. Условие (49) говорит о том, что интегралы от нормальных производных по обеим окружностям должны быть равны между собой, что опять эквивалентно условию (22).

Найденное решение (48) принимает более простой вид, если кольцо превращается в круг или внешность круга, и тогда подобно (46) и (46′) оно может быть представлено в виде определенного интеграла. [1])

3. Пример бигармонической проблемы. Бигармоническими проблемами вообще называются задачи отыскания решения уравнения

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{50}$$

удовлетворяющего некоторым граничным условиям на контуре области относительно функции u и ее частных производных первых

---

[1]) Многочисленные примеры приложения метода Фурье и более общего метода, разработанного автором, можно найти в обширной монографии Г. А. Гринберга [1].

трех порядков. Эти условия определяются смыслом самой задачи. В ряде случаев для решения бигармонических проблем оказывается применимым метод Фурье. В качестве примера подобной задачи рассмотрим ту, к которой приводит нахождение прогиба равномерно загруженной прямоугольной пластинки, опертой по четырем сторонам. Прогиб этой пластинки $u = u(x, y)$ представляет, как известно, решение дифференциального уравнения [1])

$$\Delta\Delta u = \frac{p}{N}, \tag{51}$$

где p — единичная нагрузка, а N — жесткость пластинки. Граничными условиями служат

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \ u = 0,\ \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{при } y = 0;\ y = b, \\ 2)\ \ u = 0,\ \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{при } x = -\dfrac{a}{2};\ x = \dfrac{a}{2}. \end{array}\right\} \tag{52}$$

Для того чтобы свести задачу к решению однородного уравнения, найдем частное решение. За такое частное решение удобнее всего взять многочлен 4-й степени от y, удовлетворяющий уравнению (51) и первым из условий (52). Этот многочлен, очевидно, будет

$$u_0 = \frac{pb^4}{24N}\left(\frac{y}{b} - 2\frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4}\right).\ ^{2)} \tag{53}$$

Если обозначить теперь через u_1 разность $u - u_0 = u_1$, то функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению $\Delta\Delta u_1 = 0$ и граничным условиям

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \ u_1 = 0,\ \ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 & \text{при } y = 0;\ y = b, \\ 2)\ \ u_1 = -\dfrac{pb^4}{24N}\left(\dfrac{y}{b} - 2\dfrac{y^3}{b^3} + \dfrac{y^4}{b^4}\right),\ \ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 & \text{при } x = -\dfrac{a}{2};\ \ x = \dfrac{a}{2}. \end{array}\right\} \tag{54}$$

Функцию u_1 можем найти с помощью метода Фурье.

---

[1]) И. В. Геккелер [1], стр. 127, С. П. Тимошенко [2], Б. Г. Галёркин [1].

[2]) Физическое значение этого решения таково: u_0 есть прогиб свободно опертой балки длины b под равномерной нагрузкой интенсивности $\frac{p}{N}$.

Фундаментальные решения однородного уравнения (50) ищем в виде XY. Подставляя в уравнение (50), получим

$$X^{IV}Y + 2X''Y'' + XY^{IV} = 0. \tag{55}$$

Для того чтобы получить уравнение только относительно функции X, достаточно в качестве Y взять функцию, удовлетворяющую уравнению

$$Y'' = cY. \tag{56}$$

Эта функция Y должна, кроме того, удовлетворять первой группе условий (54). Уже первые два из этих условий: $Y=0$ при $y=0$ и $y=b$ вместе с уравнением (56) определяют вполне, как в предыдущих случаях, искомые фундаментальные функции Y:

$$Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{57}$$

Но эти функции, как нетрудно проверить, удовлетворяют также и двум другим условиям той же группы, именно:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b.$$

Это счастливое обстоятельство имеет место лишь при данных специальных граничных условиях, а не имеет общего характера. Благодаря этому данный метод применим не ко всякой бигармонической проблеме, а лишь к некоторым, подобным рассматриваемой.

Продолжая исследование, подставляем найденное Y_n в (55) и для нахождения X_n получаем уравнение

$$X^{IV} - 2\frac{n^2\pi^2}{b^2}X'' + \frac{n^4\pi^4}{b^4}X = 0, \tag{58}$$

откуда

$$X_n = a_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b} + b_n\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b} + c_n \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b} + d_n\frac{n\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}, \tag{59}$$

и искомое решение u_1 получает вид:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{60}$$

Для определения постоянных a_n, b_n, c_n и d_n мы должны воспользоваться второй группой граничных условий (54). Коэффициенты c_n и d_n следует принять равными нулю, так как решение, очевидно, должно быть четной функцией x. Для определения коэффициентов

a_n и b_n, разлагая правую часть предпоследнего из равенств (54) в ряд Фурье, будем иметь:

$$-\frac{pb^4}{24N}\left(\frac{y}{b}-2\frac{y^3}{b^3}+\frac{y^4}{b^4}\right)=-\frac{4pb^4}{\pi^5 N}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad (61)$$

Применяя теперь к выражению (60) условия (54), получим для определения a_n и b_n ($n=1, 3, 5, \ldots$) уравнения

$$a_n \operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}+b_n\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}=-\frac{4pb^4}{\pi^5 N n^5},$$

$$a_n\frac{n^2\pi^2}{b^2}\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}+b_n\frac{n^2\pi^2}{b^2}\left[2\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}+\frac{n\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}\right]=0,$$

a_n и b_n с четным номером оказываются равными нулю.

Решая написанные уравнения относительно a_n и b_n и подставляя найденные их значения в (59) и (60), получим окончательно после всех преобразований:

$$u=u_0+u_1=$$
$$=\frac{4pb^4}{\pi^5 N}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[1-\frac{2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}+\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}-\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{b}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (62)$$

где $\alpha=\frac{n\pi a}{2b}$. Этот ряд настолько хорошо сходится, что практически обычно можно ограничиться первым членом

$$u\cong\frac{4pb^4}{\pi^5 N}\left[1-\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2b}\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}+\frac{\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{\pi a}{2b}\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}-\frac{\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2b}}{2\operatorname{ch}^2\frac{\pi a}{2b}}\right]\sin\frac{\pi y}{b}.$$

§ 2. Бесконечные системы уравнений

1. Основные определения. Теория бесконечных систем уравнений с бесчисленным множеством неизвестных начала разрабатываться в конце прошлого века; в настоящее время имеется обширная литература, посвященная ей.[1]) До сих пор, однако, эта теория не получила вполне законченного вида.

Теория бесконечных систем линейных уравнений возникла и развилась в связи с теми приложениями, которые она имеет в вопросах

[1]) Из книг, в которых изложена эта теория, укажем: В. Ф. Каган [1], Рисс [1]. Литература по данному вопросу указана в статье Хеллингера и Теплица [1] и в сборнике „Математика в СССР за сорок лет".

интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, в теории интегральных уравнений и, в особенности, при решении граничных задач математической физики. Мы рассмотрим в этом параграфе начала теории бесконечных систем; применение бесконечных систем к решению некоторых граничных задач дано в следующем параграфе.

Бесконечной системой линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных называется система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где $a_{i,k}$ — известные коэффициенты, b_i — свободные члены и x_i — неизвестные. Система численных значений величин $x_1, x_2, \ldots$ называется решением системы (1), если после подстановки этих значений в левую часть равенств (1) мы получим сходящиеся ряды и все эти равенства будут удовлетворены.

При исследовании и решении бесконечных систем возникают следующие задачи:

1) установить, имеет ли система решение, удовлетворяющее данным условиям;

2) установить, единственно ли решение системы;

3) указать метод, с помощью которого это решение может быть найдено; вообще говоря, для этого требуются бесконечные операции;

4) указать приемы нахождения с помощью конечного числа действий приближенных значений для искомых, притом так, чтобы существовала возможность оценить погрешность этих приближений.

Мы рассмотрим здесь решение этих вопросов для одного важного класса систем, так называемых регулярных систем.

Отметим предварительно, что выделяя слагаемое x_i в i-м уравнении и перенося его в левую часть, можно придать данной системе следующий вид:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать именно системы вида (2).

2. Теоремы о сравнении систем.[1] Прежде чем перейти к изучению класса регулярных систем, мы докажем некоторые общие теоремы о сравнении двух систем типа (2).

---

[1]) По поводу теорем этого номера см. Пелле [1—3] и Л. В. Канторович [11]. См. также литературу по теории регулярных систем (сноска на стр. 37).

Систему уравнений

$$X_i=\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k+B_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots) \tag{3}$$

будем называть мажорантной для системы (2), если выполнены следующие неравенства:

$$\left.\begin{array}{ll} |c_{i,k}|\leqslant C_{i,k} & (i=1,\ 2,\ldots;\ k=1,\ 2,\ldots); \\ |b_i|\leqslant B_i & (i=1,\ 2,\ldots). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Теорема I (о существовании решения). *Если мажорантная система* (3) *имеет неотрицательное решение* $X'_i\geqslant 0$, *то данная система* (2) *имеет решение* x_i^*, *которое может быть найдено методом последовательных приближений и для которого справедливо неравенство*

$$|x_i^*|\leqslant X'_i. \tag{5}$$

Доказательство. Предварительно применим метод последовательных приближений к системе (3), для этой цели положим $X_i^{(0)}=0$ и далее $X_i^{(n)}$ определим по индукции:

$$X_i^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(n)}+B_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots). \tag{6}$$

Имеем, очевидно, $X_i^{(1)}=B_i\geqslant 0=X_i^{(0)}$. Если теперь уже установлено, что $X_i^{(n)}\geqslant X_i^{(n-1)}$, то на основании (6) получаем:

$$X_i^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(n)}+B_i\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(n-1)}+B_i=X_i^{(n)}.$$

Итак, для всех n и i имеем $X_i^{(n+1)}\geqslant X_i^{(n)}$.

С другой стороны, $X_i^{(0)}=0\leqslant X'_i$. Пусть уже установлено, что $X_i^{(n)}\leqslant X'_i$, тогда опять на основании (6), пользуясь тем, что X'_i удовлетворяют системе (3), заключаем, что

$$X_i^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(n)}+B_i\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X'_k+B_i=X'_i,$$

причем сходимость ряда в правой части неравенства влечет за собой сходимость в левой части.

Итак, на основании принципа индукции при всех i и n: $X_i^{(n)}\leqslant X'_i$. Таким образом, мы установили, что при фиксированном i последова-

тельность $X_i^{(n)}$ возрастает с увеличением n и остается ограниченной числом X_i', поэтому существуют пределы:

$$\lim_{n\to\infty} X_i^{(n)} = X_i^* \leqslant X_i' \quad (i=1,\ 2,\ldots). \tag{7}$$

Покажем, что полученные таким образом числа X_i^* дают решение системы (3). Действительно, перейдем в равенстве (6) к пределу при $n\to\infty$. В правой части допустим почленный переход к пределу, ибо ряд справа сходится равномерно относительно n, так как он мажорируется рядом с постоянными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k'$. Итак, осуществляя этот переход, находим

$$X_i^* = \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^* + B_i, \tag{8}$$

т. е. действительно X_i^* — решение системы (3).

Применим тот же метод последовательных приближений к системе (2). Полагаем, следовательно, $x_i^{(0)}=0$ и далее определяем $x_i^{(n)}$ индуктивно, принимая

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k^{(n)} + b_i. \tag{9}$$

Установим теперь неравенство

$$|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}| \leqslant X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)}. \tag{10}$$

Имеем, очевидно:

$$|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = |b_i| \leqslant B_i = X_i^{(1)} - X_i^{(0)}.$$

Предположим, что уже установлено неравенство $|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| \leqslant \leqslant X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}$; тогда имеем:

$$|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}| = \left|\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k^{(n)} + b_i\right] - \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k^{(n-1)} + b_i\right]\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}(x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}(X_k^{(n)} - X_k^{(n-1)}) = X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)}.$$

Итак, неравенство (10) установлено. Пользуясь им, видим, что ряд

$$x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \ldots \tag{11}$$

сходится, так как он мажорируется сходящимся рядом [ср. (7)]

$$X_i^{(0)} + (X_i^{(1)} - X_i^{(0)}) + (X_i^{(2)} - X_i^{(1)}) + \ldots = \lim_{n\to\infty} X_i^{(n)} = X_i^*. \tag{12}$$

Обозначим сумму ряда (11) через x_i^*

$$x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) + \ldots = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^*. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) ясно, что $|x_i^*| \leqslant X_i^*$. Наконец, переходя к пределу в равенстве (9), находим

$$x_i^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^* + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots);$$

предельный переход почленно был допустим, так как ряд справа мажорируется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k} X_k'$ и поэтому сходится равномерно относительно n. Итак, x_i^* — решения системы (2), при этом $|x_i^*| \leqslant X_i^* \leqslant X_i'$, и теорема полностью доказана.

Замечание 1. Решения x_i^* и X_i^* систем (2) и (3), найденные методом последовательных приближений при нулевых начальных значениях, будем называть главными решениями этих систем.

Замечание 2. Отметим, что если коэффициенты и свободные члены системы неотрицательны: $c_{i,k} \geqslant 0$; $b_i \geqslant 0$, то неотрицательно и главное решение $x_i^* \geqslant 0$. В самом деле, как ясно по индукции из (9), все $x_i^{(n)} \geqslant 0$, а поэтому и $x_i^* \geqslant 0$.

Перейдем теперь к вопросу об единственности решения бесконечной системы. Следует сказать здесь, что этот вопрос зависит от того, какие условия налагать на решение. Так, например, система уравнений

$$x_i = \frac{1}{2} x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

имеет не единственное решение: наряду с тривиальным решением $x_i = 0$, она имеет решение $x_i = 2^i$. Однако, ограниченное ее решение, т. е. решение, удовлетворяющее условию $|x_i| < M$ $(i = 1, 2, \ldots)$, единственно, это есть $x_i = 0$. В теореме II мы указываем область, в которой решение системы наверное единственно.

Теорема II (об единственности решения). *При условиях и обозначениях предыдущей теоремы, единственное решение системы (2), удовлетворяющее неравенству $|x_i| \leqslant PX_i^*$ ($P \geqslant 1$ — постоянное), есть главное ее решение. К этому решению приходим непременно, отправляясь от любых начальных значений $\bar{x}_i^{(0)}$, удовлетворяющих условиям $|\bar{x}_i^{(0)}| \leqslant PX_i^*$.*

Доказательство. Нам будет удобнее сначала доказать второе из утверждений теоремы. Нужно показать, что, отправляясь от

значений $\bar{x}_i^{(0)}$, удовлетворяющих неравенству $|\bar{x}_i^{(0)}| \leqslant PX_i^*$, и определяя по индукции $\bar{x}_i^{(n)}$, полагая

$$\bar{x}_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\bar{x}_k^{(n)} + b_i, \tag{14}$$

мы будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_i^{(n)} = x_i^*$. Докажем для этой цели неравенство

$$|\bar{x}_i^{(n)} - x_i^{(n)}| \leqslant P\,(X_i^* - X_i^{(n)}). \tag{15}$$

Для $n=0$ неравенство справедливо: $|\bar{x}_i^{(0)} - x_i^{(0)}| = |\bar{x}_i^{(0)}| \leqslant PX_i^* = P\,(X_i^* - X_i^{(0)})$. Покажем теперь возможность перехода от n к $n+1$. На основании (14), (9), (15), (6) и (8) имеем

$$|\bar{x}_i^{(n+1)} - x_i^{(n+1)}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\,(\bar{x}_k^{(n)} - x_k^{(n)})\right| \leqslant P\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}\,(X_k^* - X_k^{(n)}) =$$

$$= P\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^* + B_i\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k}X_k^{(n)} + B_i\right)\right] = P\,(X_i^* - X_i^{(n+1)}),$$

и неравенство (15) с заменой n на $n+1$ установлено.

Из него на основании (7) заключаем, что $(\bar{x}_i^{(n)} - x_i^{(n)}) \to 0$ и, так как $x_i^{(n)} \to x_i^*$ [по (13)], то и $\bar{x}_i^{(n)} \to x_i^*$, и второе утверждение теоремы установлено.

Пусть теперь $\bar{x}_i$ есть некоторое решение системы (2), удовлетворяющее условию $|\bar{x}_i| \leqslant PX_i^*$. Положим $\bar{x}_i^{(0)} = \bar{x}_i$, тогда, очевидно, все $\bar{x}_i^{(n)}$, определенные последовательно равенством (14), будут равны $\bar{x}_i$. По уже доказанному мы должны иметь $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_i^{(n)} = x_i^*$, но так как $\bar{x}_i^{(n)}$ от n фактически не зависят и равны $\bar{x}_i$, то $\bar{x}_i = \bar{x}_i^*$, и первая часть теоремы также установлена.

Для нахождения решения бесконечной системы рассматриваемого нами типа наряду с методом последовательных приближений может быть дан и некоторый другой метод. Для обоснования этого метода нам понадобится теорема о предельном переходе в бесконечных системах, с которой мы и начнем.

Теорема III (о предельном переходе). *Пусть дана последовательность бесконечных систем типа* (2):

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{s}{c}_{i,k}x_k + \overset{s}{b}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

($s=1, 2\ldots$), *имеющих общую мажорантную систему (3) с неотрицательным решением. Пусть, далее,*

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{c}_{i,k} = c_{i,k}; \quad \lim_{s\to\infty} \overset{s}{b}_i = b_i. \tag{17}$$

Тогда, если x_i^* *есть главное решение системы* (2) *и* $\overset{s}{x}{}_i^*$ — *главное решение системы* (16), *то*

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}{}_i^* = x_i^*. \tag{18}$$

Доказательство. Применяем к каждой из систем (16) метод последовательных приближений, полагая $\overset{s}{x}{}_i^{(0)}=0$ и далее по индукции

$$\overset{s}{x}{}_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{s}{c}_{i,k} \overset{s}{x}{}_k^{(n)} + \overset{s}{b}_i. \tag{19}$$

Покажем, что

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}{}_i^{(n)} = x_i^{(n)}. \tag{20}$$

Для $n=0$ это очевидно; покажем возможность перехода от n к $n+1$. Перейдем в равенстве (19) к пределу при $s\to\infty$. Благодаря тому, что ряд справа мажорируется сходящимся рядом с постоянными членами $\sum_k C_{i,k}X'_k$, в нем допустим предельный переход почленно, и пользуясь (17), (20) и (19), находим:

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}{}_i^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \overset{s}{c}_{i,k} \overset{s}{x}{}_k^{(n)} + \overset{s}{b}_i\right] = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(n)} + b_i = x_i^{(n+1)},$$

и соотношение (20) установлено для любого n. Далее имеем [ср. (13)]:

$$\overset{s}{x}{}_i^* = \overset{s}{x}{}_i^{(0)} + (\overset{s}{x}{}_i^{(1)} - \overset{s}{x}{}_i^{(0)}) + (\overset{s}{x}{}_i^{(2)} - \overset{s}{x}{}_i^{(1)}) + \ldots,$$

при этом ряд справа мажорируется при всех s рядом (12) и потому в нем допустим почленный переход к пределу при $s\to\infty$. Совершая его, пользуясь (20) и (13), находим

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}{}_i^* = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \ldots = x_i^*,$$

и соотношение (18), а с ним и теорема, доказаны.

Теорема IV (о методе редукции). *Решение системы* (2), *имеющей мажорантную систему* (3) *с неотрицательным решением, может быть найдено по методу редукции, т. е. с помощью*

предельного перехода в решении конечной системы, получающейся из данной бесконечной отбрасыванием всех уравнений и неизвестных, начиная с некоторого. Точнее говоря, если образовать конечную систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \ldots + c_{1,N}x_N + b_1, \\ x_2 &= c_{2,1}x_1 + c_{2,2}x_2 + \ldots + c_{2,N}x_N + b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N &= c_{N,1}x_1 + c_{N,2}x_2 + \ldots + c_{N,N}x_N + b_N \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

и обозначить через $\overset{N}{x}_i\,(i = 1, 2, \ldots, N)$ *главное решение*[1]) *ее, то*

$$\lim_{N\to\infty} \overset{N}{x}_i = x_i^*, \qquad (22)$$

где x_i^* *обозначает главное решение системы* (2).

Доказательство. Рассмотрим, наряду с системой (21), следующую бесконечную систему уравнений $(N = 1, 2, \ldots)$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \\ x_i &= 0 \qquad\qquad\qquad (i = N+1, N+2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Главным решением этой системы, очевидно, будет служить последовательность чисел $\overset{N}{x}_1, \overset{N}{x}_2, \ldots, \overset{N}{x}_N, 0, 0, \ldots$, или, если принять $\overset{N}{x}_i = 0$ для $i > N$, можно сказать короче, что решением N-й системы (23) будет последовательность $\overset{N}{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Далее ясно, что предельной для последовательности систем (23) служит система (2). В самом деле, лишь только $N \geqslant i$, коэффициент системы (23), стоящий на (i, k)-м месте, $c_{i,k}^N$, равен $c_{i,k}$, а потому, действительно, коэффициенты (и свободные члены) системы (23) стремятся к соответствующим коэффициентам и свободным членам системы (2). Наконец, совершенно очевидно, что система (3) служит общей мажорантной для систем (23). Таким образом, к последовательности систем (23) применима теорема III. Пользуясь ею, заключаем, что главное решение системы (23) сходится к главному решению системы (2):

$$\lim_{N\to\infty} \overset{N}{x}_i = x_i^*,$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) Как мы увидим ниже (n° 3, замечание 2 к теореме IIa), конечные системы вида (21) имеют, как правило, единственное решение, а потому здесь можно было бы говорить и просто о решении системы (21).

3. Регулярные и вполне регулярные системы. Регулярной системой будем называть бесконечную систему типа (2), для которой сумма модулей коэффициентов в каждой строке меньше единицы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1 \qquad (i=1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Если эта сумма не превосходит постоянного числа, меньшего единицы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant 1-\theta < 1 \qquad (i=1, 2, \ldots), \tag{25}$$

то систему будем называть вполне регулярной.[1])

Введем следующее обозначение:

$$\rho_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \qquad (i=1, 2, \ldots). \tag{26}$$

Для регулярных систем числа $\rho_i > 0$, для вполне регулярных $\rho_i \geqslant \theta > 0$.

Теоремы предыдущего номера о сравнении систем сразу позволяют получить ряд результатов относительно регулярных и вполне регулярных систем.

Предположим, что дана регулярная система (2), свободные члены которой удовлетворяют условию

$$|b_i| \leqslant K\rho_i, \tag{27}$$

где $K > 0$ — постоянная. Тогда система уравнений

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| X_k + K\rho_i \tag{28}$$

будет мажорантной для системы (2); действительно, благодаря (27) ясно, что условия (4) соблюдены. Система (28) имеет очевидное положительное решение $X_i = K > 0$, ибо на основании (26) ясно, что

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| K + K\rho_i.$$

Благодаря этому, к системе (2) применима теорема I. Пользуясь ею, получаем следующую теорему о регулярных системах.

---

[1]) По теории регулярных и вполне регулярных систем см. Б. М. Коялович [2], Р. О. Кузьмин [1, 2]. См. также Диксон [1], Кох [1], Винтнер [1].

***Теорема Ia.** Регулярная система уравнений, свободные члены которой удовлетворяют условию (27), имеет ограниченное решение*

$$|x_i| \leqslant K, \tag{29}$$

которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Следствие. В случае вполне регулярной системы условие (27), так как $\rho_i \geqslant \theta$, можно заменить на условие $|b_i| \leqslant K\theta = P$. Так как число P — произвольно, то видим, что решение вполне регулярной системы существует при любых ограниченных в совокупности свободных членах и если $|b_i| \leqslant P$, то

$$|x_i| \leqslant \frac{P}{\theta} \quad \left(\frac{P}{\theta} = K\right).$$

Замечание 1. Условие (27) наверное может быть удовлетворено с помощью подбора подходящего K, если среди свободных членов системы все, кроме конечного числа, равны нулю. Таким образом, в этом случае регулярная система наверное имеет ограниченное решение.

Замечание 2. Мы провели доказательство существования решения для регулярной системы при условии (27), пользуясь тем, что такие системы представляют частный случай систем, допускающих мажорантную с неотрицательным решением. Но в действительности этот частный случай почти совпадает с общим. Именно, всякая система, допускающая мажорантную с положительными свободными членами $B_i > 0$ и положительным решением X'_i, может быть сведена к регулярной. Действительно, вводя в системе (2) новые неизвестные, полагая $z_i = \frac{x_i}{X'_i}$, можем переписать ее так:

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{i,k} \frac{X'_k}{X'_i}\right) z_k + \frac{b_i}{X'_i}. \tag{30}$$

Тогда, так как X'_i решение системы (3),

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \frac{X'_k}{X'_i} \leqslant \frac{1}{X'_i} \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k} X'_k = \frac{X'_i - B_i}{X'_i} < 1$$

и

$$\frac{b_i}{X'_i} \leqslant \frac{B'_i}{X'_i} = 1 - \frac{X'_i - B_i}{X'_i} \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \frac{X'_k}{X'_i} = \rho_i,$$

т. е. система (30) регулярная, и условие (27) выполнено.

Переходим к вопросу об единственности решения для регулярных систем. Теорема II позволяет установить здесь следующее предложение.

***Теорема IIa.** Если главное решение системы уравнений (28) ограничено снизу положительным числом*

$$X_i^* \geqslant \alpha > 0, \tag{31}$$

то регулярная система (2) *при условии* (27) *имеет единственное ограниченное решение, к которому приводит метод последовательных приближений, от каких бы начальных значений* $x_i^{(0)}$, *ограниченных в совокупности, мы ни отправлялись. Наконец, в этом случае непременно* $X_i^* = K$.

Действительно, согласно теореме II, единственное решение системы (2), удовлетворяющее условию $|x_i| \leqslant PX_i^*$, есть главное решение. Но для всякого ограниченного решения при подходящем P будем иметь $|x_i| \leqslant P\alpha$, т. е., благодаря (31), для него будет удовлетворено условие $|x_i| \leqslant PX_i^*$, а потому такое решение не может быть отлично от главного. Второе утверждение получается таким же образом из второй половины теоремы II.

Наконец, последнее утверждение, что $X_i^* = K$, получается сразу, если применить первое утверждение теоремы к системе (28), которая сама для себя служит мажорантной. Тогда видим, что ее ограниченное решение $X_i = K$ должно совпадать с главным $K = X_i^*$.

Замечание 1. Для вполне регулярных систем условие (31) выполнено всегда. В самом деле, в этом случае

$$X_i^* \geqslant X_i^{(1)} = B_i = K\rho_i \geqslant K\theta > 0.$$

Поэтому вполне регулярная система имеет всегда единственное ограниченное решение,[1]) которое может быть найдено методом последовательных приближений, отправляясь от любой ограниченной системы начальных значений.

Замечание 2. Регулярная система, состоящая из конечного числа уравнений, непременно вполне регулярна. В самом деле, в качестве θ можно принять наименьшее из чисел ρ_i. Поэтому, согласно предыдущему замечанию, ограниченное решение такой системы единственно, но так как неограниченных решений у конечной системы быть не может, то вообще решение такой системы единственно. Конечная система уравнений, имеющая мажорантную с положительными свободными членами и положительным решением, приводится, как мы видели выше (замечание 2 к теореме Iа), к регулярной конечной системе, а потому такая система имеет единственное решение. На это обстоятельство мы уже ссылались выше (прим. на стр. 36).

Замечание 3. Регулярная система может иметь и несколько ограниченных решений. Так, непосредственной подстановкой можно убедиться, что система

$$x_i = \left[1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right] x_{i+1} + \frac{1}{(i+1)^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{32}$$

имеет два различных решения

$$x_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

и

$$x_i = \frac{1}{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) Тот факт, что ограниченное решение вполне регулярной системы единственно, может быть установлен весьма просто непосредственно. Чтобы установить это, нужно показать, что ограниченное решение однородной системы $x_i = \sum c_{i,k} x_k$ есть 0. Но, обозначая через M точную верхнюю границу $|x_i|$, получаем $|x_i| \leqslant \sum |c_{i,k}| M \leqslant M(1-\theta)$, а потому и $M \leqslant M(1-\theta)$, т. е. $M = 0$.

Главным будет второе из этих решений, что легко проверить непосредственно и что вытекает из следующей ниже теоремы.

Теорема IIб.[1] *Регулярная система может иметь не более чем одно решение, стремящееся к нулю, т. е. такое, что* $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$. *При этом, если коэффициенты и свободные члены регулярной системы положительны, то положительное ее решение, стремящееся к нулю, есть непременно главное ее решение.*

Покажем прежде всего, что однородная регулярная система не может иметь решения, стремящегося к нулю и отличного от нуля. Пусть, действительно, x_i такое решение системы:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k; \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через $Q > 0$ точную верхнюю границу $|x_i|$. Так как $x_i \to 0$, то, начиная с некоторого $i\,(i \geqslant i_1)$, будет $|x_i| < \frac{1}{2} Q$ и потому должно найтись такое $i_0 < i_1$, что $|x_{i_0}| = Q$. Из уравнения системы с номером i_0 имеем

$$Q = |x_{i_0}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i_0,k}|\,|x_k| \leqslant Q \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i_0,k}|,$$

откуда сразу следует, что $Q = 0$, а потому все $x_i = 0$.

Отсюда вытекает непосредственно первое утверждение теоремы, так как если бы неоднородная регулярная система имела два решения, x_i' и x_i'', стремящихся к нулю, то их разность $x_i = x_i' - x_i''$ представляла бы такое же решение соответствующей однородной системы, что по доказанному возможно, только если все $x_i = 0$, т. е. $x_i' = x_i''$.

Переходя к доказательству второго утверждения, отметим, прежде всего, что если система с $c_{i,k} \geqslant 0$ и $b_i \geqslant 0$ имеет положительное решение $\{x_i\}$, то главное решение не превосходит его: $0 \leqslant x_i^* \leqslant x_i$. Это следует сразу из теоремы 1, если принять в ней $X_i' = x_i$.

Поэтому, если про данное решение известно, что оно стремится к нулю $x_i \to 0$, то будет и $x_i^* \to 0$, а тогда по уже доказанному мы должны иметь $x_i = x_i^*$, т. е. $\{x_i\}$ главное решение.

Следствие. Если при некоторой подстановке вида

$$x_i = H_i z_i, \qquad (H_i \neq 0, \quad \lim_{i\to\infty} H_i = \infty)$$

---

[1] Эта теорема и следствие из нее принадлежат П. С. Бондаренко [1].

в регулярной системе (2), получившаяся в результате система относительно неизвестного z_i:

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{i,k} H_k}{H_i} z_i + \frac{b_i}{H_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2a}$$

окажется снова регулярной, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \left| \frac{H_k}{H_i} \right| = 1 - \rho_i'; \quad \rho_i' > 0; \quad |b_i| \leqslant K' H_i \rho_i',$$

то данная система имеет единственное ограниченное решение.

Но действительно, каждое ограниченное решение x_i системы (2) дает решение $z_i = \frac{1}{H_i} x_i$ системы (2а), стремящееся к нулю, и так как система (2а) может иметь не более одного такого решения, то ограниченное решение системы (2) единственно.

Это предложение дает ценный метод установления единственности ограниченных решений для регулярных систем. Пример его применения дан в § 3, n° 5.

Мы не будем формулировать специально для случая регулярных систем теорему III; ввиду важности теоремы IV, ее формулировку приведем.

Теорема IVa. *Главное решение регулярной системы*

$$x_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

со свободными членами, удовлетворяющими условию $|b_i| \leqslant K\rho_i$, *может быть найдено методом редукции, т. е. если* $\overset{N}{x}_i$ *есть решение конечной системы*

$$x_i = \sum_{k=1}^{N} c_{i,k} x_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{21}$$

то

$$x_i^* = \lim_{N \to \infty} \overset{N}{x}_i. \tag{22}$$

Мы имели право говорить просто о решении, а не о главном решении конечной системы (21), так как решение этой системы, как мы видели выше (замечание 2 к теореме IIa), единственно.

В заключение, чтобы показать возможность использования теорем этого номера, проведем исследование одной частной бесконечной системы.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(2i+1-2k)(2i-1-2k)} + b_i = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots) \tag{33}$$

или в раскрытом виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0\cdot x_1 + \frac{1}{1\cdot 3}x_2 + \frac{1}{3\cdot 5}x_3 + \frac{1}{5\cdot 7}x_4 + \ldots + b_1,\\ x_2 &= \frac{1}{1\cdot 3}x_1 + 0\cdot x_2 + \frac{1}{1\cdot 3}x_3 + \frac{1}{3\cdot 5}x_4 + \ldots + b_2,\\ x_3 &= \frac{1}{3\cdot 5}x_1 + \frac{1}{1\cdot 3}x_2 + 0\cdot x_3 + \frac{1}{1\cdot 3}x_4 + \ldots + b_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

Эта система уравнений будет регулярной, но не вполне регулярной. В самом деле, в данном случае имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{(2i+1-2k)(2i-1-2k)} + \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1-2k)(2i-1-2k)} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2i-3)(2i-1)} + \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2i-1}\right) + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4i-2}.$$

Поэтому в данном случае

$$\rho_i = \frac{1}{4i-2},$$

$\rho_i > 0$, но, очевидно, нельзя указать такого $\theta > 0$, что $\rho_i \geqslant \theta$. На основании теоремы Iа можем сделать заключение, что система уравнений (33) наверное имеет решение и метод последовательных приближений к ней применим, если для свободных членов ее выполнено условие

$$|b_i| \leqslant \frac{K}{4i-2}. \tag{34}$$

Последнее условие равносильно тому, что $|b_i| \leqslant \frac{K_1}{i}$, т. е. свободные члены порядка не ниже $\frac{1}{i}$: $|b_i| = O\left(\frac{1}{i}\right)$.

Далее, для того чтобы установить единственность ограниченного решения для системы (33), нужно установить, что система типа (28), составленная для данного случая, имеет главное решение, ограниченное снизу $X_i^* \geqslant \alpha > 0$.

Последняя система имеет те же коэффициенты, что и (33), и свободные члены, равные $\rho_i = \frac{1}{4i-2}$ (мы полагаем $K=1$, что несущественно), так что

она принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{1\cdot 3} X_2 + \frac{1}{3\cdot 5} X_3 + \frac{1}{5\cdot 7} X_4 + \ldots + \frac{1}{2}, \\ X_2 &= \frac{1}{1\cdot 3} X_1 + \frac{1}{1\cdot 3} X_3 + \frac{1}{3\cdot 5} X_4 + \ldots + \frac{1}{6}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_i &= \frac{1}{(2i-1)(2i-3)} X_1 + \frac{1}{(2i-3)(2i-5)} X_2 + \ldots + \frac{1}{1\cdot 3} X_{i-1} + \\ &\quad + \frac{1}{1\cdot 3} X_{i+1} + \frac{1}{3\cdot 5} X_{i+2} + \ldots + \frac{1}{4i-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Мы покажем, что $X_i^* \geqslant \frac{1}{2}$. Для этого проведем непосредственную оценку последовательных приближений.

Отправляясь от значений $X_i^{(0)} = 0$, для первого приближения имеем

$$X_i^{(1)} = \frac{1}{4i-2}.$$

Покажем, что для любого n-го приближения справедливо неравенство

$$X_i^{(n)} \geqslant \frac{n}{4i-4+2n}. \tag{36}$$

Оно верно при $n=1$. Покажем, что оно остается справедливым при переходе от n к $n+1$. Действительно, на основании i-го уравнения системы (35) и неравенств (36), имеем:

$$\begin{aligned} X_i^{(n+1)} &= \frac{1}{(2i-1)(2i-3)} X_1^{(n)} + \frac{1}{(2i-3)(2i-5)} X_2^{(n)} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 3} X_{i-1}^{(n)} + \\ &\quad + \frac{1}{1\cdot 3} X_{i+1}^{(n)} + \ldots + \frac{1}{4i-2} \geqslant \frac{1}{(2i-1)(2i-3)} \frac{n}{2n} + \\ &\quad + \frac{1}{(2i-3)(2i-5)} \frac{n}{2n+4} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 3} \frac{n}{4(i-1)-4+2n} + \\ &\quad + \frac{1}{1\cdot 3} \frac{n}{4(i-1)+4+2n} + \ldots + \frac{1}{4i-2} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{1\cdot 3}\left(\frac{n}{4(i-1)+2n+4} + \frac{n}{4(i-1)+2n-4}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{n}{4(i-1)+2n+8} + \frac{n}{4(i-1)+2n-8}\right) + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{1}{(2i-3)(2i-1)}\left(\frac{n}{4(i-1)+2n+4(i-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{4(i-1)+2n-4(i-1)}\right) + \frac{1}{4i-2}. \end{aligned}$$

Далее, ввиду вогнутости функции $\frac{n}{4(i-1)+2n+x}$ имеем неравенство:

$$\frac{n}{4(i-1)+2n-j} + \frac{n}{4(i-1)+2n+j} > \frac{2n}{4(i-1)+2n}.$$

Воспользовавшись им, можем предыдущей оценке придать следующий вид:

$$X_i^{(n+1)} > \frac{2n}{4(i-1)+2n}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2i-3)(2i-1)}\right)+\frac{1}{4i-2}=$$
$$=\frac{2n}{4i-4+2n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4i-2}\right)+\frac{1}{4i-2}=\frac{1}{4i-2}+\frac{n(4i-4)}{(4i-4+2n)(4i-2)}>$$
$$>\frac{1}{4i-2}+\frac{n(4i-4)}{(4i-2)(4i-2+2n)}=\frac{n+1}{4i-4+2(n+1)},$$

и неравенство (36) установлено. Переходя в нем к пределу при $n\to\infty$, найдем:

$$X_i^* = \lim_{n\to\infty} X_i^{(n)} \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{n}{4i-4+2n}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда на основании теоремы IIa следует, что ограниченное решение системы (33) единственно. Итак, мы показали, что при свободных членах порядка не ниже $\frac{1}{i}$ система (33) имеет ограниченное решение и притом единственное.

4. Приближенное решение регулярных систем. Мы покажем теперь, каким образом могут быть найдены с помощью решения конечных систем приближения с недостатком и с избытком для решений регулярной, бесконечной системы.

Рассмотрим регулярную систему, удовлетворяющую условию (27). Предположим сначала, что $c_{i,k}\geqslant 0$ и $b_i\geqslant 0$. В этом случае приближения с недостатком для неизвестных дают решения $\overset{N}{x}_i$ конечной системы (21). Действительно, те же числа $\overset{N}{x}_i$ являются решениями бесконечной системы (23), которая, очевидно, мажорируется системой (2), а потому для их главных решений имеем $\overset{N}{x}_i \leqslant x_i^*$.

Нам удобнее будет здесь обозначать приближение с недостатком через $\tilde{x}_i$ (опуская N), так что $\tilde{x}_i = \overset{N}{x}_i \leqslant x_i^*$. Для получения приближений с избытком рассуждаем так. Мы получили бы точные значения для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_N$, если бы в первые N уравнений системы (2) подставили вместо $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ их значения и решили бы затем получившуюся систему N уравнений с N неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \ldots + c_{1,N}x_N + b_1 + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{1,k}x_k^*,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_N &= c_{N,1}x_1 + c_{N,2}x_2 + \ldots + c_{N,N}x_N + b_N + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{N,k}x_k^*. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Однако мы не знаем точных значений неизвестных $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$, входящих в свободные члены системы уравнений (37), но мы знаем, что они все не превосходят K; поэтому, заменяя числа x_k^* $(k = N+1,$

$N+2, \ldots$) на K в системе (37), мы получим конечную (регулярную) систему уравнений, мажорирующую ее и потому имеющую решения, не меньшие чем числа $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$.

Итак, если через $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N$ обозначить решения системы

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \ldots + c_{1,N}x_N + b_1 + K \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} c_{1,k}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N = c_{N,1}x_1 + c_{N,2}x_2 + \ldots + c_{N,N}x_N + b_N + K \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} c_{N,k}, \end{array}\right\} \quad (38)$$

то имеем $\bar{x}_i \geqslant x_i^*$. Таким образом, для $i = 1, 2, \ldots, N$

$$\tilde{x}_i \leqslant x_i^* \leqslant \bar{x}_i. \quad (39)$$

Если же положить $\tilde{x}_i = 0$ и $\bar{x}_i = K$ для $i > N$, то неравенство (39) будет справедливо для всех без исключения значений i.

Перейдем теперь к вопросу о том, что произойдет с этими приближениями при $N \to \infty$. Относительно приближений с недостатком $\tilde{x}_i = \overset{N}{x}_i$ нами уже установлено [см. (22)], что при $N \to \infty$ они сходятся к главным решениям системы:

$$\lim_{N \to \infty} \tilde{x}_i = x_i^*. \quad (40)$$

Относительно приближений с избытком $\bar{x}_i$ ясно, что при увеличении N они не возрастают.

Действительно, если мы рассмотрим систему вида (38) из $N+1$ уравнений, то для группы первых N уравнений этой системы относительно неизвестных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N$ будет служить мажорантной система (38) из N уравнений, так как вторая получается из первой заменой $\bar{x}_{N+1}$ на заведомо не меньшее число K. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{N \to \infty} \bar{x}_i = x_i.$$

Переходя к пределу в каждом уравнении системы (38), убеждаемся, благодаря тому, что

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{i,k} = 0,$$

что эти пределы x_i удовлетворяют системе уравнений (2). Поэтому, если для системы (2) выполнены условия, обеспечивающие

единственность ограниченного решения (теорема IIa), в частности, если она вполне регулярная, то имеем $x_i = x_i^*$, а потому

$$\lim_{N\to\infty} \bar{x}_i = x_i^*. \tag{41}$$

Мы дали сейчас способ нахождения приближений с недостатком и с избытком, стремящихся к искомым в случае положительных систем (с единственным решением). Укажем теперь подобный же способ для случая систем с коэффициентами и свободными членами произвольного знака.

Для нахождения приближений можно поступить так. Введем обозначение

$$R_N^{(i)} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_{i,k}| \tag{42}$$

и составим систему $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными $\tilde{x}_i$ и $\bar{x}_i$:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\tilde{x}_k + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\bar{x}_k + b_i - R_N^{(i)}K \quad (i=1, 2, \ldots, N), \\ \bar{x}_i &= \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\bar{x}_k + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\tilde{x}_k + b_i + R_N^{(i)}K \quad (i=1, 2, \ldots, N), \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

где сумма $\sum'$ распространена в каждой строке на те k, для которых $c_{i,k} > 0$, а $\sum''$ на те, для которых $c_{i,k} < 0$. Заметим прежде всего, что эта система имеет определенное решение. Действительно, вычитая из вторых равенств первые, а также складывая соответственные равенства, получим две независимые системы уравнений относительно неизвестных $\bar{x}_i - \tilde{x}_i$ и $\bar{x}_i + \tilde{x}_i$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i - \tilde{x}_i &= \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}(\bar{x}_k - \tilde{x}_k) + \sum_{k=1}^{N}{}'' (-c_{i,k})(\bar{x}_k - \tilde{x}_k) + 2R_N^{(i)}K = \\ &= \sum_{k=1}^{N} |c_{i,k}|(\bar{x}_k - \tilde{x}_k) + 2R_N^{(i)}K \quad (i=1, 2, \ldots, N) \end{aligned} \tag{44}$$

$$\bar{x}_i + \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}(\bar{x}_k + \tilde{x}_k) + 2b_i \quad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{45}$$

Обе системы (44) и (45) вполне регулярны, а потому (см. замечание 2 к теореме IIa) единственным образом определяют $\bar{x}_i - \tilde{x}_i$ и $\bar{x}_i + \tilde{x}_i$, а тем самым $\bar{x}_i$ и $\tilde{x}_i$. Покажем, что так определенные

числа $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N$ представляют приближения с недостатком к искомым $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$, а $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_N$ — приближения с избытком. Для доказательства этого будем решать систему (43) по способу последовательных приближений, именно следующим образом: за начальные значения примем $\tilde{x}_i^{(0)} = -K$, $\overline{x}_i^{(0)} = K$; подставив эти значения в правую часть (43), найдем $\tilde{x}_i^{(1)}$ и $\overline{x}_i^{(1)}$ и т. д. Решение системы (43) по этому способу равносильно тому, чтобы независимо одну от другой решать методом последовательных приближений системы (44) и (45), начиная с значений $\overline{x}_i^{(0)} - \tilde{x}_i^{(0)} = 2K$; $\overline{x}_i^{(0)} + \tilde{x}_i^{(0)} = 0$, поэтому при $l \to \infty$ будет $\overline{x}_i^{(l)} \to \overline{x}_i$; $\tilde{x}_i^{(l)} \to \tilde{x}_i$. Для начальных значений имеем, очевидно, $\tilde{x}_i^{(0)} \leqslant x_i^* \leqslant \overline{x}_i^{(0)}$.

Пусть уже установлено, что $\tilde{x}_i^{(l)} \leqslant x_i^* \leqslant \overline{x}_i^{(l)}$. Покажем, что и $\tilde{x}_i^{(l+1)} \leqslant x_i^* \leqslant \overline{x}_i^{(l+1)}$. Действительно, например, для $\tilde{x}_i^{(l+1)}$ из (43) имеем

$$\tilde{x}_i^{(l+1)} = \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\tilde{x}_k^{(l)} + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\overline{x}_k^{(l)} + b_i - R_N^{(i)}K \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}x_k^* + b_i - K \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k^* + b_i = x_i^*.$$

Итак, для всех l установлено неравенство $\tilde{x}_i^{(l)} \leqslant x_i^* \leqslant \overline{x}_i^{(l)}$. Тогда, переходя к пределу, заключаем, что выполняется неравенство

$$\tilde{x}_i \leqslant x_i^* \leqslant \overline{x}_i. \tag{39}$$

То обстоятельство, что приближения $\tilde{x}_i$ и $\overline{x}_i$ действительно сходятся к главному решению, опять может быть обнаружено при дополнительном предположении, что для системы (2) выполнены условия теоремы IIa. Действительно, как легко убедиться, сопоставляя последовательные приближения решений систем (43) для разных N, с возрастанием N числа $\tilde{x}_i$ не убывают, а $\overline{x}_i$ не возрастают, поэтому при $N \to \infty$ они стремятся к определенным пределам. Вследствие этого существуют пределы

$$\lim_{N \to \infty} (\overline{x}_i - \tilde{x}_i) = z_i.$$

Переходя в системе (44) к пределу при $N \to \infty$, убеждаемся в том, что числа z_i удовлетворяют однородной системе уравнений

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| z_k \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

В таком случае $z_i \doteq 0$. В самом деле, раз условия теоремы IIa выполнены для системы (2), то они выполнены и для приведенной выше системы, определяющей z_i. Применяя эту теорему, убеждаемся

в том, что всякое ограниченное решение этой системы должно совпадать с главным ее решением, очевидным образом равным нулю. Итак, $z_i = 0$; $\lim\limits_{N\to\infty} (\bar{x}_i - \tilde{x}_i) = 0$ и благодаря неравенствам (39)

$$\lim_{N\to\infty} \bar{x}_i = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}_i = x_i^*,$$

что и требовалось установить[1]).

В качестве примера найдем приближения для решений системы (33) со свободными членами $b_1 = 1$; $b_2 = 0$; $b_3 = 0; \ldots$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{1\cdot 3} x_2 + \frac{1}{3\cdot 5} x_3 + \ldots + 1,\\
x_2 &= \frac{1}{1\cdot 3} x_1 + \frac{1}{1\cdot 3} x_3 + \ldots,\\
x_3 &= \frac{1}{3\cdot 5} x_1 + \frac{1}{1\cdot 3} x_2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Системы для определения приближений с избытком и с недостатком в данном случае (при $N = 5$) имеют вид [ср. (21) и (38), $K = 2$]:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \frac{1}{3}\tilde{x}_2 + \frac{1}{15}\tilde{x}_3 + \frac{1}{35}\tilde{x}_4 + \frac{1}{63}\tilde{x}_5 + 1, & \bar{x}_1 &= \frac{1}{3}\bar{x}_2 + \frac{1}{15}\bar{x}_3 + \frac{1}{35}\bar{x}_4 + \frac{1}{63}\bar{x}_5 + 1 + \frac{1}{9},\\
\tilde{x}_2 &= \frac{1}{3}\tilde{x}_1 + \frac{1}{3}\tilde{x}_3 + \frac{1}{15}\tilde{x}_4 + \frac{1}{35}\tilde{x}_5, & \bar{x}_2 &= \frac{1}{3}\bar{x}_1 + \frac{1}{3}\bar{x}_3 + \frac{1}{15}\bar{x}_4 + \frac{1}{35}\bar{x}_5 + \frac{1}{7},\\
\tilde{x}_3 &= \frac{1}{15}\tilde{x}_1 + \frac{1}{3}\tilde{x}_2 + \frac{1}{3}\tilde{x}_4 + \frac{1}{15}\tilde{x}_5, & \bar{x}_3 &= \frac{1}{15}\bar{x}_1 + \frac{1}{3}\bar{x}_2 + \frac{1}{3}\bar{x}_4 + \frac{1}{15}\bar{x}_5 + \frac{1}{5},\\
\tilde{x}_4 &= \frac{1}{35}\tilde{x}_1 + \frac{1}{15}\tilde{x}_2 + \frac{1}{3}\tilde{x}_3 + \frac{1}{3}\tilde{x}_5, & \bar{x}_4 &= \frac{1}{35}\bar{x}_1 + \frac{1}{15}\bar{x}_2 + \frac{1}{3}\bar{x}_3 + \frac{1}{3}\bar{x}_5 + \frac{1}{3},\\
\tilde{x}_5 &= \frac{1}{63}\tilde{x}_1 + \frac{1}{35}\tilde{x}_2 + \frac{1}{15}\tilde{x}_3 + \frac{1}{3}\tilde{x}_4; & \bar{x}_5 &= \frac{1}{63}\bar{x}_1 + \frac{1}{35}\bar{x}_2 + \frac{1}{15}\bar{x}_3 + \frac{1}{3}\bar{x}_4 + 1.
\end{aligned}$$

Решая эти системы, получаем:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_1 = 1{,}2112; \quad \tilde{x}_2 = 0{,}5383; \quad \tilde{x}_3 = 0{,}3461; \quad \tilde{x}_4 = 0{,}2307; \quad \tilde{x}_5 = 0{,}1346;\\
&\bar{x}_1 = 1{,}7034; \quad \bar{x}_2 = 1{,}3040; \quad \bar{x}_3 = 1{,}3461; \quad \bar{x}_4 = 1{,}4651; \quad \bar{x}_5 = 1{,}6424.
\end{aligned}$$

Таким образом, находим следующие границы для неизвестных:

$$\begin{aligned}
&1{,}2112 < x_1 < 1{,}7034; \quad 0{,}5383 < x_2 < 1{,}3040; \quad 0{,}3461 < x_3 < 1{,}3461;\\
&0{,}2307 < x_4 < 1{,}4651; \quad 0{,}1346 < x_5 < 1{,}6424; \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 2 \ (i = 6, 7 \ldots).
\end{aligned}$$

Границы для неизвестных при таком приближении получились лишь весьма грубые (они несколько уточнены ниже, в n° 5).

Заметим, что для практического приближенного решения бесконечной системы и нахождения обоих приближений к искомым оказывается выгоднее (при значительном N) не решать точно систему (43), а решать ее по способу

---

[1]) Вопрос об априорной оценке разности $\bar{x}_i - \tilde{x}_i$ рассматривался П. С. Бондаренко [3].

последовательных приближений так, чтобы получить для $\tilde{x}_i$ приближение с недостатком, а для $\bar{x}_i$ с избытком. При этом выгодно по ходу вычислений одновременно постепенно увеличивать число N уравнений, включенных в рассмотрение.[1])

5. Лимитанты. Различные обобщения регулярных систем. Прежде всего укажем на введенное Б. М. Кояловичем понятие лимитант — особых выражений, которые позволяют в некоторых случаях оценивать и изучать значения неизвестных для больших i.

Будем предполагать, что у регулярной системы (2), удовлетворяющей условию (27), коэффициенты положительны и что она имеет единственное ограниченное решение, т. е. что главные решения системы (28) суть $X_i^* = K$. Предположим далее, что нам известны значения $x_1^*, x_2^*, \ldots x_p^*$ первых p неизвестных. Подставим эти значения во все уравнения, начиная с $(p+1)$-го. Тогда для определения неизвестных $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots$ получим систему уравнений

$$x_i = \sum_{k=p+1}^{\infty} c_{i,k} x_k + \left(b_i + \sum_{k=1}^{p} c_{i,k} x_i^*\right) \quad (i = p+1, p+2, \ldots). \tag{46}$$

Эта система имеет в качестве мажорантной систему

$$X_i = \sum_{k=p+1}^{\infty} C_{i,k} X_k + \left(K\rho_i + K \sum_{k=1}^{p} C_{i,k}\right) \quad (i = p+1, p+2, \ldots) \tag{47}$$

с главным решением $X_i^* = K (i = p+1, \ldots)$. Сравнивая свободные члены систем (46) и (47), можно указать известные границы, в которых содержатся искомые $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots$ Именно, если отношение этих свободных членов для всех $i = p+1, p+2, \ldots$ заключено в границах h и H:

$$h \leqslant v_i^{(p)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} c_{i,k} x_i^* + b_i}{\sum\limits_{k=1}^{p} C_{i,k} X_k^* + K\rho_i} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} c_{i,k} x_i^* + b_i}{K \sum\limits_{k=1}^{p} C_{i,k} + K\rho_i} \leqslant H, \tag{48}$$

то неизвестные x_i ограниченного решения системы (46) заключены в пределах:

$$hK = hX_i^* \leqslant x_i \leqslant HX_i^* = HK \quad (i = p+1, p+2, \ldots). \tag{49}$$

Действительно, из (46) и (48) ясно, что для неизвестных $x_i - Kh$ и $KH - x_i$ получаются системы с положительными свободными членами; в таком случае эти неизвестные, являющиеся главными и единственными решениями

---

[1]) Подробно изложенное решение другого численного примера имеется в работе Б. М. Кояловича [2]. Некоторые применения к граничным задачам метод бесконечных систем нашел в работах П. С. Бондаренко [2] и И. П. Мацкевича [1]. Многочисленные применения к различным механическим задачам указаны в работах Б. Л. Абрамяна [1—3], Н. Х. Арутюняна [2], Р. С. Минасяна [1, 2], О. М. Сапонджяна [1], а также в ряде других работ, ссылки на которые можно найти в статье М. К. Гаврина и Л. В. Канторовича в книге „Математика в СССР за сорок лет“.

соответствующей системы, также неотрицательны (n° 2, замечание 2 к теореме I):

$$x_i - Kh \geqslant 0;\quad KH - x_i \geqslant 0\ (i = p+1,\ p+2, \ldots)$$

и неравенства (49) установлены. Выражения $v_i^{(p)}$, входящие в (48), Б. М. Коялович называет лимитантами. Он дал следующее интересное применение лимитант. При практическом решении некоторых систем было замечено, что при увеличении i-номера неизвестной отношение $\frac{x_i^*}{X_i^*}$ приближается к некоторому постоянному числу, иначе говоря, x_i^* можно записать в виде

$$x_i^* = (G + \varepsilon_i)\, X_i^*, \tag{50}$$

где G — постоянная и $\varepsilon_i \to 0$. Пользуясь лимитантами, Б. М. Коялович показал, [1]) что это обстоятельство имеет место для регулярных систем, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию, именно следующему:

(а). Все коэффициенты, лежащие по левую сторону диагонали, имеют порядок свободных членов мажорантной системы, т. е. существуют такие два числа l и L, что

$$0 < l \leqslant \frac{c_{i,k}}{K\rho_i} \leqslant L \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, i-1 \\ i = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{51}$$

Таким образом, если система регулярная с единственным ограниченным решением, удовлетворяющая условиям (а) и (27), то при $i \to \infty$ неизвестные имеют определенный конечный предел

$$\lim_{i \to \infty} x_i^*. \tag{52}$$

Чтобы показать применение лимитант, уточним, пользуясь неравенством (49), оценку для неизвестных $x_1^*, x_2^*, \ldots$ в примере, рассмотренном в конце n° 4. Примем в (48) $p = 5$ и заменим при нахождении H неизвестные нам числа $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*$ на найденные выше значения x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Легко проверить, что наибольшее отношение получается при $i = 6$, а потому

$$H' = \frac{\frac{1}{9\cdot 11}\bar{x}_1 + \frac{1}{7\cdot 9}\bar{x}_2 + \frac{1}{5\cdot 7}\bar{x}_3 + \frac{1}{3\cdot 5}\bar{x}_4 + \frac{1}{1\cdot 3}\bar{x}_5 + 0}{2\left(\frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3}\right) + 2\cdot\frac{1}{22}} =$$

$$= \frac{1}{99}\cdot 1{,}7034 + \frac{1}{63}\cdot 1{,}3040 + \frac{1}{35}\cdot 1{,}3461 + \frac{1}{15}\cdot 1{,}4651 + \frac{1}{3}\cdot 1{,}6424 = 0{,}7231.$$

Таким образом, получаем новую оценку для последних неизвестных

$$x_i^* \leqslant \bar{x}_i' = KH' = 2\cdot 0{,}7231 = 1{,}4462 \qquad (i = 6, 7, \ldots),$$

Легко убедиться, что в данном случае $h = 0$, и потому оценки снизу, кроме тривиальной, мы не находим. Полученные значения $\bar{x}_i'$ $(i = 6, 7, \ldots)$

---

[1]) См. Б. М. Коялович [2], гл. IV. Автор рассматривает там систему с двумя сериями неизвестных и делает наряду с (а) некоторое второе предположение, которое в нашем случае является излишним, так же как и последняя часть рассуждения автора, стр. 162—165.

позволяют в свою очередь уточнить найденные выше приближения с избытком для первых пяти неизвестных. Именно значения этих приближений с избытком найдутся из системы, полученной так же, как выше, только с заменой x_i ($i=6, 7\ldots$) не на $K=2$, а на KH'. Поэтому ясно, что вновь найденные приближения с избытком будут равны $\bar{x}'_i=\tilde{x}_i+H'(\bar{x}_i-\tilde{x}_i)$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$). С помощью так найденных значений $\bar{x}'_i$ можно вновь уменьшить значение H и перейти от H' к $H''<H'$ и т. д. При этом два последовательных значения H будут связаны равенством:

$$H^{(k+1)}=\frac{1}{9\cdot 11}[\tilde{x}_1+(\bar{x}_1-\tilde{x}_1)H^{(k)}]+\frac{1}{7\cdot 9}[\tilde{x}_2+(\bar{x}_2-\tilde{x}_2)H^{(k)}]+$$
$$+\frac{1}{5\cdot 7}[\tilde{x}_3+(\bar{x}_3-\tilde{x}_3)H^{(k)}]+\frac{1}{3\cdot 5}[\tilde{x}_4+(\bar{x}_4-\tilde{x}_4)H^{(k)}]+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 3}[\tilde{x}_5+(\bar{x}_5-\tilde{x}_5)H^{(k)}].$$

Число $H=\lim\limits_{k\to\infty}H^{(k)}$ определится из уравнения, которое получится из предыдущего равенства, если заменить в нем $H^{(k)}$ и $H^{(k+1)}$ на H. Решив это уравнение, найдем $H=0{,}4923$. Отсюда по формулам $\bar{x}_i^{(0)}=\tilde{x}_i+H(\bar{x}_i-\tilde{x}_i)$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) получаем новые значения для приближений с избытком. Окончательно приходим к следующим границам для неизвестных:

$$1{,}211\leqslant x_1\leqslant 1{,}331;\quad 0{,}538\leqslant x_2\leqslant 0{,}726;\quad 0{,}346\leqslant x_3\leqslant 0{,}592;$$
$$0{,}231\leqslant x_4\leqslant 0{,}534;\quad 0{,}135\leqslant x_5\leqslant 0{,}506;\quad 0\leqslant x_i\leqslant 0{,}492\ (i=6, 7\ldots).$$

Укажем теперь на некоторые виды систем, теория которых приводится к теории регулярных систем или на которые эта теория обобщается.

I. Иногда приходится рассматривать совокупность двух бесконечных систем

$$\left.\begin{aligned} x_i&=\sum_{k=1}^{\infty}c_{i,k}x_k+b_i\quad (i=1, 2, \ldots),\\ y_i&=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{i,k}y_k+\beta_i\quad (i=1, 2, \ldots)\end{aligned}\right\}\qquad (53)$$

с двумя рядами неизвестных $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ На такие системы, очевидно, переносятся результаты пп° 2—4, так как, вводя новые неизвестные z, полагая

$$z_{2i-1}=x_i;\quad z_{2i}=y_i\quad (i=1, 2, \ldots),$$

получим для них один ряд уравнений.

II. Можно рассматривать бесконечные в обе стороны системы уравнений с неизвестными x_i ($i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), именно системы вида

$$x_i=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_{i,k}x_k+b_i\quad (i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).\qquad (54)$$

На эти системы также переносится теория регулярных систем, в частности, если

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{i,k}| \leqslant 1-\theta, \ \theta>0, \ (i=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots),$$

то для системы (54) остается верным все сказанное выше о вполне регулярных системах.

III. Во многих случаях система, не являющаяся регулярной, приводится к виду регулярной с помощью некоторых преобразований, например с помощью подстановки $z_i=\alpha_i x_i$ или с помощью сложения и вычитания равенств системы.

IV. Упомянем еще о квазирегулярных системах. Мы будем называть так системы, в которых условие регулярности выполнено лишь во всех строках, начиная с некоторой, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1 \ (i=N+1, \ N+2, \ldots) \tag{55}$$

и, кроме того,

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < +\infty \ (i=1, \ 2, \ldots N), \\ &|b_i| \leqslant K\rho_i = K\Big(1-\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_{i,k}|\Big) \ (i=N+1 \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Вопрос о существовании решения такой системы сводится к вопросу о существовании решения конечной системы. Действительно, рассмотрим регулярную систему уравнений

$$x_i = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{i,k}x_k + \Big(b_i + \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}x_i\Big) \ (i=N+1, \ N+2, \ldots). \tag{57}$$

Подобная система со свободными членами b_i имеет ограниченное решение $|\xi_i| \leqslant K$; при свободных членах $c_{i,k}$ $(k=1, \ 2, \ldots, \ N)$ она также имеет ограниченные решения $a_i^{(k)}$, $(|a_i^{(k)}| \leqslant 1$, так как $|c_{i,k}| \leqslant 1 - \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |c_{i,k}|)$, в силу (55). Поэтому окончательно решение системы (57) выразится так:

$$x_i = a_i^{(1)}x_1 + a_i^{(2)}x_2 + \ldots + a_i^{(N)}x_N + \xi_i \ (i=N+1, \ N+2, \ldots). \tag{58}$$

Подставляя эти значения в уравнения

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i \ (i=1, \ 2, \ldots, \ N)$$

[подстановка имеет смысл в силу первого из условий (56)], получим систему N уравнений с N неизвестными для определения $x_1, \ x_2, \ldots, \ x_N$. Если

эта конечная система имеет решение, то с помощью равенств (58) найдем решение первоначальной системы. Если решение этой конечной системы единственно и выполнено условие для единственности решения регулярной системы (57), то и решение первоначальной системы единственно.

V. Наконец, теория, проведенная выше для линейных систем, в значительной мере распространяется на системы нелинейные. В частности, полностью переносятся на этот случай теоремы о сравнении систем. [1]) Рассмотрим бесконечную систему нелинейных уравнений.

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots) = b^{(i)} + \sum_{k_1=1}^{\infty} c_{k_1}^{(i)} x_{k_1} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} c_{k_1, k_2}^{(i)} x_{k_1} x_{k_2} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_j=1}^{\infty} c_{k_1, k_2, \ldots, k_j}^{(i)} x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_j} + \ldots (i = 1, 2, \ldots) \tag{59}$$

и мажорантную для нее систему, т. е. систему того же вида

$$X_i = F_i(X_1, X_2, \ldots) = B^{(i)} + \sum_{k_1=1}^{\infty} C_{k_1}^{(i)} X_{k_1} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} C_{k_1, k_2}^{(i)} X_{k_1} X_{k_2} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_j=1}^{\infty} C_{k_1, k_2, \ldots, k_j}^{(i)} X_{k_1} X_{k_2} \ldots X_{k_j} + \ldots (i = 1, 2, \ldots), \tag{60}$$

где функции F_i являются мажорантными для f_i, именно всегда

$$|b^{(i)}| \leqslant B^{(i)}; \quad |c_{k_1, k_2, \ldots, k_j}^{(i)}| \leqslant C_{k_1, k_2, \ldots, k_j}^{(i)}. \tag{61}$$

Можно показать тогда, что если мажорантная система имеет неотрицательное решение $X'_i \geqslant 0$, то данная система имеет решение x_i^* (главное), удовлетворяющее условию $|x_i^*| \leqslant X'_i$. Далее, если X_i^* есть главное решение системы (60), то решение системы (59), удовлетворяющее условию $|x_i| \leqslant X_i^*$, единственно. Наконец, главное решение системы (59), наряду с методом последовательных приближений, может быть получено с помощью метода редукции. Именно, если через $\overset{N}{x}_i$ обозначить главное решение конечной системы уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_1, \ldots, k_j=1}^{N} c_{k_1, \ldots, k_j}^{(i)} x_{k_1} \ldots x_{k_j} + b^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots N), \tag{62}$$

то предел этих решений дает главное решение системы (59):

$$\lim_{N \to \infty} \overset{N}{x}_i = x_i^*.$$

На этом мы заканчиваем теорию регулярных систем. Мы уделили им столь большое место ввиду важности их для приложений. В следующем

[1]) См. работы Пелле [1] (для случая конечных систем) и Л. В. Канторовича [11].

номере мы даем обзор других исследований, относящихся к бесконечным системам уравнений; там, несмотря на теоретическое значение этих исследований, мы ограничимся лишь изложением основных результатов без доказательств, за которыми отсылаем интересующихся к специальным руководствам В. Ф. Кагана [1] и Рисса [1].

6. Краткий обзор других исследований, относящихся к бесконечным системам. I. *Бесконечные определители.* Впервые бесконечные определители были применены в 1877 г. Хиллом при интегрировании одного дифференциального уравнения, получающегося при исследовании движения луны. Вскоре, в связи с этим, Пуанкаре развил начала теории таких определителей. После того систематическое их исследование было проведено в ряде работ Коха.

Рассмотрим бесконечную матрицу:

$$\left\| \begin{matrix} 1+c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots \\ c_{12} & 1+c_{22} & c_{23} & \ldots \\ c_{31} & c_{32} & 1+c_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| \tag{63}$$

и предположим, что двойной ряд $\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |c_{i,k}|$ сходится; тогда можно показать, что определитель из n^2 элементов этой матрицы Δ_n при $n \to \infty$ стремится к пределу; этот предел Δ называют бесконечным определителем матрицы (63). При сделанном предположении его называют нормальным определителем.

Если мы заменим далее в матрице (63) k-й столбец на ряд ограниченных чисел $b_1, b_2, \ldots$, то опять будет существовать предел конечных определителей $\Delta_n^{(k)}$ при $n \to \infty$, который обозначим $\Delta^{(k)}$.

При введении таких определителей для системы уравнений, коэффициенты которых составляют матрицу (63):

$$x_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k = b_i, \tag{64}$$

может быть развита теория решения, аналогичная теории решения конечных систем с помощью определителей, в частности могут быть доказаны теоремы, аналогичные теоремам Крамера и Руше.

Можно доказать именно следующие предложения:

1) Если определить системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное ограниченное решение, которое дается равенствами

$$x_i = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta}. \tag{65}$$

2) Если определитель $\Delta = 0$, то однородная система, получаемая из (64), имеет отличные от нуля решения, при этом она имеет r независимых решений, где r есть ранг матрицы (63) (число всегда конечное); таким образом, в частности в однородной системе можно зафиксировать r неизвестных так, чтобы она стала определенной.

3) Если $\Delta = 0$, то неоднородная система (64), вообще говоря, не имеет решения. Для того чтобы она имела решение, свободные члены b_i системы должны удовлетворять некоторым определенным соотношениям (числом r). Если эти соотношения выполнены, то решение существует, но не единственно.

Кох показал, что эти результаты остаются верными для гораздо более широких классов определителей, чем нормальные. Наиболее интересное обобщение состоит в том, что требование сходимости ряда $\sum_{i,k=1}^{\infty} |c_{i,k}|$ можно заменить требованием сходимости рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_{i,i}|, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{i,k}^2 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2,$$

тогда и решение будет удовлетворять условию: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится. Также можно вместо упомянутых выше условий потребовать, например, сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{i,i}|$ и того, чтобы $|c_{i,k}| \leqslant \alpha_i$, где ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ сходится.

II. *Системы с вполне непрерывной формой.*[1]) В связи с построением теории интегральных уравнений Гильбертом была развита специальная теория бесконечных систем уравнений.

Рассмотрим наряду с системой (64) билинейную форму

$$K(x, y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{i,k} x_i y_k. \tag{66}$$

Эта форма является вполне непрерывной, если выполнено условие

$$\left| \sum_{i,k=1}^{n} c_{i,k} x_i y_k - \sum_{i,k=1}^{m} c_{i,k} x_i y_k \right| < \varepsilon \text{ при } n, m \geqslant N$$

равномерно относительно x_i и y_k, лежащих в области

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \leqslant 1.$$

Достаточным условием для этого является, например, сходимость ряда $\sum_{i,k=1}^{\infty} c_{i,k}^2$, но можно указать и другие более слабые достаточные условия, которые имеют, однако, довольно сложный характер.

Для систем (64) с вполне непрерывной формой (66) Гильбертом было доказано следующее предложение, обобщающее подобное же предложение для конечных систем: при сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ либо данная система имеет единственное определенное решение, удовлетворяющее условию $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$

[1]) Рисс [1], гл. IV—V, Гильберт [1].

сходится, либо имеет решение, отличное от нуля, однородная система, соответствующая системе (64). Также распространяются и остальные теоремы о конечных системах. [1])

III. *Более общие системы.* Шмидт рассматривал [2]) системы вида (64) при единственном условии $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}^2$ сходится. Для таких систем им было дано необходимое и достаточное условие существования решения. Так, например, условие того, чтобы однородная система (64) не имела решения, отличного от нуля со сходящимся рядом $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, есть обращение в нуль следующего выражения:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left\{ \begin{vmatrix} s_{11} & \dots & s_{1\alpha} & c_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1} & \dots & s_{\alpha\alpha} & c_{\alpha k} \\ c_{1k} & \dots & c_{\alpha k} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s_{11} & \dots & s_{1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\alpha 1} & \dots & s_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \right\}, \text{ где } s_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha k} c_{\beta k}.$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Аналогичного вида условие можно дать и для неоднородной системы а также подобного же вида выражениями задать и самые неизвестные.

Впрочем эти выражения мало алгорифмичны и потому вряд ли могут быть использованы для практического решения.

§ 3. Решение граничных задач с помощью неортогональных рядов

1. Общие принципы. В § 1 мы рассмотрели решение граничных задач по методу Фурье с помощью рядов по фундаментальным функциям, т. е. рядов по функциям, которые образуют на контуре ортогональную систему функций (в случае задачи Дирихле; вообще же образуют ортогональную систему контурные операторы над ними). Однако разыскание такой системы функций представляет вообще большие затруднения, поэтому мы рассмотрим здесь способы нахождения решения в виде ряда, составленного из произвольных решений, не образующих на контуре ортогональной системы. Здесь находят применение бесконечные системы уравнений.

---

[1]) Вопрос о применимости метода редукции и о приближенном решении систем с вполне непрерывной формой и систем, удовлетворяющих условию Коха, рассматривается в работе Л. В. Канторовича [18], гл. II, § 3. См. также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XIV, § 3.

[2]) Шмидт [1]. Некоторые методы, указанные Шмидтом, а также Кётерицшем [1], могут оказаться полезными и для численного решения бесконечных систем. См. диссертацию Гольдшмидта [1].

Итак, пусть требуется найти решение однородного уравнения эллиптического типа:

$$M(u)=0 \tag{1}$$

при граничном условии

$$P(u)=f(s) \text{ на контуре } L, \tag{2}$$

где P — линейная однородная операция над u.

Пусть нам известен некоторый бесконечный ряд решений уравнения (1): $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, ... Операция $P(u)$ на контуре над этими решениями дает некоторую систему функций дуги

$$P[u_n(x, y)]=\varphi_n(s) \text{ на } L \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Если бы мы могли разложить данную функцию $f(s)$ в ряд по функциям $\varphi_n(s)$

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(s), \tag{4}$$

то смогли бы написать искомое решение в виде ряда[1])

$$u(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y). \tag{5}$$

Таким образом, перед нами встает задача о разложении произвольной функции $f(s)$ по некоторой системе неортогональных функций. Рассмотрим в следующих номерах способы решения этой задачи, а также примеры решения различных граничных задач с помощью таких выражений.

2. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным функциям с помощью ортогонализации. Пусть дана бесконечная система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots, \tag{6}$$

определенных и непрерывных в промежутке (a, b).

---

[1]) Заметим, что для этого нет необходимости даже в разложении $f(s)$ в ряд по самим $\varphi_n(s)$, а достаточно разложить ее в ряд по их линейным комбинациям, т. е. написать $f(s)$ в виде

$$f(s)=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{n_j} c_n^j\varphi_n(s)\right],$$

так как тогда аналогично можно составить и $u(x, y)$:

$$u(x, y)=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{nj} c_n^j u_n(x, y)\right].$$

Прежде всего мы можем из данной системы функций исключить те, которые представляют линейные комбинации предшествующих, так как они по существу не обогащают систему. Проведем теперь ортогонализацию системы (6), а именно построим систему функций

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots \tag{7}$$

ортогональных и нормированных, притом такую, что каждая функция системы (7) представляет некоторую линейную комбинацию функций системы (6), точнее $\psi_n(x)$ имеет вид

$$\psi_n(x) = a_1^{(n)}\varphi_1(x) + a_2^{(n)}\varphi_2(x) + \ldots + a_n^{(n)}\varphi_n(x). \tag{8}$$

Проведем эту ортогонализацию последовательно. Первая функция $\psi_1(x)$ должна иметь вид $\psi_1(x) = c\varphi_1(x)$. Подбирая постоянную c из условия $\int\limits_a^b \psi_1^2\,dx = 1$, найдем

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int\limits_a^b \varphi_1^2(x)\,dx}}.$$

Пусть первые функции $\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x)$ определены. Функция $\psi_{n+1}(x)$ должна быть составлена линейно из них и функции $\varphi_{n+1}(x)$, т. е. иметь вид:

$$\psi_{n+1}(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots + c_n\psi_n(x) + c\varphi_{n+1}(x). \tag{9}$$

Постоянные c_i определяем из условия ортогональности $\psi_{n+1}(x)$ к $\psi_1(x),\ \ldots,\ \psi_n(x)$, именно, умножая (9) на $\psi_i(x)$ и интегрируя, получим, пользуясь ортогональностью и нормированностью $\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x)$:

$$c_i + c\int\limits_a^b \varphi_{n+1}(x)\,\psi_i(x)\,dx = 0.$$

Определяя отсюда c_i, подставляя в (9) и найдя еще постоянную c из условия $\int\limits_a^b \psi_{n+1}^2\,dx = 1$, в результате получим

$$\psi_{n+1}(x) = \frac{\varphi_{n+1}(x) - \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int\limits_a^b \varphi_{n+1}\psi_i\,dx\right)\psi_i(x)}{\left\{\int\limits_a^b\left[\varphi_{n+1}(x) - \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int\limits_a^b \varphi_{n+1}\psi_i\,dx\right)\psi_i(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

Заметим, что знаменатель здесь не нуль, благодаря линейной независимости функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}(x)$. С помощью этого равенства можно последовательно находить функции $\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots$

Заметим, что, пользуясь определителями, можно было бы прямо написать выражение n-й функции $\psi_n(x)$:

$$\psi_n(x)=\frac{\begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_1^2\,dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx \ldots & \int_a^b \varphi_1\varphi_{n-1}dx & \varphi_1(x) \\ \int_a^b \varphi_2\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_2^2\,dx \ldots & \int_a^b \varphi_2\varphi_{n-1}dx & \varphi_2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b \varphi_n\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_n\varphi_2 dx \ldots & \int_a^b \varphi_n\varphi_{n-1}dx & \varphi_n(x) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\,\Delta_n}}, \qquad (10')$$

где Δ_n — так называемый определитель Грамма функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_1^2\,dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_2\,dx \ldots & \int_a^b \varphi_1\varphi_n\,dx \\ \int_a^b \varphi_2\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_2^2\,dx \ldots & \int_a^b \varphi_2\varphi_n\,dx \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b \varphi_n\varphi_1\,dx & \int_a^b \varphi_n\varphi_2\,dx \ldots & \int_a^b \varphi_n^2\,dx \end{vmatrix}.$$

Этот определитель наверное отличен от нуля, если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы.

В том, что функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$, определенные равенством (10′), ортогональны и нормированы, можно убедиться непосредственной проверкой.

Подобно тому, как мы провели ортогонализацию для функций, заданных на интервале, может быть проведена ортогонализация и для функций, заданных на контуре L, нужно только повсюду вместо $\int_a^b$ взять $\int_L$.

После того как построена ортогональная система, можно для всякой функции $f(s)$ написать ее разложение в ряд по функциям этой системы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(x); \quad A_n=\int_a^b f(x)\,\psi_n(x)\,dx. \qquad (11)$$

Отметим, что, конечно, нельзя гарантировать вообще сходимость ряда в правой части равенства (11), поэтому правильнее говорить, что этот ряд соответствует функции $f(x)$, а не равен $f(x)$. Знание ряда по функциям $\psi_n(x)$, соответствующего функции $f(x)$, позволяет, так как ψ_n есть линейная комбинация (8) функций φ_i, написать ряд по линейным комбинациям функций φ_i, соответствующий $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [a_1^{(n)}\varphi_1(x) + a_2^{(n)}\varphi_2(x) + \ldots + a_n^{(n)}\varphi_n(x)]. \qquad (12)$$

Для вопроса о сходимости рядов (11) и (12) имеет существенное значение так называемая полнота системы функций $\{\varphi_n(x)\}$. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной*, если не существует функции $\Phi(x)$ с $\int_a^b |\Phi(x)|^2 dx > 0$, ортогональной одновременно ко всем функциям $\varphi_n(x)$, т. е. такой, что

$$\int_a^b \varphi_n(x)\Phi(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (13)$$

Отметим следующее, почти очевидное свойство полных систем: две непрерывные функции, имеющие все коэффициенты Фурье равными между собой, совпадают. Действительно, разность двух таких функций ортогональна ко всем $\varphi_i(x)$, а потому равна нулю.

Очевидно, что система функций $\varphi_n(x)$ будет полной одновременно с системой функций $\psi_n(x)$. Относительно многих систем функций известна их полнота, например тригонометрические функции $\cos nx$, $\sin nx$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ образуют полную систему в промежутке $(0, 2\pi)$; целые положительные степени x: $1,\ x,\ x^2,\ \ldots$ — полную систему в любом интервале.[1]) Можно показать, что общим условием для полноты ортогональной нормированной системы функций является выполнение для любой интегрируемой с квадратом функции $f(x)$ так называемого *уравнения замкнутости* В. А. Стеклова

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx; \qquad A_n = \int_a^b f(x)\,\psi_n(x)\,dx. \qquad (14)$$

---

[1]) См., например, И. И. Привалов [1], стр. 41 и 47, а также В. Л. Гончаров [1], стр. 146. Г. М. Мюнтцем было установлено, что любая система степеней $1,\ x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_2},\ \ldots$ образует полную систему в интервале $(0, 1)$, если только ряд $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ расходится. См. И. П. Натансон [1]. По поводу обобщения этой теоремы см. Штейнхауз [1]. Вопросам полноты систем функций посвящены также исследования Н. К. Бари [1].

Если система функций $\psi_n(x)$ и полная, все же нельзя утверждать, что для всякой функции $f(x)$ ряд в правой части (11) сходится, однако можно утверждать, что имеет место сходимость этого ряда к $f(x)$ в более общем смысле.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_n = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x)\right]^2 dx.$$

Интегрируя, пользуясь при этом ортогональностью и нормированностью $\psi_i(x)$ и определением A_i, без труда убедимся, что

$$I_n = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x)\right]^2 dx =$$
$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{i=1}^{n} A_i \int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx + \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x)\right]^2 dx =$$
$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} A_i^2. \qquad (15)$$

Отсюда на основании уравнения замкнутости ясно, что величина I_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому при больших n сумма n членов ряда (11) $\sum_{i=1}^{n} A_i\psi_i(x)$ хотя и может в отдельных точках сильно отличаться от $f(x)$, но в среднем — интегрально — отличается от $f(x)$ весьма мало. Говорят вообще, что последовательность функций $F_n(x)$ сходится в среднем к функции $F(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [F(x) - F_n(x)]^2\,dx = 0. \qquad (16)$$

Мы можем сказать поэтому ввиду (15), что *частичные суммы ряда в правой части равенства* (11) *сходятся в среднем к функции* $f(x)$; то же относится тем самым и к ряду (12). Воспользуемся сейчас же этим фактом. Пусть функция $f(s)$ представляет контурные значения поставленной задачи, а $\varphi_n(s)$ — контурные значения основных решений $u_n(x, y)$. При этом пусть система функций $\varphi_n(s)$ полная. Ортогонализовав эту систему, получим для функции $f(s)$ разложения (11) и (12).

Составим функцию

$$u(x, y) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n [a_1^{(n)}u_1(x, y) + a_2^{(n)}u_2(x, y) + \ldots + a_n^{(n)}u_n(x, y)]. \qquad (17)$$

Эта функция $u(x, y)$ формально удовлетворяет всем условиям задачи. Покажем, что по крайней мере в случае задачи Дирихле для уравнения Лапласа ряд (17) сходится и представляет действительное решение задачи. Докажем именно следующую теорему.

Теорема. [1]) *Пусть $u_n(x, y)$ гармонические функции в области D, ограниченной контуром Γ, состоящим из конечного числа аналитических дуг. Пусть контурные значения функций $u_n(x, y)$ образуют полную систему функций $\varphi_n(s)$. Тогда, если $f(s)$ — непрерывная функция, ряд* (17) *сходится и дает гармоническую в области D функцию $u(x, y)$, значения которой при приближении к контуру стремятся к $f(s)$.*

Доказательство. Докажем прежде всего эту теорему для случая, когда область D есть единичный круг. Введем полярные координаты. Функция $u_n(x, y)$ на контуре обращается в $\varphi_n(\theta)$, поэтому она выражается интегралом Пуассона [§ 1, n° 2, (46)]:

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\varphi_n(\lambda)}{1-2r\cos(\theta-\lambda)+r^2}\,d\lambda, \tag{18}$$

благодаря чему общий член ряда (17) — функция v_n также выражается интегралом Пуассона:

$$v_n(r, \theta) = A_n\left[a_1^{(n)}u_1(r, \theta) + a_2^{(n)}u_2(r, \theta) + \ldots + a_n^{(n)}u_n(r, \theta)\right] = \\ = \frac{A_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\psi_n(\lambda)}{1-2r\cos(\theta-\lambda)+r^2}\,d\lambda. \tag{19}$$

Определим с помощью интеграла Пуассона и ряда гармоническую функцию

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\lambda)+r^2} f(\lambda)\,d\lambda = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta)\,r^n, \tag{20}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$. Эта функция представляет, как нам известно (§ 1, n° 2), решение задачи Дирихле для круга с граничными значениями, определяемыми функцией $f(\theta)$. Поэтому

$$\lim_{r\to 1} u(r, \theta) = f(\theta).$$

Нетрудно проверить, что этот же предел будет равен $f(\theta)$, если при стремлении точки изнутри к контуру r и θ будут изменяться одновременно. Докажем теперь, что внутри единичного круга ряд

---

[1]) Пиконе [1].

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, \theta)$ сходится и дает в сумме $u(r, \theta)$. Рассмотрим для этого разность

$$\left| u(r, \theta) - \sum_{i=1}^{n} v_i(r, \theta) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\lambda)+r^2} \left[f(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} A_i \psi_i(\lambda) \right] d\lambda \right|. \tag{21}$$

Пользуясь для интеграла, стоящего в правой части (21), неравенством Буняковского:

$$\left| \int_a^b f_1 \cdot f_2 \, dx \right| \leqslant \left[\int_a^b f_1^2 dx \cdot \int_a^b f_2^2 dx \right]^{1/2}, \tag{22}$$

найдем

$$\left| u(r, \theta) - \sum_{i=1}^{n} v_i(r, \theta) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\lambda)+r^2} \right)^2 d\lambda \right]^{1/2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[f(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} A_i \psi_i(\lambda) \right]^2 d\lambda \right\}^{1/2}. \tag{23}$$

В первом интеграле в правой части подынтегральная функция не превосходит, очевидно, $\left[\frac{1-r^2}{(1-r)^2} \right]^2 = \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 < \frac{4}{(1-r)^2}$, а сам первый множитель величины $\frac{\sqrt{2\pi} \cdot 2}{1-r}$, т. е. представляет величину ограниченную. Второй интеграл, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(\lambda)$ сходится в среднем к $f(\lambda)$ [ср. (15)], имеет пределом нуль. Итак, установлена сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(r, \theta)$ и то, что сумма его равна $u(r, \theta)$, а тем самым доказано равенство (17).

В случае, если бы данная область представляла не круг, мы могли бы установить равенство (17) с помощью аналогичных рассуждений с той только разницей, что вместо формулы Пуассона пришлось бы воспользоваться общей формулой, дающей решение задачи Дирихле для любой области:

$$u(x, y) = \int_L G(x, y, s) f(s) \, ds, \tag{24}$$

которая строится с помощью функции Грина.

Пример. Решим в качестве примера опять задачу Дирихле для прямоугольника; для определенности возьмем квадрат $(-1, 1; -1, 1)$. Фундаментальные решения выберем теперь иначе, чем в n° 1 § 1, а именно примем в качестве их фундаментальные решения для круга $r^n \cos n\varphi$, $r^n \sin n\varphi$. Эти функции на контуре квадрата уже не будут ортогональны, поэтому нам придется провести их ортогонализацию.

Если перейти к декартовым координатам $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ и разложить $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ по известным формулам Муавра, то найдем так называемые гармонические полиномы:

$$r^n \cos n\varphi = r^n \left[\cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots\right] =$$

$$= x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4 - \ldots$$

$$r^n \sin n\varphi = r^n\left[n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots\right] =$$

$$= nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \ldots$$

Отсюда первые гармонические полиномы будут: 1; x; y; $x^2 - y^2$; $2xy$; $x^3 - 3xy^2$; $3x^2y - y^3$; $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$; $4x^3y - 4xy^3$; ... Ортогонализуем эти полиномы; при этом, чтобы сократить вычисления, ограничимся четными полиномами: 1; $x^2 - y^2$; $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$; ... Заметим, что сохранение лишь этой частичной последовательности полиномов даст возможность решать задачу Дирихле только с симметричными граничными условиями.

Обозначим контур квадрата через L. Первую функцию 1 мы должны только нормировать. Имеем, очевидно,

$$\int_L 1^2\, ds = 8,$$

поэтому первая функция $\psi_1(x) = 1/\sqrt{8}$. Для второй функции вычисляем прежде всего

$$\int_L 1\,(x^2 - y^2)\, ds = \int_{(1,\,-1)}^{(1,\,1)} + \int_{(1,\,1)}^{(-1,\,1)} + \int_{(-1,\,1)}^{(-1,\,-1)} + \int_{(-1,\,-1)}^{(1,\,-1)} =$$

$$= \int_{-1}^{1}(1 - y^2)\,dy + \int_{1}^{-1}(x^2 - 1)(-dx) + \int_{1}^{-1}(1 - y^2)(-dy) + \int_{-1}^{1}(x^2 - 1)\,dx = 0.$$

Следовательно, функция $x^2 - y^2$ ортогональна к 1, а потому ее надо лишь нормировать:

$$\int_L (x^2 - y^2)^2\, ds = 4\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^2\, dx\, \frac{64}{15},$$

откуда окончательно $\psi_2(x) = \sqrt{15/64}\,(x^2 - y^2)$. Далее для нахождения $\psi_3(x)$ по (10) ищем

$$\int\limits_L (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\frac{1}{\sqrt{8}}\,ds =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\left[4\int\limits_{-1}^{1}(x^4+1)\,dx - 24\int\limits_{-1}^{1}x^2\,dx\right] = -6{,}4\cdot\frac{1}{\sqrt{8}},$$

$$\int\limits_L (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\sqrt{\frac{15}{64}}(x^2 - y^2)\,ds =$$
$$= \sqrt{\frac{15}{64}}\int\limits_L (x^6 - 7x^4y^2 + 7x^2y^4 - y^6)\,ds = 0.$$

Тогда

$$\psi_3 = C\left[\varphi_3 - \left(\int\limits_L \varphi_3\psi_1\,ds\right)\psi_1 - \left(\int\limits_L \varphi_3\psi_2\,ds\right)\psi_2\right] =$$
$$= C\left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 6{,}4\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

Наконец, нормируя функцию ψ_3 по условию $\int\limits_L \psi_3^2\,ds = 1$, окончательно получим

$$\psi_3 = \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 0{,}8}{\left[\int\limits_L (x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 0{,}8)^2\,ds\right]^{1/2}} = 0{,}2244\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 0{,}8).$$

С помощью найденных первых, а также дальнейших полиномов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ можно решать задачу Дирихле для квадрата с произвольными (симметричными) условиями на контуре.[1]) В качестве примера решим задачу Дирихле с граничными условиями:

$$u = 1 - x^2 \quad \text{при} \quad y = \pm 1,$$
$$u = 1 - y^2 \quad \text{при} \quad x = \pm 1,$$

[1]) Это вытекает из утверждения, что гармонические полиномы образуют полную систему (на контуре) для любой односвязной области, ограниченной спрямляемым контуром. Последнее же утверждение может быть легко выведено из теоремы о том, что аналитическая функция в односвязной области может быть равномерно апроксимирована полиномами комплексного переменного. См. В. Л. Гончаров [1], гл. V.

или кратко $u=f(s)$ на L. Мы должны по указанному выше методу разложить $f(s)$ на контуре L в ряд по $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ Для этого ищем

$$a_1=\int\limits_L f(s)\psi_1(s)\,ds=4\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{8}}(1-x^2)\,dx=\frac{16}{3\sqrt{8}}=\frac{4}{3}\sqrt{2},$$

$$a_2=\int\limits_L f(s)\psi_2(s)\,ds=4\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{15}{64}}(x^2-1)(1-x^2)\,dx+$$

$$+2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{15}{64}}(1-y^2)(1-y^2)\,dy=0,$$

$$a_3=\int\limits_L f(s)\psi_3(s)\,ds=0{,}2244\cdot 4\int\limits_{-1}^{1}(x^4-6x^2+1+0{,}8)(1-x^2)\,dx=0{,}8206.$$

В таком случае

$$f(s)\approx a_1\psi_1(s)+a_2\psi_2(s)+a_3\psi_3(s),$$

а самую гармоническую функцию приближенно найдем в виде:

$$u(x,\ y)\approx\frac{4}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}+0{,}8206\cdot 0{,}2244\,(x^4-6x^2y^2+y^4+0{,}8)=$$

$$=\frac{2}{3}+0{,}1841\,(x^4-6x^2y^2+y^4+0{,}8).$$

Отсюда, например, $u(0{,}0)\approx 0{,}814$, точно же по методу n° 1 § 1 нашли бы $u(0{,}0)=0{,}816$.

Замечание 1. Отметим, что способ решения задачи Дирихле, использованный в примере для решения этой задачи для квадрата, может быть применен для уравнения Лапласа и в случае других областей. Именно всегда можно взять те же гармонические полиномы $r^n\cos n\varphi$ и $r^n\sin n\varphi$ и ортогонализовать их на контуре данной области. Наиболее удобен этот способ в случае областей, ограниченных многоугольниками. Метод этот требует, правда, весьма значительных вычислений, однако эти вычисления все же являются выполнимыми практически, особенно если удается внести в них упрощения, пользуясь соображениями симметрии и т. п.

Замечание 2. Следует отметить, что наряду с обычными ортогональными и нормированными системами, которые мы рассматривали выше

$$\int\limits_a^b \varphi_i\varphi_k\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } i=k,\\ 0, & \text{если } i\neq k,\end{cases}$$

оказываются полезными также системы ортогональные и нормированные по весу $p(x)$, где $p(x)\geqslant 0$ — некоторая интегрируемая функция, именно такие, что

$$\int\limits_a^b \varphi_i\varphi_k\,p\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } i=k,\\ 0, & \text{если } i\neq k.\end{cases}$$

В случае обычной ортогонализации, очевидно, вес $p(x)=1$. При ортогонализации по весу также может быть для всякой функции составлено разложение в ряд по функциям φ_i:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x); \qquad a_i=\int_a^b \varphi_i f p\,dx.$$

Произвольная система функций может быть, так же как и в обычном случае, ортогонализована и нормирована по весу, нужно только во всех интегралах, входящих в (10), добавить к подынтегральной функции множитель $p(x)$.

Иногда находят применение и другие обобщения ортогональных систем, например биортогональные системы; так называют две системы функций $\{\varphi_i(x)\}$, $\{\psi_i(x)\}$, удовлетворяющие условиям

$$\int_a^b \varphi_i\psi_k\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } i=k,\\ 0, & \text{если } i\neq k.\end{cases}$$

Для всякой функции $f(x)$ может быть и здесь составлено разложение

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x); \qquad a_i=\int_a^b f\psi_i\,dx.$$

Замечание 3. Мы рассматривали в этом номере граничные условия вида

$$P(u)=f(s) \text{ на контуре } L,$$

где $P(u)$ — некоторый линейный оператор на контуре. Однако тот же путь решения применим и в более общем случае, когда на различных частях контура заданы различные операторы

$$P_1(u)=f_1(s) \text{ на } L_1; \qquad P_2(u)=f_2(s) \text{ на } L_2,$$

где L_1 и L_2 — две части контура L. Например, имеем подобную задачу, если на одной части контура задана сама функция, а на другой — ее нормальная производная. В случае такой смешанной задачи нужно составить по основным решениям $u_n(x, y)$ функции $\varphi_n(s)$, определенные следующим образом:

$$\varphi_n(s)=\begin{cases}P_1[u_n(x, y)] & \text{на } L_1,\\ P_2[u_n(x, y)] & \text{на } L_2,\end{cases}$$

ортогонализовать и нормировать эту систему функций, после чего составить разложение по этой системе функции $f(s)$, равной $f_1(s)$ в пределах L_1 и $f_2(s)$ в пределах L_2.

3. Решение задачи о разложении произвольной функции по наперед заданным с помощью бесконечных систем уравнений. Рассмотрим ту же задачу о разложении произвольной функции $f(x)$ в промежутке (a, b) по функциям $\varphi_n(x)$ другим путем. Напишем искомое разложение с неопределенными коэффициентами A_k в виде:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(x). \tag{25}$$

Возьмем теперь любую полную систему функций $\{\psi_i(x)\}$, помножим обе части равенства (25) на $\psi_i(x)$ и проинтегрируем его, тогда получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}A_k = b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots), \tag{26}$$

где

$$c_{i,k} = \int_0^b \varphi_k(x)\psi_i(x)\,dx; \quad b_i = \int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx. \tag{27}$$

Система (26) служит для определения постоянных A_i. Если нам удастся определить значения A_i, удовлетворяющие системе (26), причем такие, что ряд в правой части (25) сходится к некоторой непрерывной функции $f^*(x)$ (хотя бы ряд сходился лишь в среднем) и если при этом окажется, что допустимо почленное интегрирование ряда (25), то сумма этого ряда $f^*(x)=f(x)$. В самом деле, для функций $f(x)$ и $f^*(x)$ одинаковы интегралы: $\int\psi_i f\,dx = \int\psi_i f^*\,dx$, в таком случае для ортогональной системы, получающейся ортогонализацией из функций ψ_i, f и f^* имеют одинаковыми все коэффициенты Фурье, а тогда по сделанному выше замечанию (стр. 60) они совпадают.

Полезно указать также другой способ получения системы (26), практически, пожалуй, даже более удобный. Именно к системе (26) можно прийти другим путем.

Разложим в ряд по какой-либо полной ортогональной системе функций $\{\psi_i(x)\}$, например в обыкновенный ряд Фурье, функцию $f(x)$ и все $\varphi_k(x)$; пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\psi_i(x); \qquad \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k}\psi_i(x), \tag{28}$$

где $c_{i,k}$ и b_i определяются формулами (27).

Подставим теперь ряды (28) в равенство (25) и приравняем коэффициенты при $\psi_i(x)$ в обеих частях этого равенства, тогда и получим, очевидно, систему (26). Отметим, что второй способ получения системы (26) предполагает, в отличие от первого, систему функций $\psi_i(x)$ ортогональной и нормированной.

Нельзя дать более или менее общих условий, при которых система (26) имеет решение. Однако в ряде практически важных случаев система (26) оказывается регулярной, как мы увидим дальше на примерах. Упомянем об одном таком случае.

Если функции $\psi_n(x)$ тригонометрические, а функции $\varphi_n(x)$ весьма близки к ним, то система оказывается регулярной. Более того,

пусть $\psi_n(x)$ любые ортогональные и нормированные в промежутке (a, b) ограниченные функции:

$$|\psi_n(x)| \leqslant \frac{M}{b-a}$$

и пусть

$$|\varphi_n(x) - \psi_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{M},$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = q < 1. \tag{29}$$

Тогда система (26) будет вполне регулярной. В самом деле,

$$\left.\begin{aligned} |c_{i,k}| &= \left|\int_a^b \varphi_k(x)\psi_i(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b \psi_k(x)\psi_i(x)\,dx\right| + \\ &+ \left|\int_a^b [\varphi_k(x)-\psi_k(x)]\,\psi_i(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon_k}{M}\cdot\frac{M}{b-a}(b-a) = \varepsilon_k \text{ для } i \neq k, \\ |c_{i,i}-1| &= \left|\int_a^b \varphi_i(x)\psi_i(x)\,dx - 1\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_a^b |\varphi_i(x)-\psi_i(x)|\,|\psi_i(x)|\,dx \leqslant \varepsilon_i. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

В силу этого, если ввести

$$c^*_{i,k} = -c_{i,k}, \quad i \neq k; \quad c^*_{i,i} = 1 - c_{i,i}, \tag{31}$$

то система (26) перепишется так:

$$A_i = \sum_{k=1}^{\infty} c^*_{i,k} A_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{32}$$

причем она, очевидно, вполне регулярна, так как ввиду неравенств (30)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c^*_{i,k}| = |c_{i,i} - 1| + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty} |c_{i,k}| < \varepsilon_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty} \varepsilon_k = q < 1.$$

Приведем теперь несколько примеров задач математической физики, решаемых с помощью бесконечных систем.

4. Пример 1. Смешанная граничная задача для уравнения Лапласа. Рассмотрим следующую граничную задачу. Найти функцию гармоническую в единичном круге (рис. 2), для которой на половине контура окружности

заданы значения самой функции, а на другой половине — значения ее нормальной производной:

$$u|_{r=1} = f(\theta) \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \varphi(\theta) \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi.$$

При этом для упрощения вычислений предположим условия симметричными относительно оси OX, т. е.

$$f(-\theta) = f(\theta),$$
$$\varphi(\pi + \theta) = \varphi(\pi - \theta).$$

Искомое решение, ввиду симметрии относительно оси OX, ищем в форме ряда

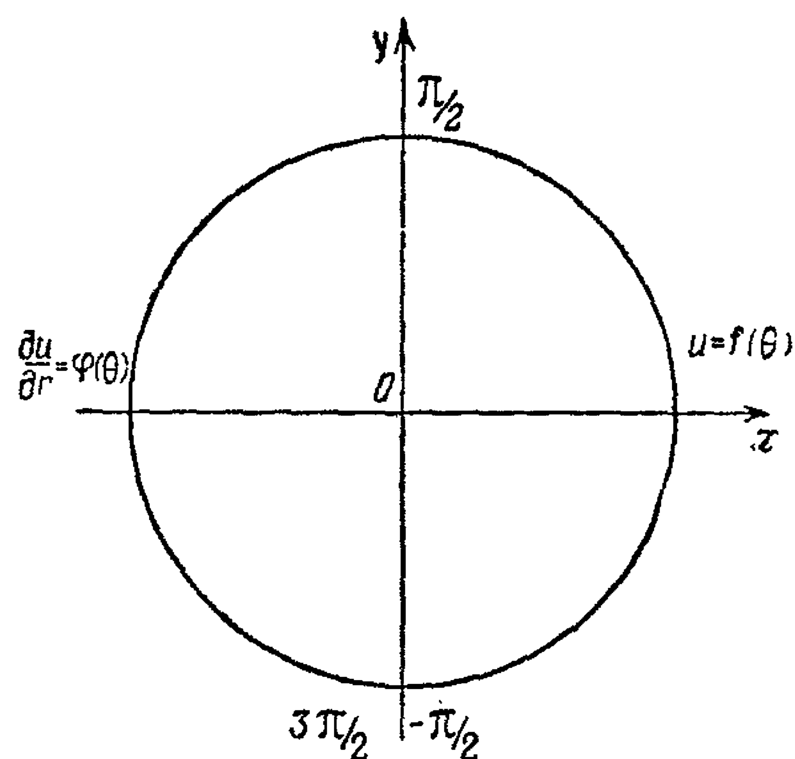


Рис. 2.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta.$$

На основании первого условия должны иметь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta = f(\theta), \; -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Функции 1, $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, ... образуют полную систему в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$ (по отношению к четным функциям); помножив поэтому написанное равенство на каждую из этих функций и проинтегрировав в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, найдем требуемую систему для определения неизвестных коэффициентов A_n. Для окончательного составления этой системы вычислим прежде всего

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos k\theta \, \cos 2i\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos (k+2i)\theta + \cos (k-2i)\theta] \, d\theta =$$

$$= \begin{cases} \pi & \text{при } k = 2i = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } k = 2i \quad (i > 0), \\ 0 & \text{при } k = 2j \quad (j \neq i), \\ \dfrac{(-1)^{i+j} 2(2j+1)}{(2j+1)^2 - 4i^2} & \text{при } k = 2j+1. \end{cases}$$

Введем еще обозначение

$$\alpha_{2i} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta) \, \cos 2i\theta \, d\theta \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

тогда получающуюся систему уравнений можем записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\pi A_0+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}A_1-\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}A_3+\frac{2\cdot 5}{5\cdot 5}A_5-\frac{2\cdot 7}{7\cdot 7}A_7+\ldots=\alpha_0,\\
&\frac{\pi}{2}A_2-\frac{2\cdot 1}{-1\cdot 3}A_1+\frac{2\cdot 3}{1\cdot 5}A_3-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}A_5+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 9}A_7-\ldots=\alpha_2,\\
&\frac{\pi}{2}A_4+\frac{2\cdot 1}{-3\cdot 5}A_1-\frac{2\cdot 3}{-1\cdot 7}A_3+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 9}A_5-\frac{2\cdot 7}{3\cdot 11}A_7+\ldots=\alpha_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\pi}{2}A_{2i}+\frac{(-1)^i\,2\cdot 1}{(1-2i)(1+2i)}A_1+\frac{(-1)^{i+1}\,2\cdot 3}{(3-2i)(3+2i)}A_3+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{(-1)^{i+j}\,2\,(2j+1)}{(2j+1-2i)(2j+1+2i)}A_{2j+1}+\ldots=\alpha_{2i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

Далее, граничное условие на второй части дает нам:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\cos n\theta=\varphi(\theta)\quad\text{при}\quad\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi.$$

Помножим здесь обе части равенства на $\cos 2i(\theta-\pi)=\cos 2i\theta$; соответственный интеграл будет отличаться от предыдущего только знаком, а именно

$$\int_{\pi/2}^{3/2\pi}\cos k\theta\,\cos 2i\theta\,d\theta=\int_{3/2\pi}^{5/2\pi}\cos(k\theta-k\pi)\cos(2i\theta-2i\pi)\,d\theta=$$

$$=(-1)^k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos k\theta\cos 2i\theta\,d\theta.$$

Если теперь, кроме того, введем обозначение

$$\beta_{2i}=\int_{\pi/2}^{3/2\pi}\varphi(\theta)\cos 2i\theta\,d\theta,$$

то полученная система уравнений будет:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{2\cdot 1^2}{1\cdot 1}A_1+\frac{2\cdot 3^2}{3\cdot 3}A_3-\frac{2\cdot 5^2}{5\cdot 5}A_5+\frac{2\cdot 7^2}{7\cdot 7}A_7-\ldots=\beta_0,\\
&2\cdot\frac{\pi}{2}A_2+\frac{2\cdot 1^2}{-1\cdot 3}A_1-\frac{2\cdot 3^2}{1\cdot 5}A_3+\frac{2\cdot 5^2}{3\cdot 7}A_5-\frac{2\cdot 7^2}{5\cdot 9}A_7+\ldots=\beta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2i\cdot\frac{\pi}{2}A_{2i}+\frac{(-1)^{i+1}\,2\cdot 1^2}{(1-2i)(1+2i)}A_1+\frac{(-1)^{i+2}\,2\cdot 3^2}{(3-2i)(3+2i)}A_3+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{(-1)^{i+j+1}\,2\,(2j+1)^2}{(2j+1-2i)(2j+1+2i)}A_{2j+1}+\ldots=\beta_{2i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

Произведем некоторое преобразование полученных систем. Исключим **прежде** всего неизвестные A_2, A_4, ..., для чего каждое (i-е) уравнение

системы (b) разделим на $2i$ и вычтем из него соответственное уравнение системы (a); первое уравнение системы (b) перепишем без изменений. В результате придем к системе

$$\left.\begin{array}{l}
-\frac{2\cdot 1}{1}A_1+\frac{2\cdot 3}{3}A_3-\frac{2\cdot 5}{5}A_5+\frac{2\cdot 7}{7}A_7-\ldots=\beta_0,\\
\frac{2\cdot 1}{-1\cdot 2}A_1-\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}A_3+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 2}A_5-\frac{2\cdot 7}{5\cdot 2}A_7+\ldots=\frac{\beta_2}{2}-\alpha_2,\\
-\frac{2\cdot 1}{-3\cdot 4}A_1+\frac{2\cdot 3}{-1\cdot 4}A_3-\frac{2\cdot 5}{1\cdot 4}A_5+\frac{2\cdot 7}{3\cdot 4}A_7-\ldots=\frac{\beta_4}{4}-\alpha_4,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{(-1)^{i+1}2\cdot 1}{(1-2i)2i}A_1+\frac{(-1)^{i+2}2\cdot 3}{(3-2i)2i}A_3+\ldots\\
\qquad\ldots+\frac{(-1)^{i+j+1}2\cdot(2j+1)}{(2j+1-2i)2i}A_{2j+1}+\ldots=\frac{\beta_{2i}}{2i}-\alpha_{2i}.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\qquad\text{(c)}$$

Умножим теперь еще i-е уравнение ($i\neq 0$) на i, а первое разделим на 2 и введем новые неизвестные:

$$B_1=-A_1\cdot 1;\quad B_3=A_3\cdot 3;\quad B_5=-A_5\cdot 5;\ \ldots;$$
$$B_{2j-1}=(-1)^j A_{2j-1}(2j-1);\ \ldots$$

Для них получим систему

$$\left.\begin{array}{l}
B_1+\frac{B_3}{3}+\frac{B_5}{5}+\frac{B_7}{7}+\ldots=\frac{\beta_0}{2},\\
-\frac{B_1}{-1}-\frac{B_3}{1}-\frac{B_5}{3}-\frac{B_7}{5}-\ldots=\frac{\beta_2}{2}-\alpha_2,\\
\frac{B_1}{-3}+\frac{B_3}{-1}+\frac{B_5}{1}+\frac{B_7}{3}+\ldots=\frac{\beta_4}{2}-2\alpha_4,\\
-\frac{B_1}{-5}-\frac{B_3}{-3}-\frac{B_5}{-1}-\frac{B_7}{1}-\ldots=\frac{\beta_6}{2}-3\alpha_6,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\qquad\text{(d)}$$

В этой системе возьмем полусуммы первого и второго уравнений, второго и третьего и т. д., при этом в некоторых из полученных уравнений изменим знаки, тогда будем иметь окончательно

$$\left.\begin{array}{l}
B_1-\frac{B_3}{1\cdot 3}-\frac{B_5}{3\cdot 5}-\frac{B_7}{5\cdot 7}-\ldots=\frac{1}{4}(\beta_0+\beta_2-2\alpha_2),\\
-\frac{B_1}{1\cdot 3}+B_3-\frac{B_5}{1\cdot 3}-\frac{B_7}{3\cdot 5}-\ldots=-\frac{1}{4}(\beta_2+\beta_4-2\alpha_2-4\alpha_4),\\
-\frac{B_1}{3\cdot 5}-\frac{B_3}{1\cdot 3}+B_5-\frac{B_7}{1\cdot 3}-\ldots=\frac{1}{4}(\beta_4+\beta_6-4\alpha_4-6\alpha_6),\\
-\frac{B_1}{5\cdot 7}-\frac{B_3}{3\cdot 5}-\frac{B_5}{1\cdot 3}+B_7-\ldots=-\frac{1}{4}(\beta_6+\beta_8-6\alpha_6-8\alpha_8),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\qquad\text{(e)}$$

Такой переход от системы (d) к системе (e) является законным лишь на половину, именно: всякое решение системы (d) будет удовлетворять, очевидно, и системе (e); за обратное мы, однако, поручиться не можем.

Последнюю систему (e) мы рассматривали в качестве примера в n° 3 § 2 (33) и там было установлено, что эта система имеет наверное ограниченное решение, если свободные члены имеют порядок не ниже $\frac{1}{n}$. Так как справа у нас стоят величины β_{2i} и $2i\alpha_{2i}$, т. е. коэффициенты Фурье функций $\varphi(\theta)$ и $\frac{df}{d\theta}$, то достаточно потребовать, чтобы эти функции были ограниченной вариации. После того как числа B_1, B_3, ... будут определены из последней системы, по ним можно найти числа A_1, A_3, ..., а по этим числам можно из системы (a) найти A_0, A_2, A_4, ... Однако, чтобы доказать, что полученные значения A_i действительно дают решение первоначальной задачи, ограниченность чисел B_{2i-1} недостаточна. В самом деле, например, при свободных членах $\frac{1}{4i-2}$ в i-м уравнении получим решение $B_{2i-1} = 1$; очевидно, однако, что это решение не удовлетворяет системе (d), так как при его подстановке ряды в правой части оказываются расходящимися. Поэтому нужно сделать более сильное ограничение относительно свободных членов системы (e).

Предположим, что свободные члены системы имеют порядок не ниже $\frac{1}{n\sqrt{n}}$, т. е. $|\beta_{2n-2}|$ и $|2n\alpha_{2n-2}|$ не превосходят $\frac{K}{n\sqrt{n}}$; в таком случае можно показать, что решения будут порядка не ниже $\frac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. $|B_{2n-1}| < \frac{K_1}{\sqrt{n}}$.[1]) Докажем, что эти решения системы (e) удовлетворяют и системе (d). Прежде всего ясно, что подстановка их в уравнения системы (d) дает в левых частях сходящиеся ряды с общим членом порядка не ниже $1/n^{3/2}$. Рассмотрим n-е уравнение системы (d) и оценим его левую часть, пользуясь тем, что $|B_{2n-1}| < \frac{K_1}{\sqrt{n}}$. При этом при оценке мы воспользуемся заменой суммы на интеграл, подобной той, которая проводится при выводе интегрального признака сходимости рядов Коши. Имеем, беря абсолютные величины,

$$\left|\frac{B_1}{-(2n-3)} + \frac{B_3}{-(2n-5)} + \ldots + \frac{B_{2n-3}}{1} + \frac{B_{2n-1}}{1} + \frac{B_{2n+1}}{3} + \ldots\right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1\left|\frac{1}{(2n-3)\sqrt{1}} + \frac{1}{(2n-5)\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{3\sqrt{n+1}} + \ldots\right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1\left[\int\limits_0^{n-2} \frac{dx}{(2n-3-2x)\sqrt{x}} + \int\limits_n^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2x+1-2n)} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= K_1\left[\frac{1}{\sqrt{2(2n-3)}} \ln \frac{\sqrt{2n-3} + \sqrt{2n-4}}{\sqrt{2n-3} - \sqrt{2n-4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2(2n-1)}} \ln \frac{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \leqslant \frac{K^* \ln n}{\sqrt{n}}.$$

---

[1]) Для доказательства этого достаточно проверить, что подстановка $B_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ в систему (e) дает свободные члены порядка $\frac{1}{n\sqrt{n}}$, и затем воспользоваться сравнением решений (§ 2, n° 2, теорема 1 (5)).

Правая часть n-го уравнения системы (d) также при сделанных предположениях сколь угодно мала. Это показывает, что каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно найти достаточно далекое уравнение системы (d), которое верно с точностью до ε. Коротко можно сказать, что бесконечно далекое уравнение системы (d) удовлетворено. Возьмем n-е уравнение системы (d), которое удовлетворено с точностью до ε. Равенство, получающееся сложением n-го и $(n-1)$-го равенств системы (d), есть удвоенное $(n-1)$-е равенство системы (e), а потому удовлетворено точно. Отсюда заключаем, что $(n-1)$-е равенство удовлетворено с точностью до ε и, продолжая таким же образом, установим то же самое для всех равенств вплоть до первого. Ввиду произвольности ε можем заключить, что все равенства системы (d) удовлетворены точно. После этого найдем числа

$$A_{2n-1}=\frac{(-1)^n B_{2n-1}}{2n-1},$$

которые будут порядка не ниже $1/n^{3/2}$ и дадут решение системы (c). Далее, из системы (a) можем найти $A_0, A_2, A_4, \ldots$; легко установить с помощью оценки, аналогичной той, которая проведена выше, что числа A_{2n} будут порядка не ниже $n^{-\frac{3}{2}}\ln n$ и удовлетворяют вместе с A_{2n-1} уравнениям систем (a) и (b). Далее, если мы рассмотрим для функций $u(r,\theta)$ и $\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}$ ряды по $\cos 2n\theta$ в промежутках $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi$, то эти ряды будут сходиться абсолютно и равномерно,[1]) а потому допустим будет предельный переход почленно при $r\to 1$, что даст в силу равенств систем (a) и (b):

$$\lim_{r\to 1} u(r,\theta)=f(\theta)\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2};\qquad \lim_{r\to 1}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}=\varphi(\theta)\quad \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi.$$

Мы на этом примере наметили, как может быть проведено решение подобной задачи с помощью бесконечных систем с полным исследованием получающихся систем. Заметим, что рассмотренная задача может быть решена иным путем без применения бесконечных систем.[2])

К бесконечной системе, но более сложного вида, может быть приведено также решение более общей задачи:

найти u при условии

$$a_1 u+b_1\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=f_1(\theta)\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_2 u+b_2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=f_2(\theta)\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi\right).$$

5. Пример 2. Расчет защемленной пластинки. Известно, что прогиб тонкой прямоугольной пластинки со сторонами $2a$ и $2b$, защемленной по

---

[1]) По отношению к ряду для $\frac{\partial u}{\partial r}$ это, правда, справедливо лишь при некоторых дополнительных ограничениях.

[2]) Эта задача представляет предельный случай задачи Гильберта, рассмотренной в курсе В. И. Смирнова [1], т. III, ч. 2, стр. 190 или ниже, гл. VI, § 4, n° 2.

краям и подверженной равномерной нагрузке, представляет функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = c; \quad c = \frac{P}{N}, \tag{33}$$

где P — единичная нагрузка, N — постоянная, связанная с упругими свойствами пластинки, а также граничным условиям

$$\begin{gathered} u = 0 \text{ при } x = \pm a, \quad y = \pm b; \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = \pm a; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm b. \end{gathered} \tag{34}$$

Частное решение уравнения (33), очевидно, будет

$$u_0 = \frac{c}{8}(a^2 - x^2)(b^2 - y^2). \tag{35}$$

Тогда для функции $u_1 = u - u_0$ имеем уравнение $\Delta\Delta u_1 = 0$ и граничные условия

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = 0 \text{ при } x = \pm a, \ y = \pm b; \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x} = \pm\frac{ca}{4}(b^2 - y^2) \quad \text{при} \quad x = \pm a; \\ &\frac{\partial u_1}{\partial y} = \pm\frac{cb}{4}(a^2 - x^2) \text{ при } y = \pm b. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Ввиду симметрии граничных условий, u_1 представляет четную функцию переменных x и y. Поэтому достаточно будет, если искать решение в форме ряда, составленного из четных функций, и удовлетворить граничным условиям при $x = +a$, $y = +b$, так как при $x = -a$ и $y = -b$ они будут удовлетворены автоматически. Разложим далее граничные функции в тригонометрический ряд, тогда граничные условия можем записать так:

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = a; \ u_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = b; \\ &\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{a^3 c \cdot 8\varphi^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2b} y; \\ &\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \frac{a^3 c \cdot 8\varphi}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2a} x, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где $\varphi = b/a$.

Искомое решение пытаемся найти в форме

$$\begin{aligned} u_1 = -\frac{ca^3}{2\pi^2} \Bigg[&\sum_{n=1,3,5,\ldots} A_n \frac{H_1(y, n\pi)}{n^2 \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi\varphi}{2}} \cos\frac{n\pi}{2a} x + \\ &+ \varphi^3 \sum_{n=1,3,5,\ldots} B_n \frac{H(x, n\pi)}{n^2 \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi}{2\varphi}} \cos\frac{n\pi}{2b} y \Bigg], \end{aligned} \tag{38}$$

где функции H и H_1 представляют четные решения дифференциального уравнения (58), которое было введено при исследовании прогиба свободно опёртой пластинки (§ 1, n° 3), удовлетворяющие, соответственно, условиям $H(a, n\pi)=0$ и $H_1(b, n\pi)=0$:

$$\left.\begin{aligned} H(x, n\pi) &= (a+x)\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{2b}(a-x)+(a-x)\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{2b}(a+x), \\ H_1(y, n\pi) &= (b+y)\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{2a}(b-y)+(b-y)\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{2a}(b+y). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Очевидно, что решение (38) удовлетворяет формально уравнению $\Delta\Delta u_1=0$ и условиям $u_1=0$ при $x=a$ и $y=b$. Мы должны подобрать теперь коэффициенты A_n и B_n так, чтобы удовлетворить последним двум условиям (37).

Легко проверить, что

$$\left.\begin{aligned} H'(x, n\pi)\,|_{x=a} &= -\left(\frac{n\pi}{\varphi}+\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{\varphi}\right); \\ H_1'(y, n\pi)\,|_{y=b} &= -(n\pi\varphi+\mathrm{sh}\,n\pi\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Отсюда имеем:

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a} &= \frac{ca^3}{2\pi^2}\Bigg[\sum_{n=1,3,\ldots} A_n \frac{H_1(y, n\pi)}{n^2\,\mathrm{ch}^2\,\frac{n\pi\varphi}{2}}\frac{n\pi}{2a}\sin\frac{n\pi}{2}+ \\ &\qquad +\varphi^3\sum_{n=1,3,\ldots} B_n\frac{\frac{n\pi}{\varphi}+\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{\varphi}}{n^2\,\mathrm{ch}^2\,\frac{n\pi}{2\varphi}}\cos\frac{n\pi}{2b}y\Bigg] \\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b} &= \frac{ca^3}{2\pi^2}\Bigg[\sum_{n=1,3,\ldots} A_n\frac{n\pi\varphi+\mathrm{sh}\,n\pi\varphi}{n^2\,\mathrm{ch}^2\,\frac{n\pi\varphi}{2}}\cos\frac{n\pi}{2a}x+ \\ &\qquad +\varphi^3\sum_{n=1,3,\ldots} B_n\frac{H(x, n\pi)}{n^2\,\mathrm{ch}^2\,\frac{n\pi}{2\varphi}}\frac{n\pi}{2b}\sin\frac{n\pi}{2}\Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Чтобы сравнить теперь выражения (41) и (37), нужно функции $H(x, n\pi)$ и $H_1(y, n\pi)$ разложить в ряды по $\cos\frac{n\pi}{2a}x$ и $\cos\frac{n\pi}{2b}y$. Имеем:

$$\frac{n\pi}{2a}H_1(y, n\pi)=\sum_{i=1,3,\ldots} C_i\cos\frac{i\pi}{2b}y;\quad \frac{n\pi}{2b}H(x, n\pi)=\sum_{i=1,3,\ldots} D_i\cos\frac{i\pi}{2a}x, \tag{42}$$

где, согласно формулам для коэффициентов рядов по ортогональным функциям,

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \frac{n\pi}{2a}\frac{\int\limits_0^b H_1(y,\,n\pi)\cos\frac{i\pi}{2b}y\,dy}{\int\limits_0^b \cos^2\frac{i\pi}{2b}y\,dy} = \frac{16\varphi^2}{n\pi\left(\frac{i^2}{n^2}+\varphi^2\right)^2}\cdot\frac{i}{n}\,\mathrm{ch}^2\frac{n\pi\varphi}{2}\sin\frac{i\pi}{2},\\ D_i &= \frac{n\pi}{2b}\frac{\int\limits_0^a H(x,\,n\pi)\cos\frac{i\pi}{2a}x\,dx}{\int\limits_0^a \cos^2\frac{i\pi}{2a}x\,dx} = \frac{16\varphi^2}{n\pi\left(\frac{i^2}{n^2}\varphi^2+1\right)^2}\cdot\frac{i}{n}\mathrm{ch}^2\frac{n\pi}{2\varphi}\sin\frac{i\pi}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(43)$$

Подставляя вместо H и H_1 ряды (42) в выражения (41) и приравнивая их к выражениям (37), придем после сокращения на ca^3 к следующим равенствам:

$$-\frac{8\varphi^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,\dots}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3}\cos\frac{n\pi}{2b}y+\sum_{n=1,3,\dots}\sum_{i=1,3,\dots}\left[\frac{8}{n^3\pi^3}\cdot\frac{i}{n}\frac{A_n}{\left(\frac{i^2}{n^2}+\varphi^2\right)^2}\varphi^2\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{i\pi}{2b}y\right]+$$
$$+\sum_{n=1,3,\dots}\frac{\varphi^3B_n}{2n^2\pi^2}\cdot\frac{\frac{n\pi}{\varphi}+\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{\varphi}}{\mathrm{ch}^2\frac{n\pi}{2\varphi}}\cos\frac{n\pi}{2b}y=0.$$

$$-\frac{8\varphi}{\pi^3}\sum_{n=1,3,\dots}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3}\cos\frac{n\pi}{2a}x+\sum_{n=1,3,\dots}\sum_{i=1,3,\dots}\left[\frac{8}{n^3\pi^3}\frac{i}{n}\frac{B_n}{\left(\frac{i^2}{n^2}\varphi^2+1\right)^2}\varphi^5\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{i\pi}{2a}x\right]+$$
$$+\sum_{n=1,3,\dots}\frac{A_n}{2n^2\pi^2}\frac{n\pi\varphi+\mathrm{sh}\,n\pi\varphi}{\mathrm{ch}^2\frac{n\pi\varphi}{2}}\cos\frac{n\pi}{2a}x=0.\qquad(44)$$

Превращая двойные ряды в ординарные по $\cos\frac{n\pi}{2b}y$ и $\cos\frac{n\pi}{2a}x$ (заменив при этом i на n, а n на ρ) и приравнивая нулю все коэффициенты при этих функциях, приходим после сокращения к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}\beta_nB_n\sin\frac{n\pi}{2}+\sum_{\rho=1,3,\dots}A_\rho\left(\frac{n^2}{n^2+\rho^2\varphi^2}\right)^2\sin\frac{\rho\pi}{2}&=1,\\ \alpha_nA_n\sin\frac{n\pi}{2}+\sum_{\rho=1,3,\dots}B_\rho\left(\frac{n^2}{\varphi^2n^2+\rho^2}\right)^2\sin\frac{\rho\pi}{2}&=\frac{1}{\varphi^4},\end{aligned}\right\}\quad(n=1,\,3,\,5,\,7,\,\dots)\qquad(45)$$

где мы обозначили для простоты

$$\alpha_n=\varphi^{-5}\frac{n\pi}{16}\,\frac{n\pi\varphi+\operatorname{sh} n\pi\varphi}{\operatorname{ch}^2\frac{n\pi\varphi}{2}};\quad \beta_n=\varphi\frac{n\pi}{16}\,\frac{\frac{n\pi}{\varphi}+\operatorname{sh}\frac{n\pi}{\varphi}}{\operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2\varphi}}. \tag{46}$$

Из системы (45) должны быть определены коэффициенты A_n и B_n, тогда по ним можно составить решение (38).

Остановимся подробнее на случае квадратной пластинки. В этом случае

$$b=a;\ \varphi=\frac{b}{a}=1;\ B_n=A_n;\ \beta_n=\alpha_n.$$

Из двух систем уравнений (45) можно сохранить одну. Для полного написания этой системы вычисляем α_n, имеем:

$$\alpha_1=\frac{\pi^2}{16\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}}+\frac{2\pi}{16}\operatorname{th}\frac{\pi}{2}=0{,}45814;\quad \alpha_3=\frac{9\pi^2}{16\operatorname{ch}^2\frac{3\pi}{2}}+\frac{6\pi}{16}\operatorname{th}\frac{3}{2}\pi=1{,}17989;$$

$$\alpha_5=1{,}96355;\quad \alpha_7=2{,}74889;\quad \alpha_9=3{,}53417;\quad \alpha_{11}=4{,}31969.$$

Для больших n ($n\geqslant 10$) можем принять

$$\alpha_n=\frac{n\pi}{16}\,\frac{n\pi+\operatorname{sh} n\pi}{\operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2}}=\frac{n\pi}{16}\,\frac{n\pi+\operatorname{sh} n\pi}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ch} n\pi}\approx\frac{n\pi}{8}.$$

Если мы в системе (45) член суммы, содержащий A_n, присоединим к члену, стоящему вне суммы, то система примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}70814A_1-\left(\tfrac{1}{10}\right)^2A_3+\left(\tfrac{1}{26}\right)^2A_5-\left(\tfrac{1}{50}\right)^2A_7+\left(\tfrac{1}{82}\right)^2A_9-\left(\tfrac{1}{122}\right)^2A_{11}+\ldots=1,\\
&\left(\tfrac{9}{10}\right)^2A_1-1{,}42989A_3+\left(\tfrac{9}{34}\right)^2A_5-\left(\tfrac{9}{58}\right)^2A_7+\left(\tfrac{9}{90}\right)^2A_9-\left(\tfrac{9}{130}\right)^2A_{11}+\ldots-1,\\
&\left(\tfrac{25}{26}\right)^2A_1-\left(\tfrac{25}{34}\right)^2A_3+2{,}21355A_5-\left(\tfrac{25}{74}\right)^2A_7+\left(\tfrac{25}{106}\right)^2A_9-\left(\tfrac{25}{146}\right)^2A_{11}+\ldots=1,\\
&\left(\tfrac{49}{50}\right)^2A_1-\left(\tfrac{49}{58}\right)^2A_3+\left(\tfrac{49}{74}\right)^2A_5-2{,}99889A_7+\left(\tfrac{49}{130}\right)^2A_9-\left(\tfrac{49}{170}\right)^2A_{11}+\ldots=1,\\
&\left(\tfrac{81}{82}\right)^2A_1-\left(\tfrac{81}{90}\right)^2A_3+\left(\tfrac{81}{106}\right)^2A_5-\left(\tfrac{81}{130}\right)^2A_7+3{,}78417A_9-\left(\tfrac{81}{202}\right)^2A_{11}+\ldots=1,\\
&\left(\tfrac{121}{122}\right)^2A_1-\left(\tfrac{121}{130}\right)^2A_3+\left(\tfrac{121}{146}\right)^2A_5-\left(\tfrac{121}{170}\right)^2A_7+\left(\tfrac{121}{202}\right)^2A_9-4{,}51969A_{11}+\ldots=1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Эта система, как мы покажем ниже, является регулярной и имеет единственное ограниченное решение при данных свободных членах. Это решение может быть найдено как по способу последовательных приближений, указанному в § 2, так и несколько видоизмененным способом последовательных приближений, а именно следующим. Отделим члены за главной диагональю и перенесем их в правую часть; тогда, отбросив сначала эти члены и решив оставшуюся рекуррентную систему, получим первое приближение для неизвестных A_1, A_3, ... Вставив эти первые приближения в отделенные члены и решив вновь получившуюся рекуррентную систему, получим вторые приближения для неизвестных и т. д. Нетрудно установить, что эти последовательные приближения будут стремиться к тому же главному решению, что и приближения, получаемые обычным методом. Пользуясь именно указанным методом, Хенки [1]) нашел следующие значения для неизвестных:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 1{,}4138, & A_{15} &= 0{,}0193,\\
A_3 &= 0{,}0945, & A_{17} &= -0{,}0141,\\
A_5 &= -0{,}1093, & A_{19} &= 0{,}0103,\\
A_7 &= 0{,}0770, & A_{21} &= -0{,}0077,\\
A_9 &= -0{,}0510, & A_{23} &= 0{,}0051,\\
A_{11} &= 0{,}0371, & A_{25} &= -0{,}0041.\\
A_{13} &= -0{,}0264,
\end{aligned}
$$

Теперь, когда постоянные A_1, A_3, ... определены, определен и прогиб пластинки в любом месте $u = u_0 + u_1$, который находится из равенств (35) и (38), а с помощью его могут быть найдены также моменты и другие необходимые для расчета величины. Так, например, прогиб посредине:

$$u(0,\ 0) = \frac{ca^4}{8} - \frac{ca^3}{2\pi^2} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{4a\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\,\mathrm{ch}^2\,\frac{n\pi}{2}} A_n;$$

наибольший момент посредине стороны:

$$M_x\Big|_{\substack{x=a\\ y=0}} = \frac{a^2p}{4}\left(1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}\right).$$

Аналогичным образом может быть проведено решение и для неквадратной пластинки, только в этом случае придется принять во внимание обе системы уравнений (45).

---

[1]) Впервые метод решения задачи о расчете защемленной пластинки приведением к бесконечной системе уравнений развит Б. М. Кояловичем [1]. По поводу приведенного решения и численных данных см. Б. Г. Галеркин [3, 4] и [1], стр. 90. Кроме того, см. С. П. Тимошенко [1] и Хенки [1].

Примеры применения бесконечных систем в других задачах теории упругости имеются в статьях: Д. М. Волков и А. А. Назаров [1], Д. И. Лучинин [1], Н. И. Мусхелишвили [3], М. И. Горбунов-Посадов [1], С. Г. Гуревич [1], Бизано и Кох [1].

На основании полученного решения Хенки дает следующие численные результаты, приводя для сравнения результаты для заделанной балки ($\varphi = \infty$)

$\varphi = \frac{b}{a}$	В центре пластинки		В середине стороны	
	M_y	M_x	M_y	M_x
1,0	0,092 pa^2	0,092 pa^2	0,205 pa^2	0,205 pa^2
1,5	0,148 pa^2	0,080 pa^2	0,306 pa^2	0,226 pa^2
∞	0,167 pa^2	—	0,333 pa^2	—

Проведем теперь исследование системы уравнений (47). Докажем, что эта система регулярная и имеет ограниченное решение, при данных свободных членах. Оценим для этого сумму модулей коэффициентов (кроме диагонального) в каждом уравнении системы. Имеем для $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+3^2}\right)^2 + \ldots + \left[\frac{n^2}{n^2+(n-2)^2}\right]^2 + \left[\frac{n^2}{n^2+(n+2)^2}\right]^2 + \ldots <$$

$$< \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{n}{2}-1} \left[\frac{n^2}{n^2+(2x+1)^2}\right]^2 dx + \frac{8}{3n} + \int\limits_{\frac{n}{2}}^{\infty} \left[\frac{n^2}{n^2+(2x+1)^2}\right]^2 dx <$$

$$< \frac{n}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{n}{2}\left[\frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u\right]_0^{\infty} = \frac{\pi n}{8}.$$

Первая сумма заменена на интеграл и остаточный член по формуле касательных. Вторая — бесконечная сумма — заменена прямо на интеграл, так как кривая обращена уже вогнутостью вверх.

Диагональный же коэффициент при неизвестном A_n равняется по абсолютной величине

$$\alpha_n + \left(\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)^2 = \alpha_n + \frac{1}{4} > \frac{n\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$\left[\text{в том, что } \alpha_n > \frac{n\pi}{8} \text{ легко убедиться, пользуясь (46)}\right]$. Деля уравнения системы (47) на этот диагональный коэффициент $\alpha_n + \frac{1}{4}$ и перенося все члены, кроме диагонального, направо, приведем систему (47) к нормальному виду. При этом сумма модулей коэффициентов при неизвестных в правой части будет

$$\sum_{p=1}^{\infty} |c_{n,p}| = \frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{4}}\left[\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+3^2}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(\frac{n^2}{n^2+(n-2)^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+(n+2)^2}\right)^2 + \ldots\right] < \frac{\frac{n\pi}{8}}{\frac{n\pi}{8}+\frac{1}{4}} < 1 - \frac{1}{n\pi} < 1.$$

Это неравенство показывает, что получившаяся система регулярная и что она имеет, наверное, ограниченное решение при свободных членах порядка не ниже $\frac{1}{n\pi}$, т. е. $< \frac{K}{n\pi}$. Но после деления на $\alpha_n + \frac{1}{4}$, свободные члены 1 заменяются на

$$\frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{4}} < \frac{1}{\frac{n\pi}{8}} = 8 \cdot \frac{1}{n\pi},$$

т. е. удовлетворяют этому условию для $K = 8$. Итак, система уравнений (47) действительно имеет ограниченное решение, и метод последовательных приближений представляет сходящийся процесс. [1])

Для доказательства единственности ограниченного решения системы (47) применим метод, указанный в следствии к теореме IIб (стр. 40). Именно, введем вместо неизвестных A_n новые неизвестные C_n, полагая

$$A_n = nC_n \quad (n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots).$$

Относительно неизвестных C_n система (47) [см. также (45)] принимает вид

$$C_n = \frac{n^3}{\alpha_n + \frac{1}{4}} \sum_{k=1,3,\ldots}{}' \frac{k(-1)^{\frac{k+n+2}{2}}}{(n^2+k^2)^2} C_k + \frac{1}{n\left(\alpha_n + \frac{1}{4}\right)} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots),$$

где штрих у знака суммы показывает, что k не следует придавать значение $k = n$.

Требуется проверить регулярность полученной системы. Для этого оценим сумму модулей ее коэффициентов. Имеем:

$$\sum_{k=1,3,5,\ldots}{}' \frac{k}{(n^2+k^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n^2+1)^2} + \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{(n^2+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=3,5,\ldots,n-2} \frac{k}{(n^2+k^2)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4n^3}\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n^3} +$$

$$+ \sum_{k=n+2,\ldots} \frac{k}{(n^2+k^2)^2} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{x\,dx}{(n^2+x^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{x\,dx}{(n^2+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x}{(n^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

При этом мы, пользуясь тем, что функция $\frac{x}{(n^2+x^2)^2}$ в промежутке $(0, n)$ обращена вогнутостью вниз, сумму в квадратных скобках, соответствующую формуле трапеций (с интервалом $h = 2$), заменили на $\int_1^n$, а бесконечную сумму

---

[1]) Изложенное ниже прямое доказательство единственности решения предложено П. С. Бондаренко [2]. Ранее Р. О. Кузьминым [2] было дано доказательство единственности решения этой системы, опирающееся на теорему единственности для бигармонической проблемы.

заменили на $\int\limits_n^\infty$, пользуясь тем, что в промежутке $(n, +\infty)$ эта функция убывающая. Поэтому, вводя множитель, стоящий перед знаком суммы, находим:

$$\frac{n^3}{\alpha_n + \frac{1}{4}} \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{k}{(n^2+k^2)^2} \leqslant \frac{\frac{1}{4}n + \frac{1}{2}\frac{n^3}{(n^2+1)^2}}{\alpha_n + \frac{1}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{1}{4}n + \frac{1}{8}}{\frac{n\pi}{8} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\frac{\pi}{8}\left(n + \frac{2}{\pi}\right)} \leqslant \frac{2}{\pi}.$$

Полученное неравенство показывает, что преобразованная система оказалась даже вполне регулярной, а потому она, а следовательно, и первоначальная система имеют единственное ограниченное решение.

§ 4. Применение двойных рядов к решению граничных задач

1. Постановка задачи. Основания метода. Пусть ставится задача: найти решение уравнения эллиптического типа

$$M(u) = f(x, y) \tag{1}$$

при нулевых граничных условиях:

$$P(u) = 0 \quad \text{на контуре } \Gamma \tag{2}$$

и различных свободных членах $f(x, y)$. Заметим, что требование нулевых граничных условий не уменьшает общности. В самом деле, если бы граничные условия были не нулевые: $P(u) = \varphi(s)$ на Г, то, построив произвольную функцию $u_0(x, y)$, удовлетворяющую этим граничным условиям, мы для разности $u_1 = u - u_0$ имели бы, очевидно, нулевые граничные условия: $P(u_1) = P(u) - P(u_0) = 0$ на Г и уравнение

$$M(u_1) = M(u) - M(u_0) = f(x, y) - M[u_0(x, y)],$$

т. е. того же типа, что и (1), лишь с другим свободным членом.

Для решения поставленной задачи часто оказывается полезным использование двойных рядов. Предположим, что мы нашли функции $u_{i,k}(x, y)$ удовлетворяющие нулевым граничным условиям

$$P[u_{i,k}(x, y)] = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{3}$$

и пусть

$$M[u_{i,k}(x, y)] = v_{i,k}(x, y). \tag{4}$$

Допустим, что мы умеем разложить функцию $f(x, y)$ в ряд по функциям $v_{i, k}$:

$$f(x, y)=\sum_{i, k=1}^{\infty} a_{i, k} v_{i, k}(x, y), \tag{5}$$

тогда искомое решение граничной задачи можем формально написать в виде

$$u(x, y)=\sum_{i, k=1}^{\infty} a_{i, k} u_{i, k}(x, y). \tag{6}$$

Укажем теперь способ нахождения функций $u_{i, k}(x, y)$. За них можно во многих случаях принять с успехом фундаментальные функции уравнения

$$M(u)=\lambda u \tag{7}$$

при граничном условии $P(u)=0$. Эти функции, вообще говоря, ортогональны между собой и образуют полную систему функций в данной области. Предположим, что подобные функции $u_{i, k}(x, y)$ и числа $\lambda_{i, k}$ найдены так, что

$$M(u_{i, k})=\lambda_{i, k} u_{i, k}. \tag{8}$$

Тогда, если функция $f(x, y)$ разложена в ряд

$$f(x, y)=\sum_{i, k=1}^{\infty} A_{i, k} u_{i, k}(x, y), \tag{9}$$

то искомое решение $u(x, y)$ пишется в виде

$$u(x, y)=\sum_{i, k=1}^{\infty} \frac{A_{i, k}}{\lambda_{i, k}} u_{i, k}(x, y). \tag{10}$$

Фундаментальные функции $u_{i, k}$ часто оказывается возможным отыскать по методу Фурье.

2. Уравнение Пуассона для прямоугольника. Поставим следующую задачу: найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u=f(x, y), \tag{11}$$

обращающееся в нуль на границах некоторого прямоугольника:

$$u=0 \text{ при } x=0, \quad x=a, \quad y=0, \quad y=b. \tag{12}$$

В § 1 нами было приведено решение с помощью метода Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ при произвольных граничных условиях. Это решение давало в известных случаях возможность найти решение и поставленной сейчас задачи относительно уравнения Пуассона. В этом номере мы даем с помощью двойных рядов решение задачи в общем случае при произвольной функции $f(x, y)$.

Поступая как сказано выше, ищем по методу Фурье фундаментальные функции уравнения

$$\Delta u = \lambda u.$$

Подставляя в него $u = X(x) \cdot Y(y)$, будем иметь:

$$X''Y + XY'' = \lambda XY$$

или

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

для чего необходимо

$$\frac{X''}{X} = p; \qquad \frac{Y''}{Y} = q,$$

где p и q — постоянные. Определяя далее функции $X(x)$ и $Y(y)$ из этих уравнений и из граничных условий

$$X(a) = X(0) = 0; \qquad Y(b) = Y(0) = 0,$$

найдем, что нетривиальное решение существует только при условии

$$p = -\frac{m^2\pi^2}{a^2}; \qquad q = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

и это решение будет

$$X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a}; \qquad Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Функции

$$u_{m,n}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13}$$

образуют полную систему ортогональных функций в прямоугольнике $(0, a; 0, b)$. Далее,

$$\Delta X_m Y_n = -\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) X_m Y_n. \tag{14}$$

Функцию $f(x, y)$ можем, вообще говоря, разложить в двойной ряд Фурье,[1]) т. е. в ряд по функциям $u_{m,n}$:

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{15}$$

где

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta. \tag{16}$$

---

[1]) См., например, И. И. Привалов [1], § 27 или Г. П. Толстов [1], гл. VII.

Тогда искомое решение u ввиду (10) можно написать так:

$$u(x, y) = -\sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad (17)$$

Полученному решению (17) можно придать несколько иной вид. Подставив в (17) вместо коэффициентов Фурье $a_{m,n}$ их выражения (16), получим:

$$u(x, y) = -\sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{4\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)ab} \int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^a\int_0^b\left[-\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\right] f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (18)$$

Если рассмотреть отдельно стоящую в скобках функцию четырех переменных

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}, \qquad (19)$$

то с помощью этой функции, от свободного члена не зависящей, решение задачи при любом свободном члене можем записать весьма просто:

$$u(x, y) = \int_0^a\int_0^b G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (20)$$

Относительно функции $G(x, y; \xi, \eta)$ заметим, что ряд для нее сходится всегда и дает конечное значение, за исключением случая $\xi = x$; $\eta = y$, когда она оказывается бесконечной логарифмического порядка. Таким образом, двойной интеграл, дающий $u(x, y)$, является вообще несобственным, однако подынтегральная функция наверное абсолютно интегрируема. Функция $G(x, y; \xi, \eta)$ представляет, с точностью до постоянного множителя, функцию Грина для прямоугольника.[1])

Заметим, что с помощью двойных тригонометрических рядов уравнение Пуассона может решаться для прямоугольника не только в случае задачи Дирихле, но и при других граничных условиях, например

[1]) См. Гурса [1], т. III, ч. 1, стр. 184.

в случае задачи Неймана. Кроме того, с помощью двойных рядов могут решаться граничные задачи для прямоугольника не только в случае уравнения Пуассона, но и для всех уравнений второго порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами, не содержащих смешанной производной и первых производных, т. е. для уравнений вида

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+cu=f(x,\ y). \tag{21}$$

3. Применение к уравнениям четвертого порядка. Общие принципы применения двойных рядов к решению уравнений 4-го порядка остаются те же, поэтому мы ограничимся рассмотрением только двух частных задач.

1. *Свободно закрепленная по краям прямоугольная пластинка.* Дифференциальное уравнение для прогиба ее есть

$$N\cdot\Delta\Delta u=N\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)=p(x,\ y), \tag{22}$$

где $p(x,\ y)$ — единичная нагрузка и граничные условия

$$\left.\begin{aligned} &u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad \text{при } x=0;\ x=a;\\ &u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{при } y=0;\ y=b. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Частный случай этой задачи при p постоянном был уже рассмотрен в n° 3 § 1. Основные функции, удовлетворяющие граничным условиям, здесь будут, как легко проверить,

$$\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Поэтому решение ищем в виде двойного ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,\,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Применяя операцию $N\Delta\Delta$ к одному члену, убеждаемся, что

$$N\Delta\Delta A_{m,\,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}= \\ =N\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\pi^4 A_{m,\,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{24}$$

т. е. при подстановке в правую часть этот член приобретает множитель

$$N\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2.$$

Это показывает, что коэффициенты Фурье $u(x, y)$ должны отличаться от коэффициентов Фурье $p(x, y)$ множителем, обратным по величине.

Таким образом, если

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{25}$$

то

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{N\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \tag{26}$$

где

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, d\xi \, d\eta. \tag{27}$$

Ряд для $u(x, y)$ будет наверное абсолютно сходящимся, причем сходятся также ряды для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, служащие для определения моментов.

Рассмотрим в качестве примера изгиб под действием сосредоточенной силы величиной P, приложенной в точке $x=\xi$, $y=\eta$. Такую силу можно рассматривать как предельную для равномерной нагрузки интенсивности $\frac{P}{\delta^2}$, приложенной на прямоугольнике $(\xi, \xi+\delta; \eta, \eta+\delta)$ при $\delta \to 0$. Найдем предел коэффициента $a_{m,n}$ при $\delta \to 0$. Имеем для данного случая, пользуясь теоремой о среднем:

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_{\xi}^{\xi+\delta} \int_{\eta}^{\eta+\delta} \frac{P}{\delta^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy =$$

$$= \frac{4}{ab} \frac{P}{\delta^2} \sin \frac{m\pi}{a} (\xi + \theta\delta) \sin \frac{n\pi}{b} (\eta + \theta_1 \delta) \cdot \delta^2 \to \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}. \tag{28}$$

Таким образом, прогиб под действием сосредоточенной силы P в точке (ξ, η) дается рядом

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4P}{N\pi^4 ab} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \tag{29}$$

Отметим, что для $u(x, y)$ и здесь имеем сходящийся ряд и предельный переход в $u(x, y)$ был допустим; однако, если бы мы заменили $a_{m,n}$ на его предельное значение в ряде для $p(x, y)$, мы получили бы расходящийся ряд, но в переходе к пределу в этом ряде мы не нуждались.

Подставим выражение (27) коэффициента $a_{m,n}$ в решение $u(x, y)$, тогда мы его можем представить в виде:

$$u(x, y)=\int_0^a\int_0^b\left[\frac{4}{N\pi^4 ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\right]\times$$
$$\times p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{30}$$

Или, если обозначить стоящую в скобках функцию четырех переменных через $G(x, y, \xi, \eta)$, то

$$u(x, y)=\int_0^a\int_0^b G(x, y, \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{31}$$

Функция $G(x, y, \xi, \eta)$ называется **функцией Грина** для данной задачи; с помощью этой функции может быть получено в написанном виде решение для любого вида свободного члена, т. е. для любой нагрузки. Эта функция представляет, как убеждаемся, сравнивая с (29), прогиб для случая единичной силы $P=1$, приложенной в точке (ξ, η), поэтому и естественно, что прогиб под нагрузкой интенсивности $p(x, y)$ дается формулой (31). Действительно, прогиб в точке (x, y) под действием силы $p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, приложенной в точке (ξ, η), будет равен, согласно (29), $G(x, y, \xi, \eta)\; p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, а потому прогиб под действием всей нагрузки интенсивности $p(\xi, \eta)$ дается интегралом (31).

С помощью двойных рядов может решаться бигармоническое уравнение и при различных других условиях. Примеры таких решений в применении к безбалочным перекрытиям можно найти в книге Леве.[1]) Следует заметить, однако, что получение окончательных результатов при помощи двойных рядов требует весьма значительных вычислений.

2. *Прямоугольная пластинка на упругом основании.* Ее уравнение отличается от обычного уравнения пластинки тем, что к нагрузке добавляется со знаком минус реакция основания, пропорциональная прогибу, а потому уравнение будет

$$N\Delta\Delta u = p(x, y) - kNu$$

или

$$N\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+ku\right)=p(x, y).$$

Граничные условия и нагрузку примем соответствующими случаю бесконечного безбалочного перекрытия.

Перекрытие представляет бесконечную плиту, в которую на определенных расстояниях опираются колонны (рис. 3). В основаниях колонн на плиту действует поэтому, на определенном прямоугольнике, равномерная нагрузка интенсивности p. Относительно линий

[1]) Д. Леве [1].

раздела между колоннами должна быть полная симметрия, т. е. u является относительно этих линий четной функцией, а потому граничные условия для u будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \text{ при } x=\pm a;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 \text{ при } y=\pm b.$$

При решении задачи достаточно, очевидно, ограничиться прямоугольником $(-a,\ a;\ -b;\ b)$.

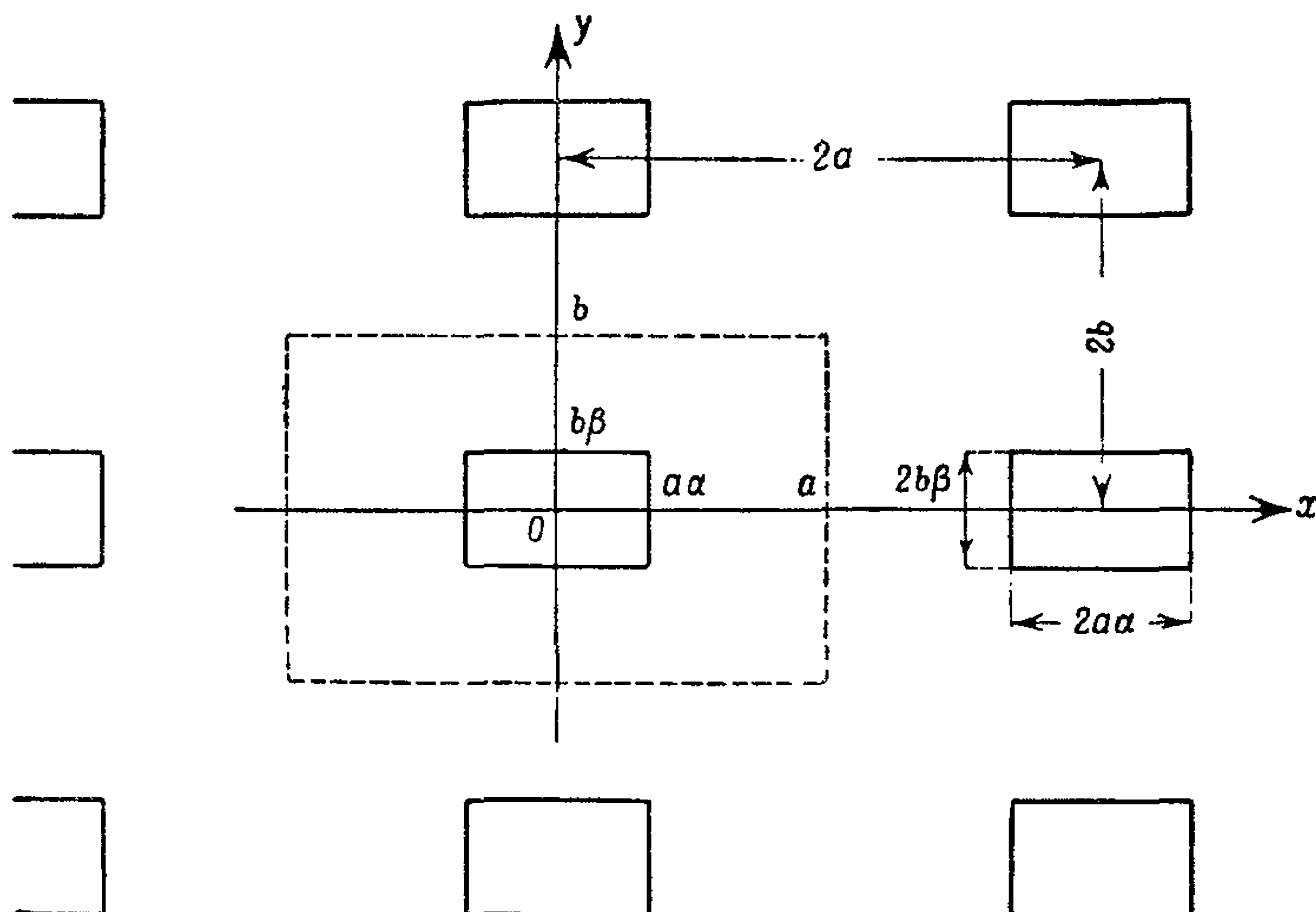


Рис. 3.

Правая часть — интенсивность нагрузки $p(x,\ y)$ — есть функция, равная p в прямоугольнике $(-a\alpha,\ a\alpha;\ -b\beta,\ b\beta)$ и нулю в остальном.

За фундаментальные решения, ввиду четности искомой функции u, следует принять

$$\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\quad (m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

так как для этих функций граничные условия, очевидно, удовлетворены.

Так же как и в предыдущем случае, найдем, что, если $a_{m,n}$ — коэффициенты $p(x,\ y)$ в разложении по этим функциям, т. е. если

$$p(x,\ y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

то

$$u(x,\ y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{m,n}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}}{N\left[\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k\right]}.$$

Для разложения функции $p(x, y)$ в ряд, ее удобно в данном случае представить в виде произведения функции от одного x на функцию от y. Очевидно,

$$p(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y),$$

где $\varphi(x)$ — функция, равная $\sqrt{p}$ в $(-a\alpha, a\alpha)$ и нулю в остальном, а $\psi(y)$ равна $\sqrt{p}$ в $(-b\beta, b\beta)$ и нулю в остальном. Разлагая эти функции в ряд по косинусам, имеем:

$$c_m = \frac{2}{a}\int_0^{a\alpha} \sqrt{p}\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx = \sqrt{p}\left[\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{a}\right]_0^{a\alpha} = \frac{2\sqrt{p}}{m\pi}\sin m\pi\alpha$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$c_0 = \frac{2}{a}\int_0^{a\alpha}\sqrt{p}\,dx = 2\sqrt{p}\,\alpha$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \sqrt{p}\,\alpha + 2\sqrt{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a};$$

аналогично

$$\psi(y) = \sqrt{p}\,\beta + 2\sqrt{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Тогда

$$p(x, y) = \varphi(x)\,\psi(y) = p\alpha\beta + 2p\beta\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a} +$$

$$+ 2p\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{b} + \frac{4p}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha\,\sin n\pi\beta\,\cos\frac{m\pi x}{a}\,\cos\frac{n\pi y}{b}}{mn}.$$

Наконец,

$$u(x, y) = \frac{p\alpha\beta}{kN} + \frac{2p\beta}{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha\cos\frac{m\pi x}{a}}{m\pi\left[\pi^4\left(\frac{m}{a}\right)^4 + k\right]} +$$

$$+ \frac{2p\alpha}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta\cos\frac{n\pi y}{b}}{n\pi\left[\pi^4\left(\frac{n}{b}\right)^4 + k\right]} +$$

$$+ \frac{4p}{\pi^2 N}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha\,\sin n\pi\beta}{mn\left\{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2\pi^4 + k\right\}}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

Заметим, что с помощью двойных тригонометрических рядов могут с успехом решаться вообще граничные задачи для прямоугольника в случае уравнений вида

$$A\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+B\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+C\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+E\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+Fu=f(x,\ y),$$

где A, B, C, D, E, F — постоянные и $B^2-4AC<0$.[1])

§ 5. Улучшение сходимости рядов, получаемых при решении

1. Общие принципы, на которых основаны методы улучшения сходимости. При приближенном решении многих задач анализа случается часто, что данный процесс, чаще всего ряд, оказывается сходящимся весьма медленно, что делает его почти, а иногда совсем, непригодным для действительного получения решения. Такая медленная сходимость вызывается обычно наличием особенности в данной задаче. Общий метод для уничтожения медленной сходимости состоит в выделении особенности.

Рассмотрим сперва его применение к более простой задаче — о вычислении суммы медленно сходящихся рядов с постоянными членами.

Пусть нам требуется, например, определить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots$$

Для непосредственного нахождения суммы этого ряда с точностью 0,001 нужно взять в нем 1000 членов. Поступим иначе: выделим из общего члена низшие степени $\frac{1}{n}$, вызывающие медленную сходимость. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4(n^2+1)}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^6}.$$

---

[1]) Для решения граничных задач, в особенности в случае бесконечных областей, может применяться аппарат интегралов Фурье. Ряд примеров успешного его использования в бигармонических проблемах можно найти в монографии С. С. Голушкевича [1]. Эффективный метод численного нахождения значений осциллирующих интегралов типа интеграла Фурье предложен М. В. Николаевой [1].

Первые два ряда, медленно сходящиеся, как известно, суммируются точно и имеют сумму $\frac{\pi^2}{6}$ и $\frac{\pi^4}{90}$, последний сходится столь быстро, что для вычисления его суммы ограничиваемся 4 членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{80} + \frac{1}{810} + \frac{1}{4352} \approx 0,514.$$

Окончательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} + 0,514 = 1,076.$$

Для улучшения сходимости в данном случае и в других аналогичных, когда общий член есть рациональная функция, можно было бы вместо рядов $\sum \frac{1}{n^2}$ и $\sum \frac{1}{n^4}$ воспользоваться следующими, еще более элементарными:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18}.$$

Так, выделяя последовательно из общего члена данного ряда члены вышенаписанных рядов с соответственно подобранными коэффициентами имеем:

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-1}{(n^2+1)(n^2+n)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n-3}{(n^2+n)(n+2)(n^2+1)}.$$

Первые два ряда дают в сумме $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, сумму последнего находим приближенно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{(n^2+n)(n+2)(n^2+1)} \approx -\frac{2}{12} - \frac{1}{120} + \frac{1}{2040} + \frac{2}{5460} \approx -0,174,$$

и окончательно сумма ряда будет равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{5}{4} - 0,174 = 1,076.$$ [1]

---

[1]) Подробнее об улучшении сходимости рядов с постоянными членами см. А. А. Марков [2] и Я. С. Безикович [1].

2. Метод А. Н. Крылова улучшения сходимости тригонометрических рядов.[1]) Всякая функция, удовлетворяющая так называемым условиям Дирихле, имеет, как известно, сходящийся ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx);$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx;\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Однако коэффициенты a_n и b_n, вообще говоря, уменьшаются не быстро, и тогда ряд Фурье сходится медленно, а потому часто мало удобен для представления функции. Ряд Фурье будет быстро сходящимся, если сама функция $f(x)$ и некоторое число ее первых производных непрерывны и периодичны. В самом деле, пусть, например, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и $f'''(x)$ непрерывны и периодичны, а $f^{\mathrm{IV}}(x)$ интегрируема. Обозначим через a_n и b_n коэффициенты Фурье $f(x)$; $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ — $f'(x)$; $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ — $f''(x)$; $a_n^{(3)}$, $b_n^{(3)}$ — $f'''(x)$; $a_n^{(4)}$, $b_n^{(4)}$ — $f^{\mathrm{IV}}(x)$.

Интегрируя по частям выражения для a_n и b_n и пользуясь периодичностью $f(x)$, получим:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\left[\frac{1}{\pi}f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx=-\frac{b_n^{(1)}}{n};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{a_n^{(1)}}{n}.$$

Применяя далее те же формулы последовательно для $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, найдем:

$$a_n=-\frac{b_n^{(1)}}{n}=-\frac{a_n^{(2)}}{n^2}=\frac{b_n^{(3)}}{n^3}=\frac{a_n^{(4)}}{n^4};$$

$$b_n=\frac{a_n^{(1)}}{n}=-\frac{b_n^{(2)}}{n^2}=-\frac{a_n^{(3)}}{n^3}=\frac{b_n^{(4)}}{n^4}.$$

---

[1]) А. Н. Крылов [2].

Числа $a_n^{(4)}$ и $b_n^{(4)}$, как коэффициенты Фурье интегрируемой функции, стремятся к нулю при $n \to \infty$, а потому ряд Фурье для $f(x)$ сходится в этом случае быстрее, чем ряд $\sum \frac{1}{n^4}$.[1])

Итак, для того чтобы иметь быстро сходящийся ряд Фурье для функции, нужно добиться непрерывности ее и ее первых производных. Этого можно часто достигнуть, выделяя из данной функции элементарного вида функцию, имеющую те же разрывы, и такую, что и ее первые производные имеют те же разрывы, что и первые производные данной функции.

Построение такого рода функций совершается весьма элементарно, когда разрывы данной функции и ее первых производных имеют простой характер. Исходим из известного и легко проверяемого разложения

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{при } -2\pi < x < 0, \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{при } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{при } x = 0, 2\pi, -2\pi, \end{cases}$$

которое дает периодическую функцию, терпящую разрыв со скачком величиной π в точке $x = 0$:

$$\sigma(+0) - \sigma(-0) = \pi$$

и в остальном линейную. Функцию того же вида, но имеющую разрыв не при $x = 0$, а при некотором $x = x_0$ $(0 < x_0 < 2\pi)$, представляет функция $\sigma(x - x_0)$. Последняя функция определяется равенствами:

$$\sigma(x - x_0) = \begin{cases} \frac{-\pi + (x_0 - x)}{2} & \text{при } 0 \leqslant x < x_0, \\ \frac{\pi + (x_0 - x)}{2} & \text{при } x_0 < x \leqslant 2\pi, \\ 0 & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

и ряд Фурье для нее будет:

$$\sigma(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - x_0)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx_0 \sin nx - \sin nx_0 \cos nx}{n}.$$

---

[1]) Если $f^{(IV)}(x)$ — функция ограниченной вариации (в частности, если она удовлетворяет условию Дирихле), то ее коэффициенты Фурье имеют порядок $\frac{1}{n}$, и ряд для $f(x)$ сходится, как $\sum \frac{1}{n^5}$.

Для того чтобы получить функцию элементарного вида, имеющую разрыв в первой производной, интегрируем почленно ряд для функции $\sigma(x)$; найдем:

$$\int_0^x \sigma(x)\,dx = -\frac{(\pi-x)^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right]_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

Так как $\sum \frac{1}{n^2}$ оказывается свободным членом ряда Фурье функции, стоящей слева, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}-\frac{(\pi-x)^2}{4}\right]dx=\frac{\pi^2}{6}.$$

Вводим поэтому окончательно периодическую функцию

$$\sigma_1(x)=\int_0^{\infty}\sigma(x)\,dx-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi+x)^2}{4} & \text{при } -2\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi-x)^2}{4} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

для которой, очевидно,

$$\sigma_1'(+0)-\sigma_1'(-0)=\pi.$$

Так же, как и для $\sigma(x)$, можно ввести функцию $\sigma_1(x-x_0)$, производная которой имеет скачок величиной π в точке $x=x_0$. Интегрируя еще раз, введем периодическую функцию

$$\sigma_2(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{3\pi x^2-2\pi^2 x-x^3}{12} \qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

имеющую скачок во второй производной в точке $x=0$. Таким же образом можем построить и дальнейшие функции $\sigma_s(x)$.

Пусть теперь $f(x)$ — функция, имеющая всюду, за исключением конечного числа точек, ограниченные производные k-го порядка, причем она сама и эти производные непрерывны всюду за исключением конечного числа точек, где они имеют разрыв 1-го рода. Производная $(k+1)$-го порядка удовлетворяет условию Дирихле. Пусть точки разрыва функции $f(x)$ есть $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{m_0}^{(0)}$, а величины скачков:

$$h_s=f(x_s^{(0)}+0)-f(x_s^{(0)}-0) \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,m_0).$$

Пусть у j-й производной имеются разрывы в точках $x_1^{(j)}, \ldots, x_{m_j}^{(j)}$ с величиной скачка

$$h_s^{(j)} = f^{(j)}(x_s^{(j)}+0) - f^{(j)}(x_s^{(j)}-0) \quad \begin{pmatrix} s=1, 2, \ldots, m_j \\ j=1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}.$$

Мы можем теперь функцию $f(x)$ представить в виде:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{m_0} \frac{1}{\pi} h_s \sigma(x - x_s^{(0)}) + \sum_{s=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} h_s^{(1)} \sigma_1(x - x_s^{(1)}) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{s=1}^{m_k} \frac{1}{\pi} h_s^{(k)} \sigma_k(x - x_s^{(k)}) + \varphi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ при этом будет уже непрерывна вместе с k первыми производными, а $(k+1)$-я ее производная удовлетворяет условию Дирихле. Проверим, например, что $\varphi(x)$ непрерывна. Сомнение могут вызывать только точки $x_s^{(0)}$, но в такой точке все члены непрерывны за исключением $f(x)$ и $\frac{1}{\pi} h_s \sigma(x - x_s^{(0)})$. Однако разность двух последних функций все же непрерывна, так как, вычитая из предела справа предел слева, имеем:

$$\left[f(x_s^{(0)}+0) - \frac{1}{\pi} h_s \sigma(x_s^{(0)} + 0 - x_s^{(0)})\right] -$$
$$- \left[f(x_s^{(0)}-0) - \frac{1}{\pi} h_s \sigma(x_s^{(0)} - 0 - x_s^{(0)})\right] =$$
$$= f(x_s^{(0)}+0) - f(x_s^{(0)}-0) - \frac{1}{\pi} h_s [\sigma(+0) - \sigma(-0)] = 0.$$

Итак, рассмотренная разность непрерывна, а потому и $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_s^{(0)}$.

Аналогичным образом можно убедиться и в непрерывности k первых производных функции $\varphi(x)$; наконец, $(k+1)$-я ее производная, так же как и $f^{(k+1)}(x)$, удовлетворяет условию Дирихле. Поэтому ряд Фурье для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin n)$$

будет сходиться весьма быстро, именно α_n и β_n будут порядка $\frac{1}{n^{k+2}}$. Ряд Фурье для функции $f(x)$, если принять во внимание ряды для

$\sigma(x)$, $\sigma_1(x)$ и т. д., будет:

$$f(x)=\sum_{s=1}^{m_0}\frac{1}{\pi}h_s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-x_s^{(0)}\right)}{n}-\sum_{s=1}^{m_1}\frac{1}{\pi}h_s^{(1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\left(x-x_s^{(1)}\right)}{n^2}-$$
$$-\sum_{s=1}^{m_2}\frac{1}{\pi}h_s^{(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-x_s^{(2)}\right)}{n^3}+\ldots+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

Мы выделили, таким образом, из ряда Фурье функции $f(x)$ медленно сходящиеся части, которые элементарно суммируются, и в остатке получили быстро сходящийся ряд.

Чаще, впрочем, приходится решать задачу в обратном порядке. Именно мы, не имея самой функции, получаем тем или иным способом ее ряд Фурье, обычно в результате решения какой-либо задачи математической физики. Во многих случаях оказывается, что этот ряд медленно сходится, тогда он весьма мало пригоден для вычисления значений самой функции, для нахождения же ее производных он вовсе непригоден, так как для них получаются из него расходящиеся ряды. В этом случае часто удается, не обращаясь к порождающей функции, в самом ряде провести улучшение сходимости. Это удобнее всего осуществить, выделяя медленно сходящиеся части из ряда и суммируя их, на основании известных рядов для $\sigma(x-x_0)$, $\sigma_1(x-x_0)$ и т. д. Разберем два примера.

1. Рассмотрим ряд

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots$$

Его можно преобразовать так:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{2}\,\frac{\sin nx}{n}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-\pi)}{n}=\frac{1}{2}\sigma(x)-\frac{1}{2}\sigma(x-\pi).$$

Мы видим, что в данном случае этот способ дал возможность просуммировать ряд до конца. Именно, если воспользуемся выражением $\sigma(x)$, то найдем, что сумма этого ряда равна

$$S(x)=\frac{1}{2}[\sigma(x)-\sigma(x-\pi)]=$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi-x}{2}-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4} & \text{при } 0<x<\pi,\\ \frac{1}{2}\left[\frac{\pi-x}{2}-\frac{2\pi-x}{2}\right]=-\frac{\pi}{4} & \text{при } \pi<x<2\pi,\\ 0 & \text{при } x=0,\ \pi,\ 2\pi.\end{cases}$$

2. Пусть дан ряд Фурье

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Выделив из коэффициента низшие степени $\frac{1}{n}$, имеем:

$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5-n^3}.$$

После подстановки этого выражения ряд Фурье разбивается на три:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx}{n} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\sin nx - \\ - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^5-n^3}\sin nx.$$

Пользуясь, как и в предыдущем примере, рядами для $\sigma(x)$ и $\sigma_2(x)$, мы можем просуммировать первые два ряда в конечном виде:

$$S_1(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx}{n} = \\ = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n} = \\ = -\frac{1}{\pi}\left[\sigma\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$S_2(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx}{n^3} = \\ = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} = \\ = \frac{1}{\pi}\left[\sigma_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Пользуясь определением функций $\sigma(x)$ и $\sigma_2(x)$ и их периодичностью, находим легко

$$S_1(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \dfrac{x-\pi}{\pi} & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right),\\ 0 & \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right); \end{cases}$$

$$S_2(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^3}{6\pi}+\dfrac{\pi}{24}x & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right),\\ -\dfrac{(x-\pi)^3}{6\pi}+\dfrac{\pi}{24}(x-\pi) & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\right). \end{cases}$$

Таким образом, окончательно для функции $f(x)$ получаем:

$$f(x)=S_1(x)+S_2(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

Это представление функции, конечно, во много раз более удобно, чем первоначальное, так как позволяет легко вычислять значения функции $f(x)$ и ее первых производных.

Заметим, что улучшение сходимости рядов Фурье может применяться не только по отношению к рядам Фурье рассмотренного вида, т. е. к рядам Фурье, порождающая функция которых ограничена со своими первыми производными, но и к рядам Фурье других функций. Однако тогда для суммирования медленно сходящихся частей приведенные выше ряды для $\sigma(x)$, $\sigma_1(x)$ и т. д. могут оказаться недостаточными. Во многих случаях здесь можно использовать ряд

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\ldots=$$
$$=-\operatorname{Re}\left[\ln\left(1-e^{ix}\right)\right]=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$$

и ряды, получающиеся аналогичным образом, например:

$$\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4}+\ldots=$$
$$=(1-\cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\sin x+\cos x.$$

С помощью этих рядов и рядов, указанных прежде, может быть проведено улучшение сходимости во всяком ряде вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_0+B\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_0\right)\sin nx+\right.$$
$$\left.+\left(C\left(\frac{1}{n}\right)\sin nx_0+D\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx_0\right)\cos nx\right],$$

где $A(1/n)$, $B(1/n)$, $C(1/n)$ и $D(1/n)$ — аналитические функции от $1/n$ для малых значений аргумента.

3. Ряды Фурье с усиленной сходимостью. Как было указано в предыдущем номере, периодическая функция, имеющая $k-1$ непрерывных производных и k-ю, удовлетворяющую условию Дирихле, имеет коэффициенты Фурье порядка $1/n^{k+1}$. Функция не периодическая, имеющая даже производные всех порядков внутри промежутка $(0, 2\pi)$, но такая, что она сама или одна из ее производных имеют различные значения при $x=0$ и $x=2\pi$, имеет медленно сходящееся разложение. А. С. Малиевым[1]) был предложен способ получения быстро сходящихся тригонометрических рядов, могущих служить для представления функций этого вида.

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $(0, \pi)$ и имеет в нем непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка и k-ю, удовлетворяющую условию Дирихле. Эта функция может быть разложена в ряд по $\sin 2nx$ и $\cos 2nx$, либо же она может быть разложена в ряд по одним $\sin nx$ или по одним $\cos nx$, что соответствует нечетному или четному ее продолжению на промежуток $(-\pi, 0)$. Эти ряды будут, однако, вообще говоря, сходиться медленно. Если мы не заинтересованы в специальном характере тригонометрического ряда, с помощью которого желаем представить $f(x)$, то мы можем продолжить ее на промежуток $(-\pi, 0)$ любым образом. Мы добьемся порядка $1/n^{k+1}$ в ее коэффициентах Фурье, если определим ее в промежутке $(-\pi, \pi)$ таким образом, чтобы при периодическом продолжении ее на $(-\infty, +\infty)$ получалась бы функция, у которой существуют производные до k-го порядка и k-я производная удовлетворяет условию Дирихле. Для осуществления такого продолжения достаточно $f(x)$ взять в промежутке $(-\pi, 0)$ равной $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — полином $(2k-1)$-й степени, который в точках 0 и $-\pi$ имеет вместе с производными до $(k-1)$-го порядка значения, равные соответствующим значениям $f(x)$ и ее производных при $x=0$ и $x=\pi$, именно:

$$\begin{array}{ll}\varphi(0)=f(0), & \varphi(-\pi)=f(\pi),\\ \varphi'(0)=f'(0), & \varphi'(-\pi)=f'(\pi),\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ \varphi^{(k-1)}(0)=f^{(k-1)}(0), & \varphi^{(k-1)}(-\pi)=f^{(k-1)}(\pi).\end{array}$$

Требуемый здесь полином $\varphi(x)$ удобнее всего искать в форме:

$$\varphi(x)=(x+\pi)^k\left(A_0+A_1x+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\right)+$$
$$+x^k\left[B_0+B_1(x+\pi)+\ldots+\frac{B_{k-1}}{(k-1)!}(x+\pi)^{k-1}\right],$$

[1]) А. С. Малиев [1, 2].

тогда коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$; $B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ определяются, очевидно, из следующих двух систем уравнений:

$$\varphi(0) = \pi^k A_0 = f(0),$$
$$\varphi'(0) = k\pi^{k-1}A_0 + \pi^k A_1 = f'(0),$$
$$\varphi''(0) = C_2^0 k(k-1)\pi^{k-2}A_0 + C_2^1 k\pi^{k-1}A_1 + C_2^2\pi^k A_2 = f''(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{(k-1)}(0) = C_{k-1}^0 k(k-1)\ldots 2\pi A_0 + C_{k-1}^1 k(k-1)\ldots 3\pi^2 A_1 + \ldots + C_{k-1}^{k-2} k\pi^{k-1}A_{k-2} + C_{k-1}^{k-1}\pi^k A_{k-1} = f^{k-1}(0);$$

$$\varphi(-\pi) = (-\pi)^k B_0 = f(\pi),$$
$$\varphi'(-\pi) = k(-\pi)^{k-1}B_0 + (-\pi)^k B_1 = f'(\pi),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{(k-1)}(-\pi) = C_{k-1}^0 k(k-1)\ldots 2(-\pi)B_0 + C_{k-1}^1 k(k-1)\ldots 3(-\pi)^2 B_1 + \ldots + C_{k-1}^{k-1}(-\pi)^k B_{k-1} = f^{(k-1)}(\pi).$$

Если полином $\varphi(x)$ определен указанным способом, то функция

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leqslant x \leqslant \pi), \\ \varphi(x) & (-\pi \leqslant x \leqslant 0), \end{cases}$$

продолженная дальше периодически, имеет $k-1$ непрерывных производных и k-ю, удовлетворяющую условию Дирихле. Ряд Фурье ее сходится как $1/n^{k+1}$, и так как в промежутке $(0, \pi)$ он дает функцию $f(x)$, то для последней мы и получили требуемое представление.

Пример. Построим быстро сходящийся ряд Фурье для функции

$$f(x) = x - \frac{\pi}{2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Желая получить сходимость порядка $1/n^4$, нужно принять $k=3$.

Системы уравнений для данного случая принимают вид:

$$\pi^3 A_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad -\pi^3 B_0 = \frac{\pi}{2},$$
$$3\pi^2 A_0 + \pi^3 A_1 = 1, \qquad 3\pi^2 B_0 - \pi^3 B_1 = 1,$$
$$6\pi A_0 + 6\pi^2 A_1 + \pi^3 A_2 = 0; \qquad -6\pi B_0 + 6\pi^2 B_1 - \pi^3 B_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi^2}, \quad A_1 = \frac{5}{2\pi^3}, \quad A_2 = -\frac{12}{\pi^4};$$
$$B_0 = -\frac{1}{2\pi^2}, \quad B_1 = -\frac{5}{2\pi^3}, \quad B_2 = -\frac{12}{\pi^4},$$

тогда

$$\varphi(x) = (x+\pi)^3\left(-\frac{1}{2\pi^2} + \frac{5}{2\pi^3}x - \frac{6}{\pi^4}x^2\right) + x^3\left[-\frac{1}{2\pi^2} - \frac{5}{2\pi^3}(x+\pi) - \frac{6}{\pi^4}(x+\pi)^2\right]$$

Разлагая теперь в ряд Фурье функцию

$$\psi(x)=\begin{cases} x-\frac{\pi}{2} & (0\leqslant x\leqslant\pi),\\ \varphi(x) & (-\pi\leqslant x\leqslant 0),\end{cases}$$

получим для $f(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ требуемое разложение:

$$f(x)=\frac{240}{\pi^8}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{12}{\pi^2 n^6}\right)\cos nx+\frac{1440}{\pi^4}\sum_{n=2,4,6,\ldots}\frac{1}{n^5}\sin nx.$$

Этот метод улучшения сходимости может найти применение при решении задачи о разложении некоторой функции в ряд по данным функциям, не образующим ортогональную систему, — задачи важной, как мы видели в § 3, для некоторых методов решения граничных задач. Пусть требуется разложить функцию $g(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ по заданным функциям $f_n(x)$. Для нахождения коэффициентов такого разложения в § 3 был рассмотрен метод бесконечных систем уравнений. Если воспользоваться улучшением сходимости, то систему можем составить так. Продолжим функции $g(x)$ и $f_n(x)$ на $(-\pi, \pi)$ и составим для них быстро сходящиеся ряды:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$f_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n^{(m)}\cos nx+\beta_n^{(m)}\sin nx).$$

Разыскивая тогда разложение $g(x)$ в виде

$$g(x)=A_1 f_1(x)+A_2 f_2(x)+\ldots,$$

получим, после подстановки рядов и приравнивания коэффициентов, систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n^{(m)}A_m=a_n;\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\beta_n^{(m)}A_m=b_n.$$

Эта система может оказаться более удобной для решения, чем составленная обычным способом, благодаря тому, что ее коэффициенты убывают гораздо быстрее.

4. Общие методы улучшения сходимости при приближенном решении граничных задач.[1] Бесконечные ряды, которые мы находили при решении различных граничных задач, получались в результате известного преобразования ряда Фурье граничной функции. Именно, коэффициенты ряда, дающего решение, определялись по коэффициентам Фурье граничной функции. Таким образом, для быстроты сходимости ряда, дающего решение, имеет существенное значение порядок коэффициентов Фурье граничной функции, т. е. в конечном счете, как мы видели в предшествующем n° 2, правильность граничной функции, точнее говоря, непрерывность ее и ее первых произ-

[1] См. Л. В. Канторович [4, 8].

водных. Таким же образом и при решении с помощью двойных рядов уравнений с правой частью, например $\Delta u = f(x, y)$; $\Delta\Delta u = f(x, y)$, в ряд, дающий решение, входят коэффициенты двойного ряда Фурье функции $f(x, y)$, и поэтому, для того чтобы обеспечить быструю сходимость, необходима регулярность функции $f(x, y)$.

Итак, для быстрой сходимости рядов, дающих решение, существенное, необходимое значение имеет регулярность самой задачи, именно существование и непрерывность первых производных: 1) у граничной функции, 2) у функции, стоящей в правой части. Как мы увидим ниже, выполнение этих двух условий является необходимым для быстрой сходимости и при других способах приближенного решения граничных задач, а не только при пользовании методом бесконечных рядов.

Изложенные соображения приводят к такой мысли. Вместо того, чтобы улучшать сходимость в рядах, получающихся в результате решения, поступить иначе — провести сначала предварительное, так сказать, „профилактическое" улучшение поставленной граничной задачи, т. е. добиться выполнения двух вышеуказанных условий, а тогда ряды, получающиеся в результате решения, будут сами собой быстро сходящимися.

Общий прием для приведения задачи к регулярной состоит в следующем. Пусть речь идет о нахождении решения уравнения 2-го порядка эллиптического типа:

$$M[u(x, y)] = f(x, y),$$

обращающегося в данную функцию $\varphi(s)$ на контуре L, ограничивающем область D.

Будем искать функцию $u_0(x, y)$ такую, что

$$M[u_0(x, y)] = f_0(x, y), \qquad u_0(x, y) = \varphi_0(s) \text{ на } L,$$

причем $f_0(x, y)$ и $\varphi_0(s)$ — любые функции, имеющие лишь те же особенности, что $f(x, y)$ и $\varphi(s)$, т. е. такие, что разности

$$f(x, y) - f_0(x, y) = f_1(x, y), \qquad \varphi(s) - \varphi_0(s) = \varphi_1(s)$$

непрерывны вместе с некоторым числом первых производных. Если такая функция $u_0(x, y)$ построена, то, вводя новую неизвестную функцию

$$u_1(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y),$$

имеем для ее нахождения уже регулярную задачу:

$$M[u_1(x, y)] = f_1(x, y), \qquad u_1(x, y) = \varphi_1(s) \text{ на контуре } L.$$

После того как $u_1(x, y)$ будет найдена, добавляя известную функцию $u_0(x, y)$, получим искомое u. Отметим еще, что уничтожение особенностей в $f(x, y)$ и в $\varphi(s)$ можно производить последовательно. Именно, сначала можно уничтожить особенности в $f(x, y)$,

при этом граничные данные могут измениться, а затем уничтожить особенности в граничной функции, но тогда, чтобы правая часть не изменилась, нужно искать $u_0(x, y)$, являющуюся решением однородного уравнения $M(u)=0$. Дадим теперь приемы построения требуемой функции $u_0(x, y)$ для уничтожения особенностей того и другого вида.

I. *Устранение особенностей в функции, заданной на контуре.* Пусть функция $\varphi(s)$, заданная на контуре, имеет особые точки. Предположим, что она непрерывна вместе с несколькими первыми производными всюду, кроме отдельных точек, а именно точек разрыва первого рода самой функции $\varphi(s)$ и угловых точек кривой $\sigma=\varphi(s)$, т. е. точек разрыва первого рода производной $\varphi(s)$ и т. п.

Пусть нам нужно устранить некоторую особенность функции $\varphi(s)$. Предположим для определенности, что в точке M_1, соответствующей $s=s_1$, она имеет разрыв первого рода со скачком

$$\varphi(s_1+0)-\varphi(s_1-0)=\sigma.$$

Возьмем простого вида область D_0, содержащую целиком данную область D и ограниченную некоторым контуром L_0, имеющим вблизи точки M_1 общую часть с контуром L. Задав на контуре L_0 простейшим образом граничные значения, образующие скачок величины σ в точке M_1, найдем в области D_0 решение уравнения $M(u)=0$, удовлетворяющее этим условиям. Тогда, беря для u_1 за контурные значения разность между $\varphi(s)$ и значениями $u_0(x, y)$ на L, мы и уничтожаем разрыв в точке M. Заметим, что требование наличия общей части у контуров L и L_0 вблизи точки M_1 можно, с известными оговорками, заменить более слабым требованием, что в точке M_1 контур L_0 касается L.

В качестве области D_0 удобнее всего пользоваться кругом, внешностью круга и полуплоскостью, соответствующим образом приставляя их к данному контуру.

Наиболее удобно этот прием проводится в случае, когда оператор $M(u)$ есть оператор Лапласа Δu. В этом случае можно построить решения, регулярные во всех точках, кроме одной, и имеющие в ней данную особенность.

Пусть на контуре L точка M_1 есть точка разрыва первого рода $\varphi(s)$. Предположим, что в точке M_1 имеется касательная и контур L вблизи M лежит по одну сторону касательной. Не ограничивая общности, можем считать, что точка M_1 есть $(0, 0)$, а касательная есть ось ординат, и контур L (вблизи M_1) лежит вправо от нее. Тогда функция

$$U_0(x, y)=\frac{\sigma}{\pi}\,\mathrm{I}(\ln z)=\frac{\sigma}{\pi}\,\mathrm{I}[\ln(x+iy)]=\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ ^{1)}$$

[1]) $\mathrm{I}(\ln z)$ обозначает мнимую часть $\ln z$.

есть регулярная гармоническая функция всюду, кроме начала координат; в начале координат при движении вдоль контура L она претерпевает разрыв первого рода со скачком σ. Действительно,

$$\text{при } y<0 \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\sigma}{2};$$

$$\text{при } y>0 \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\sigma}{2},$$

так как $x>0$ и x представляет бесконечно малую высшего порядка по сравнению с y при приближении по кривой L. Таким образом, $U_0(x, y)$ имеет скачок величиной σ на кривой L и, вычитая эту функцию, мы уничтожаем соответствующий разрыв у $\varphi(s)$. Таким же образом может быть удален и разрыв в производной, только здесь нужно воспользоваться функцией

$$U_0^*(x, y) = -\frac{\sigma^*}{\pi}\operatorname{Re}\{(x+iy)[\ln(x+iy)-1]\} =$$
$$= -\frac{\sigma^*}{\pi}\left[x(\ln\sqrt{x^2+y^2}-1) - y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right].$$

Эта функция $U_0^*(x, y)$ имеет в начале координат разрыв в производной по дуге контура L со скачком величины σ^*. Нужно, правда, для установления этого предположить, что касательная к контуру L непрерывно меняется вблизи M_1 и что $\lim xy^{-1}\ln y = 0$. Второе из этих условий наверное выполнено, если в точке M_1 конечна кривизна кривой L. Вычитая функцию $U_0^*(x, y)$, мы можем устранить скачок величины σ^* в производной. Таким образом, всегда (при сделанных выше предположениях) разрывы первого рода в самой контурной функции и ее производной по дуге могут быть устранены, в случае граничной задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y)$, с помощью функций $U_0(x, y)$ и $U_0^*(x, y)$.

Заметим, что на самой оси ординат контурные значения функций $U_0(x, y)$ и $U_0^*(x, y)$ при приближении со стороны правой полуплоскости будут соответственно

$$U_0(0, y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } y=0,\\ -\frac{\sigma}{2} & \text{при } y<0; \end{cases} \qquad U_0^*(0, y) = \begin{cases} \frac{\sigma^*}{2}y & \text{при } y\geqslant 0,\\ -\frac{\sigma^*}{2}y & \text{при } y\leqslant 0. \end{cases}$$

Это показывает, что и в случае, когда вблизи точки M_1 контур имеет прямолинейный участок, можно пользоваться для уничтожения особенности функциями $U_0(x, y)$ и $U_0^*(x, y)$.

Нетрудно построить также и функции, дающие возможность устранить разрывы в производных высшего порядка.

Рассмотрим теперь применение изложенного метода к двум частным областям, именно к кругу и кольцу.

1. Задача Дирихле для круга. Требуется найти функцию, гармоническую в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ и обращающуюся на контуре в данную функцию $\varphi(\theta)$. Решение задачи дается, как мы знаем, в виде интеграла Пуассона или ряда

$$u(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\lambda)+r^2}\varphi(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad (1)$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $\varphi(\theta)$. Предположим, что функция $\varphi(\theta)$ имеет особую точку; пусть для определенности это будет разрыв со скачком σ при $\theta=0$. Тогда коэффициенты Фурье функции $\varphi(\theta)$ a_n и b_n будут порядка $\frac{1}{n}$, и написанный выше ряд, дающий решение, для вычислений не пригоден; также мало удобно здесь и вычисление интеграла. Следуя указанному методу, мы должны вычесть из $u(x, y)$ функцию $U_0(x, y)$, которую нужно приспособить к точке $(R, 0)$. Таким образом, нужно заменить в ней x на $R-x$ и взять именно функцию

$$\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{R-x}.$$

Обозначим через $\varphi_0(\theta)$ ее контурные значения, тогда, вводя $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, найдем:

$$\varphi_0(\theta)=\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R\sin\theta}{R-R\cos\theta}=\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sigma}{\pi}\frac{\pi-\theta}{2} \text{ для } 0<\theta<2\pi.$$

Ряд Фурье для функции $\varphi_0(\theta)$ будет:

$$\varphi_0(\theta)=\frac{\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}.$$

Теперь нужно определить гармоническую функцию $u(r, \theta)$ по контурной функции

$$\varphi_1(\theta)=\varphi(\theta)-\varphi_0(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)-\frac{\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

и к полученной функции $u_1(r, \theta)$ добавить

$$U_0(x, y)=\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{R-x}=\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{r\sin\theta}{R-r\cos\theta}.$$

Мы видим, что в данном случае применение приема улучшения граничных условий свелось, по существу, к тому, что мы выделили из ряда (1) медленно сходящуюся часть

$$\frac{\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

и просуммировали ее в конечном виде, т. е. провели улучшение сходимости тригонометрического ряда.

Таким образом, в этом простейшем случае метод улучшения граничных условий эквивалентен улучшению сходимости тригонометрических рядов.

Аналогичным образом, если при $\theta=0$ функция $\varphi(\theta)$ имеет скачок в первой производной величины σ^*, то нужно из функции $u(x, y)$ вычесть функцию $U_0^*(x, y)$, в которой x заменено на $R-x$, т. е. вычесть

$$-\frac{\sigma^*}{\pi}\left[(R-x)(\ln\sqrt{(R-x)^2+y^2}-1)-y\operatorname{arctg}\frac{y}{R-x}\right]=$$
$$=-\frac{\sigma^*}{\pi}\operatorname{Re}\left[(R-x+iy)(\ln(R-x+iy)-1)\right].$$

В таком случае из контурной функции надо будет вычесть функцию $\varphi_0^*(\theta)$, получающуюся из вышенаписанной при подстановке $x=R\cos\theta$; $y=R\sin\theta$:

$$\varphi_0^*(\theta)=-\frac{\sigma^*}{\pi}\Big[R(1-\cos\theta)(\ln R\sqrt{2-2\cos\theta}-1)-$$
$$-\frac{\pi-\theta}{2}R\sin\theta\Big]=-\frac{\sigma^*}{\pi}\operatorname{Re}\left[(R-Re^{-i\theta})(\ln(R-Re^{-i\theta})-1)\right].$$

2. Задача Дирихле для кольца. Функция, гармоническая в кольце $R_1<r<R_2$ и обращающаяся на окружностях $r=R_1$ и $r=R_2$ в заданные функции $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$, может быть дана, как известно из § 1, n° 2, в виде ряда:

$$u=\frac{\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}}{2(\ln R_1-\ln R_2)}\ln r+\frac{\alpha_0^{(1)}\ln R_2-\alpha_0^{(2)}\ln R_1}{2(\ln R_2-\ln R_1)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(\alpha_k^{(1)}R_2^{-k}-\alpha_k^{(2)}R_1^{-k})\,r^k+(\alpha_k^{(1)}R_2^k-\alpha_k^{(2)}R_1^k)\,r^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^k}\cos k\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{(\beta_k^{(1)}R_2^{-k}-\beta_k^{(2)}R_1^{-k})\,r^k+(\beta_k^{(1)}R_2^k-\beta_k^{(2)}R_1^k)\,r^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^k}\sin k\theta\right].\qquad(2)$$

Здесь $\alpha_k^{(1)}$ и $\beta_k^{(1)}$ — коэффициенты Фурье $\varphi_1(\theta)$, а $\alpha_k^{(2)}$ и $\beta_k^{(2)}$ — $\varphi_2(\theta)$. Сходимость вблизи окружностей $r=R_1$ и $r=R_2$ будет здесь та же, что и у тригонометрических рядов функций $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$, т. е. весьма медленная, если функции φ_1 и φ_2 имеют особенности.

В данном случае мы не будем проводить улучшение порядка сходимости, уничтожая отдельные особые точки, а уничтожим в один

прием все особенности следующим образом. Составим две функции: $u_1^*(r,\theta)$ — решение задачи Дирихле для внешности круга радиуса $r=R_1$ при контурных значениях $\varphi_1(\theta)$, и $u_2^*(r,\theta)$ — решение задачи Дирихле для внутренности круга радиуса $r=R_2$ при граничной функции $\varphi_2(\theta)$:

$$u_1^*(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-R_1^2}{R_1^2-2rR_1\cos(\theta-\lambda)+r^2}\varphi_1(\lambda)\,d\lambda=$$
$$=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}\cos k\theta+\beta_k^{(1)}\sin k\theta)\left(\frac{R_1}{r}\right)^k;$$

$$u_2^*(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_2^2-r^2}{R_2^2-2rR_2\cos(\theta-\lambda)+r^2}\varphi_2(\lambda)\,d\lambda=$$
$$=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(2)}\cos k\theta+\beta_k^{(2)}\sin k\theta)\left(\frac{r}{R_2}\right)^k.$$

Вычтем их из функции $u(r,\theta)$, тогда для разности $v(r,\theta)=u(r,\theta)-u_1^*(r,\theta)-u_2^*(r,\theta)$ контурные условия будут:

$$v(R_1,\theta)=-\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(2)}\cos k\theta+\beta_k^{(2)}\sin k\theta)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k,$$
$$v(R_2,\theta)=-\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(1)}\cos k\theta+\beta_k^{(1)}\sin k\theta)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k.$$

Для определения функции $v(r,\theta)$ мы получили задачу того же вида, что ранее для $u(r,\theta)$, но здесь коэффициенты Фурье контурных функций имеют по крайней мере порядок прогрессии $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k$, поэтому ряд (2) для функции $v(r,\theta)$ будет сходиться наверное как прогрессия со знаменателем $\frac{R_1}{R_2}$. Именно, это будет ряд:

$$v(r,\theta)=-\frac{\alpha_0^{(2)}-\alpha_0^{(1)}}{2(\ln R_1-\ln R_2)}\ln r-\frac{\alpha_0^{(2)}\ln R_2-\alpha_0^{(1)}\ln R_1}{2(\ln R_2-\ln R_1)}-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha_k^{(2)}R_2^{-k}-\alpha_k^{(1)}R_1^{-k})\,r^k-(\alpha_k^{(2)}R_2^k-\alpha_k^{(1)}R_1^k)\,r^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^k}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k\cos k\theta-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\beta_k^{(2)}R_2^{-k}-\beta_k^{(1)}R_1^{-k})\,r^k-(\beta_k^{(2)}R_2^k-\beta_k^{(1)}R_1^k)\,r^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_1^{-k}R_2^k}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k\sin k\theta.$$

В том, что этот ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем R_1/R_2, можно убедиться и непосредственно.

После того как функция $v(r, \theta)$ найдена, добавив к ней $u_1^*(r, \theta)$ и $u_2^*(r, \theta)$, получим $u(r, \theta)$; что касается функций $u_1^*(r, \theta)$ и $u_2^*(r, \theta)$, то при их нахождении с помощью ряда или интеграла Пуассона можно применить указанные выше приемы улучшения сходимости для круга, в простейших же случаях они найдутся в конечном виде.

Изложенный здесь прием применим не только для кольца, но и для других многосвязных областей, и позволяет переходить от неаналитических к аналитическим контурным условиям.[1])

II. *Устранение особенностей в правой части.* Уничтожение особенностей функции $f(x, y)$ может быть проведено с помощью приемов, построенных на тех же принципах, что и выше. Не входя в подробности, укажем два подобных приема.

1. Пусть функция $f(x, y)$ или ее частные производные имеют разрывы. Выделим функцию $f_0(x, y)$ простого вида и такую, что разность $f(x, y) - f_0(x, y)$ непрерывна вместе со своими первыми частными производными. Функцию $f_0(x, y)$ продолжим в некоторую простого вида область D_0, содержащую D; пусть получившаяся функция есть $f_0^*(x, y)$. Для этой функции решим уравнение $M(u) = f_0^*$ в области D_0 при любых граничных условиях; это решение и даст требуемую функцию $u_0(x, y)$.

Область D_0 желательно брать такую, для которой мы можем решить уравнение $M(u) = f$ с любым свободным членом. Например, для уравнения Пуассона можно брать прямоугольник. Тогда для нахождения разности $u_1 = u - u_0$ получится задача с регулярной правой частью. За функцию $f_0(x, y)$ можно взять, в частности, самую функцию $f(x, y)$, тогда для u_1 будем иметь однородное уравнение.

2. Можно поступить и иначе. Для уничтожения данной особенности f достаточно построить какую-нибудь функцию $u_0(x, y)$, для которой результат операции $M(u_0)$ имеет ту же особенность, что и f. Вычитая u_0 из u, мы и уничтожим эту особенность.

Например, если $M(u) = \Delta u$ и функция $f(x, y)$ терпит вдоль линии $x = x_1$ скачок величиной $\sigma(y)$, за такую функцию можно принять:

$$u_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - x_1)^2 \sigma(y) & \text{при } x \geqslant x_1, \\ 0 & \text{при } x \leqslant x_1. \end{cases}$$

Оба приема изменят контурные значения, поэтому после применения их могут появиться особенности первого рода — в граничных условиях. Эти особенности могут быть уничтожены рассмотренными выше (стр. 106) способами. Отметим, что при этом свободный член $f(x, y)$ уже не изменится.

---

[1]) Другие приемы и примеры улучшения сходимости рядов, встречающихся при решении задач математической физики, можно найти в гл. XII монографии Г. А. Гринберга [1].

ГЛАВА II

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Замена интегрального уравнения системой линейных уравнений

1. Основные определения. Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy=f(x),$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, $K(x, y)$ — ядро уравнения, $f(x)$ — свободный член, λ — численный параметр. Если свободный член отсутствует, получаем однородное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Уравнением первого рода называется уравнение вида:

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy=f(x).$$

К решению интегральных уравнений второго рода может быть приведено большинство граничных задач математической физики.[1]

Основных проблем, возникающих при решении уравнения второго рода, две.

1. Непосредственное нахождение решения неоднородного уравнения при определенном значении параметра λ и определенной или произвольной правой части.

---

[1] По теории интегральных уравнений см. И. И. Привалов [2], Гурса [1], т. III, ч. 2, В. И. Смирнов [1], т. IV, И. Г. Петровский [2], С. Г. Михлин [4].

2. Задача о решении однородного уравнения. Однородное уравнение, как правило, имеет только тривиальное нулевое решение $\varphi(x) = 0$, и лишь при исключительных значениях параметра λ оно имеет нетривиальное решение. Эти исключительные значения λ называются *собственными значениями* для данного интегрального уравнения, а соответствующие решения однородного уравнения — *собственными функциями*. Вторая задача — это и есть задача отыскания собственных значений и собственных функций интегрального уравнения.

В приложениях мы встречаемся с решением задач первого типа при применении интегральных уравнений к уравнениям эллиптического типа, а с задачами второго рода — главным образом при применении к уравнениям гиперболического и параболического типа. Следует указать, что решение второй задачи представляет более трудный и более общий вопрос — именно, если известны все собственные числа λ и отвечающие им собственные функции, то, как это следует из общей теории интегральных уравнений, решение задачи 1 может быть легко получено.

2. Замена интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений. Пусть дано интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x). \tag{1}$$

Входящий в это равенство интеграл мы можем с помощью любой формулы приближенного интегрирования приближенно заменить на некоторое простого вида выражение, не содержащее знака интеграла. Действительно, всякая линейная формула приближенного интегрирования имеет вид:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \psi(x_k) + \rho, \tag{2}$$

где A_k и x_k — постоянные для данного промежутка и для данной формулы числа, а ρ — погрешность. При этом обычно $A_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{n} A_k = b - a$.[1])

Например, для *формулы прямоугольников*:

$$x_1 = a; \quad x_2 = a + \frac{b-a}{n}; \ \ldots; \quad x_n = a + (n-1)\frac{b-a}{n}; \quad A_k = \frac{b-a}{n};$$

---

[1]) Для формул, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем, будем предполагать эти условия выполненными.

По поводу формул приближенного интегрирования см. А. Н. Крылов [3], Я. С. Безикович [1], В. И. Крылов [2].

для *формулы трапеций*:

$$x_1 = a;\ x_2 = a + \frac{b-a}{n-1};\ \ldots;\ x_n = b;$$

$$A_1 = A_n = \frac{b-a}{2n-2};\quad A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = \frac{b-a}{n-1};$$

для *формулы касательных*:

$$x_1 = a + \frac{b-a}{2n};\quad x_2 = a + 3\frac{b-a}{2n};\ldots;\qquad x_n = a + (2n-1)\frac{b-a}{2n};$$

$$A_k = \frac{b-a}{n};$$

для *формулы Чебышева*:

$$x_k = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}x_k^{(n)};$$

$$A_k = \frac{b-a}{n},$$

где $x_k^{(n)}$ — точки Чебышева.

Наконец, для *формулы Гаусса*:

$$x_k = a + (b-a)\,x_k^{(n)};$$

$$A_k = (b-a)\ A_k^{(n)},$$

где $x_k^{(n)}$ — точки Гаусса (корни полинома Лежандра), а $A_k^{(n)}$ — коэффициенты Гаусса, составленные для интервала (0,1).

После применения формулы (2) к интегралу в левой части уравнения (1) приходим к равенству:

$$\varphi(x) - \lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x,\ x_k)\,\varphi(x_k) = f(x) + \lambda\rho(x). \tag{3}$$

В частности, полагая в равенстве (3) последовательно

$$x = x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,$$

приходим к следующей системе уравнений, которой удовлетворяют числа $\varphi(x_i)$ — значения искомой функции в точках x_i:

$$\varphi(x_i) - \lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i,\ x_k)\,\varphi(x_k) = f(x_i) + \lambda\rho_i \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{4}$$

где $\rho_i = \rho(x_i)$. Отбрасывая в правой части равенств (4) малую величину ρ_i, точное значение которой нам неизвестно, мы получим следую-

щую систему n уравнений с n неизвестными $\tilde{\varphi}(x_1), \tilde{\varphi}(x_2), \ldots, \tilde{\varphi}(x_n)$:

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k) \tilde{\varphi}(x_k) = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\varphi}(x_1)[1 - \lambda A_1 K(x_1, x_1)] - \lambda\tilde{\varphi}(x_2) A_2 K(x_1, x_2) - \ldots \\ &\qquad \ldots - \lambda\tilde{\varphi}(x_n) A_n K(x_1, x_n) = f(x_1), \\ &-\lambda\tilde{\varphi}(x_1) A_1 K(x_2, x_1) + \tilde{\varphi}(x_2)[1 - \lambda A_2 K(x_2, x_2)] - \ldots \\ &\qquad \ldots - \lambda\tilde{\varphi}(x_n) A_n K(x_2, x_n) = f(x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-\lambda\tilde{\varphi}(x_1) A_1 K(x_n, x_1) - \lambda\tilde{\varphi}(x_2) A_2 K(x_n, x_2) - \ldots \\ &\qquad \ldots + \tilde{\varphi}(x_n)[1 - \lambda A_n K(x_n, x_n)] = f(x_n). \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Решив эту систему уравнений, мы найдем приближения $\tilde{\varphi}(x_1)$, $\tilde{\varphi}(x_2), \ldots, \tilde{\varphi}(x_n)$ для значений искомой функции $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots$, $\varphi(x_n)$.[1]) По этим значениям приближенное значение самой функции может быть найдено с помощью того или иного приема интерполирования. В данном специальном случае удобнее всего получить это значение — $\tilde{\varphi}(x)$, — исходя из равенства (3), отбросив в нем $\rho(x)$ и заменив $\varphi(x_i)$ на $\tilde{\varphi}(x_i)$. Тогда $\tilde{\varphi}(x)$ напишется в виде:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k) \tilde{\varphi}(x_k). \tag{6}$$

Очевидно, что точность результата, полученного при замене интегрального уравнения (1) системой линейных уравнений (5), будет тем выше, чем меньшую погрешность мы совершаем, заменяя интеграл суммой. Точная оценка погрешности, получающейся при применении этого метода, составляет содержание следующего номера, здесь мы сделаем лишь несколько замечаний общего характера.

Прежде всего остановимся на выборе формулы механических квадратур. Ввиду того, что увеличение числа вводимых ординат неизвестной функции чрезвычайно повышает трудность решения системы уравнений (5), желательно вообще использовать наиболее точные из

---

[1]) Замена интегрального уравнения системой линейных уравнений применялась уже в фундаментальных работах Фредгольма и Гильберта для теоретических исследований. Там всегда использовалась формула прямоугольников. Использование этой замены для приближенного решения систематически проведено в работах финского математика Нистрёма [1, 2]; последним было предложено также применение в этом вопросе других, более точных, формул приближенного интегрирования.

формул, именно формулы Гаусса и Чебышева. При этом формула Гаусса несколько более точна, но зато в формуле Чебышева все A_k равны между собой, и потому при ее применении система (5) имеет более простой и удобный вид. Отметим еще, что в специальном случае, когда функции $f(x)$ и $K(x, y)$ периодичны и имеют период, равный $b-a$ (тогда периодично, конечно, и решение $\varphi(x)$), — ту же точность, что и формула Гаусса, дает формула прямоугольников, и тогда, конечно, удобнее пользоваться последней. При этом система (5) имеет следующий весьма простой вид, если взять для определенности $a=0$, $b=2\pi$:

$$\tilde{\varphi}\left(i\frac{2\pi}{n}\right)-\frac{2\pi\lambda}{n}\sum_{k=0}^{n-1}K\left(i\frac{2\pi}{n}, k\frac{2\pi}{n}\right)\tilde{\varphi}\left(k\frac{2\pi}{n}\right)=f\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$(i=0,1,\ldots, n-1).$$

В случае промежутка интегрирования вида $(0, b)$, если ядро представляет четную или нечетную функцию своих переменных, а правая часть f той же четности, что и ядро по x, целесообразно применение специальных формул для интегрирования четных и нечетных функций.[1]) Если неизвестная функция или ядро заведомо обращаются в 0 на концах промежутка, целесообразно применение квадратурной формулы А. А. Маркова.[2])

Применение высших формул квадратур может быть оправдано только в случае, если подынтегральная функция правильна (имеет некоторое число производных). В данном случае нужна, следовательно, правильность $K(x, y)$ и $\varphi(y)$, но правильность последней будет обеспечена, если кроме ядра и свободный член $f(x)$ будет правилен.[3])

Полезно указать, что в некоторых случаях, когда в самой поставленной задаче нет правильности, ее можно все же добиться. Например, если ядро правильно, а свободный член имеет особенности, то, вводя новую неизвестную функцию

$$\psi(x)=\varphi(x)-f(x), \tag{7}$$

мы для нее получим уравнение

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(x, y)\psi(y)\,dy=\lambda\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy, \tag{8}$$

---

[1]) См. Л. В. Канторович [20].

[2]) В. И. Крылов [2], гл. 9, Р. Б. Аккерман [1]

[3]) Действительно, если, например, существуют и непрерывны $f^{(n)}(x)$ и $K_{x^n}^{(n)}(x, y)$, то, дифференцируя n раз по x интегральное уравнение (1), убедимся, что существует n-я производная $\varphi(x)$:

$$\varphi^{(n)}(x)=\lambda\int_a^b K_{x^n}^{(n)}(x, y)\varphi(y)\,dy+f^{(n)}(x).$$

т. е. уравнение того же вида, что и для $\varphi(x)$, но в котором свободный член уже правилен.

Рассмотрим еще случай, когда ядро имеет особенность при $y=x$, как это часто бывает, именно оно само или его производная $K'_y(x, y)$ терпят разрыв непрерывности при $y=x$. В этом случае выгодно, прежде чем заменять интегральное уравнение на систему линейных уравнений, преобразовать его следующим образом:

$$\varphi(x)\left[1-\lambda\int_a^b K(x, y)\,dy\right]-\lambda\int_a^b K(x, y)[\varphi(y)-\varphi(x)]\,dy=f(x). \quad (9)$$

Действительно, если теперь рассмотрим второй интеграл, стоящий в левой части, то мы увидим, что, благодаря наличию множителя $[\varphi(y)-\varphi(x)]$, обращающегося в нуль при $y=x$, его подынтегральная функция оказывается более правильной, чем $K(x, y)\,\varphi(y)$, и замена этого интеграла на конечную сумму более оправданной, чем для первоначального. Что касается $\int_a^b K(x, y)\,dy$, то, так как он не содержит неизвестной функции, он может быть вычислен без труда и даст некоторую определенную функцию $\chi(x)$. Строя для уравнения (9) систему уравнений так же, как построена система (5) для уравнения (1), придем к системе:

$$\tilde{\varphi}(x_i)[1-\lambda\chi(x_i)]-\lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)[\tilde{\varphi}(x_k)-\tilde{\varphi}(x_i)]=f(x_i) \quad (10)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

решение которой дает лучшее приближение в этом случае, чем решение системы (5).[1])

Если ядро $K(x, y)$ обращается в бесконечность при $y=x$, как это имеет место для сингулярных интегральных уравнений, то i-е слагаемое в левой части (10) теряет смысл. В этом случае его целесообразно заменить на выражение, которое получится, если применить ту или иную формулу интерполирования к функции $K(x_i, y)\times$ $\times[\varphi(y)-\varphi(x_i)]$. В частности, если воспользоваться линейным интер-

[1]) См. Л. В. Канторович [4]. Здесь указан и другой способ уничтожения особенности в ядре при $y=x$.

Другая возможность применения данного метода в случае наличия особенностей у ядра, основанная на использовании квадратурных формул В. А. Стеклова, разработана Н. К. Артмеладзе [1]. По этому вопросу см. также Нистрём [3] и Гильдебрандт [1].

полированием, то выражение $K(x_i, x_i)[\tilde{\varphi}(x_i) - \tilde{\varphi}(x_i)]$ нужно заменить на

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}} K(x_i, x_{i-1})[\tilde{\varphi}(x_{i-1}) - \tilde{\varphi}(x_i)] + \\ + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} K(x_i, x_{i+1})[\tilde{\varphi}(x_{i+1}) - \tilde{\varphi}(x_i)].$$

Наконец, следует указать, что метод замены интегрального уравнения на систему алгебраических пригоден также и для приближенного решения задачи о нахождении собственных чисел и собственных функций. Именно для решения этой задачи вместо системы уравнений (5) нужно рассмотреть соответствующую однородную систему

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)\, \tilde{\varphi}(x_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (11)$$

Определитель этой системы будет

$$\Delta(\lambda) = \\ = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_1 K(x_1, x_1) & -\lambda A_2 K(x_1, x_2) & \ldots & -\lambda A_n K(x_1, x_n) \\ -\lambda A_1 K(x_2, x_1) & 1-\lambda A_2 K(x_2, x_2) & \ldots & -\lambda A_n K(x_2, x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda A_1 K(x_n, x_1) & -\lambda A_2 K(x_n, x_2) & \ldots & 1-\lambda A_n K(x_n, x_n) \end{vmatrix} \qquad (12)$$

Приравнивая нулю этот определитель и решая соответствующее уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0, \qquad (13)$$

найдем те значения λ, при которых система уравнений (11) имеет решение $\{\tilde{\varphi}(x_i)\}$, не равное тождественно нулю.[1]) Эти значения λ и будут приближенными значениями для собственных чисел. Далее, беря значения λ, равные корням уравнения (13), и составляя при

[1]) Метод раскрытия определителя „векового“ уравнения (12), значительно превосходящий ранее известные, был предложен акад. А. Н. Крыловым [1]. Другой интересный метод для той же цели был дан А. М. Данилевским [1]. Целесообразны в применении и непосредственные методы нахождения собственных чисел и векторов матрицы без раскрытия векового определителя. Наконец, для той же задачи может применяться так называемый метод наискорейшего спуска, см. Л. В. Канторович [17], [18], гл. IV, § 4 или Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XV, § 2.

Детальное изложение различных численных методов для задачи о собственных числах матриц дано в книге Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой [1]. См. также И. М. Гельфанд [1], Дополнение I.

этих значениях λ соответствующие им независимые решения системы уравнений (11), мы можем получить приближенные выражения для собственных функций уравнения.[1]

Необходимо сказать, что даже в том случае, когда ядро было симметрично $K(x, y) = K(y, x)$, матрица системы уравнений (11) может оказаться несимметричной, что несколько затрудняет решение уравнения (13). Поэтому здесь целесообразно симметризовать матрицу, для чего достаточно умножить i-е уравнение системы (11) на $\sqrt{A_i}$ и ввести вместо $\tilde{\varphi}(x_i)$ новые неизвестные $z_i = \sqrt{A_i}\,\tilde{\varphi}(x_i)$.

3. Оценка погрешности, получающейся в результате замены интегрального уравнения системой линейных уравнений. Мы рассмотрим подробно оценку погрешности при решении первой задачи о нахождении функции $\varphi(x)$.

Если обозначить через $\Delta_{i,k}$ алгебраическое дополнение элемента i-й строки и k-го столбца в определителе $\Delta(\lambda)$ (12), то решение системы уравнений (5) может быть написано в виде:

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} f(x_k)}{\Delta(\lambda)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Оценим, насколько эти приближенные значения отличаются от точных значений искомой функции $\varphi(x)$ в тех же точках:

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_2), \ldots,\ \varphi(x_n).$$

Предположим, что функции $f(x)$ и $K(x, y)$ имеют некоторое число p непрерывных производных; столько же производных имеет тогда и $\varphi(x)$.[2]

Обозначим через $H^{(s)}$, $N^{(s)}$, $M_x^{(s)}$, $M_y^{(s)}$ верхние границы

$$|\varphi^{(s)}(x)|,\quad |f^{(s)}(x)|,\quad \left|\frac{d^s}{dx^s}K(x, y)\right|,\quad \left|\frac{d^s}{dy^s}K(x, y)\right|$$

и через $H^{(0)}$, $N^{(0)}$, $M^{(0)}$ — верхние границы модулей самих функций $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x, y)$. В таком случае могут быть легко оценены и производные подынтегральной функции $K(x, y)\,\varphi(y)$, а именно на основании правила Лейбница очевидно:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{d^s}{dy^s}[K(x, y)\varphi(y)]\right| &\leqslant H^{(0)}M_y^{(s)} + \\ &+ C_s^1 H^{(1)} M_y^{(s-1)} + \ldots + H^{(s)}M^{(0)} = T^{(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

---

[1]) Другой практически удобный путь нахождения собственных чисел и функций дается в работе Келлога [1]. См. также С. Г. Михлин [4], стр. 113. Прием, позволяющий указать границы, между которыми заключено собственное число, дан в работе Коллатца [3] и его книге [4].

[2]) См. примечание [3]) на стр. 114.

Если обозначить теперь через σ максимальную ошибку, которую мы совершим, заменяя $\int\limits_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy$ суммой, т. е. максимум модуля величины:

$$\int\limits_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy - \sum_{k=1}^{n} A_n K(x, x_k)\varphi(x_k) = \rho(x), \tag{16}$$

так что

$$|\rho(x)| \leqslant \sigma, \quad |\rho_i| \leqslant \sigma, \tag{17}$$

то эта величина σ может быть легко оценена некоторым выражением, содержащим $T^{(s)}$.

Эта оценка может быть произведена с помощью известных выражений остаточных членов, которые имеются для всех формул механических квадратур. В частности, имеем, например:

для *формулы трапеций*

$$\sigma \leqslant \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{(n-1)^2}\, T^{(2)};$$

для *формулы Симпсона*

$$\sigma \leqslant \frac{1}{90}(b-a)^5 \frac{T^{(4)}}{(n-1)^4};$$

для *формулы Гаусса*

$$\sigma \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\left\{\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(n+1)\ldots 2n}\right\}^2 \cdot \frac{T^{(2n)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}.$$

Во всех формулах эта оценка имеет вид $\sigma \leqslant k_n T^{(s)}$, где k_n — определенный для данной формулы квадратур множитель, не зависящий от вида подынтегральной функции.

Выведем теперь требуемую оценку. Пусть $\varphi(x)$ есть решение интегрального уравнения (1). Значения ее в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\varphi(x_i) - \lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)\varphi(x_k) = f(x_i) + \lambda\rho_i.$$

Для решения этой системы воспользуемся формулами (14), взяв только $f(x_k) + \lambda\rho_k$ вместо $f(x_k)$; найдем тогда:

$$\varphi(x_i) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{i,k}[f(x_k) + \lambda\rho_k]}{\Delta(\lambda)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Сравнивая с (14), получаем:

$$|\varphi(x_i) - \tilde{\varphi}(x_i)| = \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{i,k}\lambda\rho_k}{\Delta(\lambda)}\right| \leqslant \sigma|\lambda|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta_{i,k}|}{|\Delta(\lambda)|} \leqslant |\lambda|\sigma B, \tag{19}$$

если через B обозначить верхнюю границу отношения $\sum_{k=1}^{n}|\Delta_{i,k}|$ и $|\Delta(\lambda)|$, т. е. такое число, что

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|\Delta_{i,k}|}{|\Delta(\lambda)|} \leqslant B. \tag{20}$$

Оценка (19) является довольно удобной, так как требующиеся для этой оценки величины $\Delta_{i,k}$ и $\Delta(\lambda)$ определяются сами собой, когда производится фактическое решение системы уравнений (5). Остается еще указать предел погрешности, которую мы допускаем в остальных точках, пользуясь для $\tilde{\varphi}(x)$ интерполяционной формулой (6). В самом деле, приближенное значение $\varphi(x)$ равно:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k)\tilde{\varphi}(x_k). \tag{6}$$

С другой стороны, точное значение $\varphi(x)$ по (3) равно

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k)\varphi(x_k) + \lambda\rho(x),$$

где $|\rho(x)| \leqslant \sigma$. Вычитая из одного равенства другое и пользуясь (19), получим:

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant |\lambda| \sum_{k=1}^{n} A_k |K(x, x_k)| \cdot |\varphi(x_k) - \tilde{\varphi}(x_k)| + \\ + |\lambda| \cdot \sigma \leqslant |\lambda| \sigma [1 + |\lambda| BM^{(0)}(b-a)], \tag{21}$$

так как $\sum_{k=1}^{n} A_k = b - a.$[1])

Единственным недостатком полученной оценки (21) является то обстоятельство, что σ оценивается через $T^{(s)}$, в состав же $T^{(s)}$ входят $H^{(0)}, H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}$ — границы неизвестной функции $\varphi(x)$ и ее производных. Однако это неудобство удается устранить, так как эти границы можно выразить через известные величины $M_x^{(s)}$, $N^{(s)}$ и B. Прежде всего, дифференцируя s раз уравнение (1), находим:

$$\varphi^{(s)}(x) = \lambda \int_a^b \left[\frac{d^s}{dx^s} K(x, y)\right] \varphi(y)\, dy + f^{(s)}(x),$$

[1]) Это равенство верно для всех квадратурных формул, перечисленных на стр. 112, и вообще для таких, которые дают точное значение для функции, равной постоянной.

откуда

$$H^{(s)} \leqslant H^{(0)} \cdot |\lambda| (b-a) M_x^{(s)} + N^{(s)} \qquad (s=0,\ 1,\ 2, \ldots). \tag{22}$$

Теперь выражение $T^{(s)}$ (15) может быть оценено так:

$$T^{(s)} = H^{(0)} M_y^{(s)} + C_s^1 H^{(1)} M_y^{(s-1)} + \ldots + H^{(s)} M^{(0)} \leqslant N^{(0)} M_y^{(s)} + \\ + C_s^1 N^{(1)} M_y^{(s-1)} + \ldots + N^{(s)} M^{(0)} + |\lambda| (b-a) (M^{(0)} M_y^{(s)} + \\ + C_s^1 M_x^{(1)} M_y^{(s-1)} + \ldots + M_x^{(s)} M^{(0)}) H^{(0)} = P_s + Q_s H^{(0)},$$

где P_s и Q_s — известные величины. Далее σ оценивается, как было указано выше, через $T^{(s)}$, и, следовательно, ее оценка имеет вид:

$$\sigma \leqslant k_n T^{(s)} \leqslant k_n (P_s + Q_s H^{(0)}), \tag{23}$$

где k_n — коэффициент при производной, входящий в оценку остаточного члена примененной формулы квадратур.

Пользуясь неравенством (23), оценку (21) можем переписать так:

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant [M^{(0)} |\lambda| B (b-a) + 1] k_n (P_s + Q_s H^{(0)}) |\lambda|. \tag{24}$$

Обозначим через S верхнюю границу модуля приближенного решения $\tilde{\varphi}(x)$.[1]) Тогда получим:

$$|\varphi(x)| \leqslant S + [M^{(0)} |\lambda| B (b-a) + 1] k_n (P_s + Q_s H^{(0)}) |\lambda|.$$

Отсюда и

$$H^{(0)} \leqslant S + [M^{(0)} |\lambda| B (b-a) + 1] k_n (P_s + Q_s H^{(0)}) |\lambda|.$$

Далее, преобразуя это неравенство, находим оценку для $H^{(0)}$:

$$H^{(0)} \leqslant \frac{S + [M^{(0)} |\lambda| B (b-a) + 1] |\lambda| k_n P_s}{1 - [M^{(0)} |\lambda| B (b-a) + 1] |\lambda| k_n Q_s}, \tag{25}$$

верную, если знаменатель правой части положителен. Для этого, так как k_n весьма мало, требуется лишь, чтобы остальные величины B, $M^{(0)}$, Q_s, $|\lambda|$ оказались не слишком большими.

В случае, если этот знаменатель положителен, решение $\varphi(x)$ оказывается ограниченным, а это сразу позволяет утверждать, что

---

[1]) Величина S может быть найдена непосредственно по (6), но она легко может быть оценена и через введенные уже постоянные. Действительно, по (14) и (20)

$$|\tilde{\varphi}(x_i)| \leqslant B \cdot N^{(0)}.$$

Далее, ввиду (6)

$$|\tilde{\varphi}(x)| \leqslant |f(x)| + |\lambda| \sum_{k=1}^{n} A_k |K(x, x_k)| \cdot |\tilde{\varphi}(x_k)| \leqslant N^{(0)} + \\ + M^{(0)} |\lambda| (b-a) N^{(0)} B.$$

Отсюда видно, что последнее полученное выражение может быть принято в качестве S.

данное значение λ не есть собственное число. Действительно, в противном случае к $\varphi(x)$ можно было бы добавить произвольное решение однородного уравнения, которое может быть взято сколь угодно большим, а тогда неравенство (25) не соблюдалось бы.

Подставляя оценку $H^{(0)}$ из неравенства (25) в (24), можем получить окончательную оценку $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$ — точности приближения, в которой участвуют лишь известные величины. [1])

Приведенные оценки позволяют также оценить и погрешность, сделанную при нахождении собственных чисел и функций по изложенному способу. Не вдаваясь здесь в подробности, ограничимся лишь принципиальным указанием.

Возьмем некоторую область значений λ, например круг $|\lambda|<\Lambda_0$. Оценим в этой области $\sum_{k=1}^{n}|\Delta_{i,k}|$; пусть эта оценка есть число R. Тогда в неравенстве (25) можем принять за B величину $\frac{R}{\Delta(\lambda)}$. Если теперь значение λ будет таким, что

$$1-\left[M^{(0)}|\lambda|\cdot\frac{R}{\Delta(\lambda)}(b-a)+1\right]|\lambda|k_nQ_s>0, \tag{26}$$

то λ не собственное число. Поэтому собственные значения могут быть расположены только в области значений λ, не удовлетворяющих неравенству (26). Это замечание и дает возможность оценить точность приближенных значений для собственных чисел, найденных решением уравнения $\Delta(\lambda)=0$. [2]) Оценка погрешности при определении собственных функций может быть произведена на основании подобных же соображений, на которых мы не останавливаемся подробнее.

4. Пример. Применим рассмотренный выше способ приближенного решения интегральных уравнений к решению уравнения

$$\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{xy}\varphi(y)\,dy=1-\frac{1}{2x}(e^x-1),$$

используя при этом формулу квадратур Гаусса.

---

[1]) Менее совершенная попытка оценки погрешности при замене интегрального уравнения системой линейных уравнений была сделана И. А. Акбергеновым [1]. Несколько более точная, но более сложная оценка была получена И. П. Мысовских [1].

Другая оценка погрешности, основанная на исследовании определителя Фредгольма, дана Островским [1]. Эта оценка относится к применению формулы прямоугольника и имеет скорее теоретический интерес. С общей точки зрения вопрос рассмотрен в гл. II, § 4 работы Л. В. Канторовича [18]. См. также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XIV, § 4.

[2]) Оценке погрешности приближений к собственным числам, найденных из этого уравнения, посвящены работы Виландта [1] и И. П. Мысовских [3].

Заменяя это интегральное уравнение на систему, при $n=2$, и приняв во внимание, что здесь $\lambda=\frac{1}{2}$, $A_1=A_2=\frac{1}{2}$, получим систему (5) для данного случая в виде:

$$\left(1-\frac{1}{4}K_{1,1}\right)\tilde{\varphi}(x_1)-\frac{1}{4}K_{1,2}\tilde{\varphi}(x_2)=f_1,$$
$$-\frac{1}{4}K_{2,1}\tilde{\varphi}(x_1)+\left(1-\frac{1}{4}K_{2,2}\right)\tilde{\varphi}(x_2)=f_2.$$

Согласно со сказанным выше, за x_1 и x_2 взяты абсциссы Гаусса для интервала (0, 1): $x_1=0{,}2113$; $x_2=0{,}7887$. Вычислив значения $K_{i,k}=K(x_i, x_k)$, $f_i=f(x_i)$ и подставив их в систему, приведем ее к виду:

$$0{,}7386\,\tilde{\varphi}(x_1)-0{,}2954\,\tilde{\varphi}(x_2)=0{,}4434,$$
$$-0{,}2954\,\tilde{\varphi}(x_1)+0{,}5343\,\tilde{\varphi}(x_2)=0{,}2384.$$

Значения необходимых определителей будут:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0{,}7386 & -0{,}2954\\ -0{,}2954 & 0{,}5343\end{vmatrix}=0{,}3074,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0{,}4434 & -0{,}2954\\ 0{,}2384 & 0{,}5343\end{vmatrix}=0{,}3073,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}0{,}7386 & 0{,}4434\\ -0{,}2954 & 0{,}2384\end{vmatrix}=0{,}3071,$$

откуда

$$\tilde{\varphi}(x_1)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=0{,}9997;\qquad \tilde{\varphi}(x_2)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=0{,}9990.$$

Поэтому приближенное решение в остальных точках по формуле (6) дается равенством:

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{4}\left(e^{0{,}2113x}\,0{,}9997+e^{0{,}7887x}\,0{,}9990\right)+1-\frac{1}{2x}(e^x-1).$$

Точное решение данного уравнения, как легко проверить подстановкой, есть $\varphi(x)=1$. Сравнивая значения этих решений в точках x_1, x_2, видим, что разница будет соответственно 0,0003 и 0,0010. Можно, например, найти еще $\tilde{\varphi}(0)=0{,}9997$, и опять разница 0,0003. Как видим, приближенное решение почти совпадает с точным.

Дадим теперь точную оценку погрешности найденного приближенного решения, пользуясь способом, указанным в n° 3.

Найдем некоторые необходимые величины. B — означает оценку

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta_{i,k}|}{\Delta}.$$

В данном случае $\Delta_{i,k}$ суть элементы определителя Δ, и наибольшее отношение будет

$$\frac{0{,}7386+0{,}2954}{0{,}3074}<3{,}4,$$

следовательно, можно принять $B=3{,}4$.

Разлагая в ряд свободный член и его производные, найдем:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{48} - \frac{x^4}{240} - \frac{x^5}{1440} - \frac{x^6}{10080} - \dots,$$

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{60}x^3 + \frac{1}{288}x^4 + \frac{1}{1680}x^5 + \dots\right),$$

$$f''(x) = -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{336}x^4 + \dots\right),$$

$$f'''(x) = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{84}x^3 + \dots\right),$$

$$f^{(IV)}(x) = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12}x + \frac{1}{28}x^2 + \dots\right).$$

Отсюда видно, что за границы функции f и ее производных в (0,1) можно принять:

$$N^{(0)} = 0{,}5; \quad N^{(1)} = 0{,}5; \quad N^{(2)} = 0{,}36; \quad N^{(3)} = 0{,}29; \quad N^{(4)} = 0{,}25.$$

Далее ядро и его производные будут:

$$K = e^{xy}; \quad K'_x = ye^{xy}; \quad K''_x = y^2e^{xy}; \quad K'''_x = y^3e^{xy}; \quad K^{(IV)}_x = y^4e^{xy};$$

аналогичные выражения имеют производные по y. Поэтому за границы их в (0,1) можно принять

$$M^{(0)} = M_x^{(1)} = \dots = M_x^{(4)} = M_y^{(1)} = \dots = M_y^{(4)} = e.$$

Отсюда

$$P_4 = N^{(0)}M_y^{(4)} + C_4^1N^{(1)}M_y^{(3)} + C_4^2N^{(2)}M_y^{(2)} + C_4^3N^{(3)}M_y^{(1)} + N^{(4)}M^{(0)} < 8e < 22,$$

$$Q_4 = |\lambda|(b-a)(M^{(0)}M_y^{(4)} + C_4^1M_x^{(1)}M_y^{(3)} + $$
$$+ C_4^2M_x^{(2)}M_y^{(2)} + C_4^3M_x^{(3)}M_y^{(1)} + M_x^{(4)}M^{(0)}) = 8e^2 < 60.$$

Тогда для производной $\frac{d^4}{dy^4}K(x, y)\varphi(y)$ получаем оценку

$$T^{(4)} = P_4 + Q_4H^{(0)},$$

где $H^{(0)}$ — верхняя граница $\varphi(y)$. Далее для оценки погрешности при замене интеграла на сумму находим, пользуясь выражением оценки для формулы Гаусса (стр. 118) при $n = 2$:

$$\sigma = k_2T^{(4)} = \frac{1}{5}\left\{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\right\}^2 \frac{T^{(4)}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{4320}T^{(4)},$$

т. е. $k_2 = \frac{1}{4320} = 0{,}00024$.

Наконец, S — верхнюю границу $\tilde{\varphi}(x)$ — можем принять равной 1,4. Действительно, максимальное значение первого члена $\tilde{\varphi}(x)$ есть $\frac{1}{4}(e^{0,212} + e^{0,789}) \approx 0{,}9$, а максимальное значение следующей разности есть $\frac{1}{2}$.

Подставляя найденные значения, найдем для $H^{(0)}$ следующую оценку:

$$H^{(0)} \leqslant \frac{S + [M^{(0)}B(b-a)|\lambda| + 1]|\lambda|k_2P_4}{1 - [M^{(0)}B(b-a)|\lambda| + 1]|\lambda|k_2Q_4} =$$
$$= \frac{1{,}4 + (2{,}72\cdot 3{,}4\cdot 0{,}5 + 1)\cdot 0{,}5\cdot 0{,}00024\cdot 22}{1 - (2{,}72\cdot 3{,}4\cdot 0{,}5 + 1)\cdot 0{,}5\cdot 0{,}00024\cdot 60} = 1{,}48.$$

Наконец, для интересующей нас разности $|\varphi-\tilde{\varphi}|$ получаем оценку

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<|\lambda|\,[1+BM^{(0)}(b-a)\,|\lambda|]\,k_2(P_4+Q_4H^{(0)})= \\ =0,5\cdot 5,62\cdot 0,00024\,(22+60\cdot 1,48)=0,07.$$

Как мы видели, в действительности погрешность порядка 0,001 и она значительно ниже того, что мы сейчас получили при оценке 0,070. [1]) Однако проведение оценки установило, например, с полной определенностью, что $\lambda=0,5$ не есть собственное значение данного интегрального уравнения и что оно имеет, следовательно, единственное решение. [2])

§ 2. Метод последовательных приближений и аналитическое продолжение

1. Метод последовательных приближений. Рассмотрим интегральное уравнение второго рода:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x). \tag{1}$$

Метод последовательных приближений для его решения состоит в следующем. Ищем решение в виде ряда, расположенного по степеням λ:

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots \tag{2}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1), найдем:

$$\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots= \\ =f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\,y)\,[\varphi_0(y)+\lambda\varphi_1(y)+\lambda^2\varphi_2(y)+\ldots]\,dy.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(x)=f(x),\\ &\varphi_1(x)=\int_a^b K(x,\,y)\,\varphi_0(y)\,dy,\\ &\varphi_2(x)=\int_a^b K(x,\,y)\,\varphi_1(y)\,dy,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

[1]) Исключительная грубость оценки в данном примере является случайной и вызвана тем, что точное решение есть постоянная. Если бы мы приняли это во внимание, то нашли бы, что в данном случае $T^{(4)}=H^{(0)}M_y^{(4)}=e$. Поэтому оценка погрешности оказывается равной $0,5\cdot 5,62\cdot 0,00024\cdot 2,72=$ $=0,0018$, т. е. довольно близкой к действительной погрешности.

[2]) Здесь рассмотрено приближенное решение интегральных уравнений типа Фредгольма; методы решения уравнений с переменными пределами (типа Вольтерра) можно найти в работах: Ш. Е. Микеладзе [2], В. И. Крылов [1], Уиттекер и Робинсон [1], Г. М. Мюнтц [1].

Из этих равенств можно определить последовательно все функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., именно, если ввести так называемые итерированные ядра

$$\left.\begin{aligned} &K_1(x, y) = K(x, y),\\ &K_2(x, y) = \int_a^b K(x, t) K_1(t, y)\,dt,\\ &K_3(x, y) = \int_a^b K(x, t) K_2(t, y)\,dt,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то можем написать следующие выражения для функций $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_0(x) = f(x); \quad \varphi_n(x) = \int_a^b K_n(x, y) f(y)\,dy \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Ряд (2) можем теперь записать в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, y) f(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, y) f(y)\,dy + \ldots =$$
$$= f(x) + \lambda \int_a^b [K_1(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \ldots] f(y)\,dy =$$
$$= f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda) f(y)\,dy, \tag{6}$$

если через Γ обозначить ряд, стоящий в скобках:

$$\Gamma(x, y, \lambda) = K_1(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \ldots \tag{7}$$

Функцию Γ называют резольвентой уравнения (1). Можно доказать, предполагая ограниченным ядро $K(x, y)$: $|K(x, y)| \leqslant M$, что ряды (7), (6) и (2) будут равномерно сходящимися и $\varphi(y)$ есть решение уравнения (1), если λ достаточно мало, точнее, если λ удовлетворяет условию:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.\text{[1]} \tag{8}$$

[1]) Можно указать более точные оценки для радиуса сходимости рядов (2), (6) и (7). Оценка (8) остается верной, например, если M не верхняя граница $K(x, y)$, а хотя бы такое число, что выполняется одно из неравенств:

$$\int_a^b |K(x, y)|\,dy < M(b-a), \tag{a}$$

$$\left\{\int_a^b \int_a^b K^2(x, y)\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant M(b-a), \tag{b}$$

$$|K_p(x, y)| < M^p (b-a)^{p-1}. \tag{c}$$

Если λ удовлетворяет неравенсгву (8), то рядом (2) можно с успехом пользоваться для приближенного решения. Часто требуемые квадратуры (3) можно выполнить точно, тогда получаемый ряд (2) будет сходиться по крайней мере как прогрессия со знаменателем $|\lambda| M(b-a)$. Погрешность, которую мы допустим, если ограничимся n членами в ряду (2), может быть оценена без особого труда. Именно, предполагая $|f(x)| \leqslant N$, легко получить последовательно, что

$$|\varphi_n(x)| < NM^n(b-a)^n, \tag{9}$$

и потому остаток ряда (2) после n членов

$$|\lambda^n\varphi_n(x)+\lambda^{n+1}\varphi_{n+1}(x)+\ldots| < |\lambda|^n NM^n(b-a)^n + \\ + |\lambda|^{n+1} NM^{n+1}(b-a)^{n+1}+\ldots = \frac{NM^n(b-a)^n|\lambda|^n}{1-M(b-a)|\lambda|}.\text{[1]} \tag{10}$$

Как правило, однако, квадратуры (3) не могут быть выполнены, и в таких случаях нужно применить формулы приближенного интегрирования. Укажем наиболее удобный порядок расположения вычислений при этом.

Выбираем определенную формулу квадратур:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^m A_k\psi(x_k).$$

Введем сокращенные обозначения:

$$K_{i,k}=K(x_i, x_k);\quad \varphi_n^{(i)}=\varphi_n(x_i);\quad \varphi^{(i)}=\varphi(x_i);\quad f^{(i)}=f(x_i), \tag{11}$$

причем приближенные значения для $\varphi^{(i)}$ и $\varphi_n^{(i)}$ будем обозначать через $\tilde{\varphi}^{(i)}$ и $\tilde{\varphi}_n^{(i)}$. Тогда равенства (3) дают:

$$\varphi_0^{(i)}=f^{(i)};$$

$$\varphi_1^{(i)}=\int_a^b K(x_i, y)\varphi_0(y)\,dy \cong \sum_{k=1}^m A_k K_{i,k}\varphi_0^{(k)};\quad \tilde{\varphi}_1^{(i)}=\sum_{k=1}^m A_k K_{i,k}\varphi_0^{(k)}$$

и вообще

$$\tilde{\varphi}_{n+1}^{(i)}=\sum_{k=1}^m A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}_n^{(k)}. \tag{12}$$

---

[1]) Для решения интегрального уравнения, а также для нахождения собственных чисел и функций его может применяться и другой способ последовательных приближений — метод наискорейшего спуска. См. об этом Л. В. Канторович [18], гл. III, § 6, а также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XV.

Вычисления по этим формулам удобнее всего расположить в таблицу:

	1	2		m	Контрольный	$\varphi_0=f$	$\tilde{\varphi}_1$	$\tilde{\varphi}_2$		$\tilde{\varphi}$
x_1	$\lambda A_1 K_{1,1}$	$\lambda A_1 K_{2,1}$	...	$\lambda A_1 K_{m,1}$	K_1^*	$\varphi_0^{(1)}$	$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(1)}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(1)}$	...	$\tilde{\varphi}^{(1)}$
x_2	$\lambda A_2 K_{1,2}$	$\lambda A_2 K_{2,2}$	...	$\lambda A_2 K_{m,2}$	K_2^*	$\varphi_0^{(2)}$	$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(2)}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(2)}$	...	$\tilde{\varphi}^{(2)}$
...	......	......	...	......	....	....	....	....	...	...
...	......	......	...	......	....	....	....	....	...	...
x_m	$\lambda A_m K_{1,m}$	$\lambda A_m K_{2,m}$	...	$\lambda A_m K_{m,m}$	K_m^*	$\varphi_0^{(m)}$	$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(m)}$	$\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(m)}$	...	$\tilde{\varphi}^{(m)}$
							$\lambda\varphi_1^*$	$\lambda^2\varphi_2^*$	...	

Эта таблица составляется следующим образом: 1) Вычислив значения ядра в точках (x_i, x_k) и помножив на множитель λA_k, составляем квадратную таблицу. За ней следует контрольный столбец, о котором будет сказано ниже. 2) Значения функции f в точках x_i дают нам первый столбец, следующий за контрольным. 3) Для вычисления элементов второго столбца поступаем так: помножаем элементы первого столбца, следующего за контрольным, на элементы первого столбца таблицы и складываем эти произведения, находим:

$$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{1,k}\varphi_0^{(k)}. \tag{13}$$

Помножая таким же образом элементы того же первого столбца, следующего за контрольным, на элементы второго столбца таблицы, находим:

$$\lambda\tilde{\varphi}_1^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{2,k}\varphi_0^{(k)}. \tag{13'}$$

Продолжая таким образом, вычисляем весь второй столбец, следующий за контрольным. 4) Третий столбец, следующий за контрольным (столбец $\tilde{\varphi}_2$), вычисляется точно так же, как второй, только вместо первого столбца, следующего за контрольным, нужно пользоваться вторым, например:

$$\lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{1,k}(\lambda\tilde{\varphi}_1^{(k)}); \quad \lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{2,k}(\lambda\tilde{\varphi}_1^{(k)}). \tag{14}$$

5) Вычисления нужно вести до того момента, пока элементы последнего столбца не сделаются столь малыми, что ими можно будет пренебречь. После этого, складывая элементы найденных столбцов по строкам, получаем последний столбец — приближенные значения искомой функции φ в точках x_i:

$$\tilde{\varphi}^{(i)} = \tilde{\varphi}_0^{(i)} + \lambda\tilde{\varphi}_1^{(i)} + \lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(i)} + \ldots \tag{15}$$

В том, что ряд сходится при условии (8), можно убедиться без труда. Пусть $|\varphi_0^{(i)}| = |f_i| \leqslant N$. Тогда

$$|\tilde{\varphi}_1^{(i)}| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda A_k K_{i,k} \varphi_0^{(k)}\right| \leqslant NM|\lambda| \sum_{k=1}^{n} A_k = NM|\lambda|(b-a).$$

Продолжая так, найдем $|\tilde{\varphi}_n^{(i)}| \leqslant N[M|\lambda|(b-a)]^n$, т. е. ряд (15) действительно сходится при условии (8).[1])

Контроль произведенных вычислений удобнее всего производится на основании следующих соображений. Ввиду прежних формул, имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda\tilde{\varphi}_1^{(i)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{i,k} \tilde{\varphi}_0^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\varphi}_0^{(k)} \left[\sum_{i=1}^{m} (A_k \lambda K_{i,k})\right],$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(i)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda\tilde{\varphi}_1^{(k)} \left[\sum_{i=1}^{m} (A_k \lambda K_{i,k})\right],$$

. . . .

Поэтому, если составим дополнительный столбец величин

$$K_k^* = \sum_{i=1}^{m} (A_k \lambda K_{i,k}),$$

получающихся суммированием строк квадратной таблицы (контрольный столбец), и составим суммы вертикальных столбцов, следующих за квадратной таблицей

$$\lambda\varphi_1^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda\varphi_1^{(i)}; \quad \lambda^2\varphi_2^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda^2\varphi_2^{(i)}; \ldots,$$

---

[1]) Сходимость процесса последовательных приближений к решению, при применении специальных формул квадратур, при одновременном увеличении числа используемых точек, в пределах области, определяемой неравенством (8) или более точными неравенствами (см. прим. на стр. 125) была установлена в работе Н. М. Крылова и Я. Д. Тамаркина [1].

Применение метода последовательных приближений специально для численного решения интегрального уравнения рассеяния света дано в работе Е. С. Кузнецова и Б. В. Овчинского [1].

то, умножая контрольный столбец на столбцы за таблицей, мы должны получить величины $\lambda\varphi_1^*$, $\lambda^2\varphi_2^*$, ..., например:

$$\sum_{k=1}^{m} K_k^*\varphi_0^{(k)} = \lambda\varphi_1^*; \quad \sum_{k=1}^{m} K_k^*\lambda\varphi_1^{(k)} = \lambda^2\varphi_2^*; \ldots \tag{16}$$

Этот способ дает, следовательно, возможность проверки после вычисления каждого из столбцов.

Проверка правильности полученного решения может быть произведена еще другим способом. Пользуясь выражением для $\tilde{\varphi}^{(i)}$ и $\tilde{\varphi}_s^{(i)}$, находим:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^{(i)} - f^{(i)} &= \lambda\tilde{\varphi}_1^{(i)} + \lambda^2\tilde{\varphi}_2^{(i)} + \ldots = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}_0^{(k)} + \lambda\sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}_1^{(k)} + \ldots = \\ &= \lambda\sum_{k=1}^{m} A_k K_{i,k}(\tilde{\varphi}_0^{(k)} + \lambda\tilde{\varphi}_1^{(k)} + \ldots) = \lambda\sum_{k=1}^{m} A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}^{(k)}.\end{aligned}$$

Следовательно, найденные значения $\tilde{\varphi}^{(i)}$ должны быть решениями системы обыкновенных уравнений первой степени:

$$\tilde{\varphi}^{(i)} - \sum_{k=1}^{m} (\lambda A_k K_{i,k})\tilde{\varphi}^{(k)} = f^{(i)}. \tag{17}$$

Чтобы проверить, что $\tilde{\varphi}^{(i)}$ действительно удовлетворяют этой системе, нужно вычислить, посредством умножения столбца $\tilde{\varphi}^{(k)}$ на квадратную таблицу (подобно тому, как мы поступали с каждым столбцом), столбец величин $\sum_{k=1}^{m} \lambda A_k K_{i,k}\tilde{\varphi}^{(k)}$, которые должны оказаться равными $\tilde{\varphi}^{(i)} - f^{(i)}$.

Система (17) совпадает с той системой (5), которую мы рассмотрели в § 1. Таким образом, способ вычислений, которым мы здесь пользовались, есть не что иное, как применение особого способа решения системы (17) — способа итераций, который практически обычно более удобен, чем непосредственное ее решение.

Так как способ последовательных приближений дает в результате решение системы (17), то строгая оценка погрешности, получающейся в результате решения по этому способу, может быть произведена с помощью формул n° 3 § 1.

Практически оценку погрешности полученного решения можно произвести и иначе. Прежде всего, с помощью той или иной интерполяционной формулы, например формулы (6) n° 2 § 1, можно, пользуясь найденными числами $\tilde{\varphi}^{(k)}$, получить приближенное выражение

для $\varphi(x)$ во всем промежутке: $\tilde{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{m}A_kK(x,\ x_k)\tilde{\varphi}^{(k)}$.

Для проверки того, насколько точно $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, можно ее подставить в интегральное уравнение, но интеграл заменить на сумму по другой формуле квадратур:

$$\tilde{\varphi}(x)-\lambda\sum_{k=1}^{m^*}A_k^*K(x,\ x_k^*)\tilde{\varphi}(x_k^*)\cong f(x)$$

и проверить, какова ошибка при нескольких значениях x.

Мы рассматривали сейчас вопрос о приближенном решении уравнения с определенной правой частью $f(x)$. В случае же, если одно и то же уравнение приходится решать для различных правых частей, то выгоднее построить резольвенту. Для этой цели нужно составить итерированные ядра $K_s(x,\ y)$. Если ввести в рассмотрение числа $K_{i,k}^{(s)}=K_s(x_i,\ x_k)$ и через $\tilde{K}_{i,k}^{(s)}$ обозначить приближенные их значения, то будем иметь следующие формулы для последовательного приближенного вычисления их:

$$\tilde{K}_{i,k}^{(1)}=K_{i,k};\quad \lambda^{s+1}\tilde{K}_{i,k}^{(s+1)}=\sum_{j=1}^{m}\lambda A_jK_{i,j}(\lambda^s\tilde{K}_{j,k}^{(s)}).$$

Эта формула показывает, что если значения $\lambda^s\tilde{K}_{i,k}^{(s)}$ выписывать в виде матрицы, то каждая матрица получается из предыдущей посредством умножения на матрицу $\|\lambda A_kK_{j,k}\|$. Это дает возможность построить схему вычислений, аналогичную рассмотренной выше, и дать такие же правила контроля. Складывая все построенные матрицы, получим матрицу значений для резольвенты:

$$\tilde{\Gamma}_{i,k}=K_{i,k}+\lambda\tilde{K}_{i,k}^{(2)}+\lambda^2\tilde{K}_{i,k}^{(3)}+\ldots$$

С помощью матрицы $\|\tilde{\Gamma}_{i,k}\|$ решение для любого свободного члена $f(x)$ может быть построено по формуле:

$$\tilde{\varphi}_i=f^{(i)}+\lambda\sum_{k=1}^{m}A_k\tilde{\Gamma}_{i,k}f^{(k)}.$$

Мы не останавливаемся здесь на дальнейших подробностях.[1])

---

[1]) Приближенному решению интегральных уравнений при малых значениях параметра посвящена также работа Д. Ю. Панова [1]. В этой работе рассматривается применение метода С. А. Чаплыгина и к нелинейным уравнениям.

Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений рассматривается также в работах А. Н. Балуева [1], В. П. Ветчинкина [1], Д. М. Загадского [1] и Л. В. Канторовича [18], гл. IV, § 3, [19], [21]. См. также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XVIII, § 3.

Приближенному решению сингулярных интегральных уравнений посвящены работы В. В. Иванова [1—3], А. И. Каландия [1] и И. Д. Софронова [1].

2. Применение аналитического продолжения для приближенного решения интегральных уравнений. Ряд (7) для резольвенты Γ представляет разложение ее по степеням параметра λ около точки $\lambda = 0$ и будет поэтому сходящимся до первой особой точки этой функции. Следовательно, ряд будет сходящимся, пока $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ_1 — первое собственное число ядра. Вследствие этого рядом (7) нельзя пользоваться, если $|\lambda| > |\lambda_1|$, так как он расходится, и затруднительно пользоваться, если $|\lambda|$ близок к $|\lambda_1|$, так как тогда ряд сходится медленно. В этих случаях оказывается часто удобным, именно когда нам известно в некоторой мере расположение собственных чисел интегрального уравнения, применить аналитическое продолжение. Укажем несколько приемов аналитического продолжения, наиболее подходящих для данного случая. При этом мы считаем для удобства в дальнейшем, что $\lambda_1 = -1$; очевидно, всегда можно посредством замены λ на $\bar{\lambda} = -\frac{\lambda}{\lambda_1}$ этого добиться.

1. *Непосредственное продолжение.* Решение при $|\lambda| < 1$ дается сходящимся рядом:

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \ldots$$

Мы можем с помощью этого ряда вычислить значения $\varphi(x, \lambda)$ и производных ее по λ: $\frac{d^k}{d\lambda^k}\varphi(x, \lambda)$, например при $\lambda = \frac{1}{2}$. Это позволит составить разложение решения $\varphi(x, \lambda)$ по степеням $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$. Это разложение можно получить и прямо, заменяя в данном ряду λ на $\left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)$ $\left(\text{имея в виду } \lambda' = \lambda - \frac{1}{2}\right)$ и переразлагая ряд по степеням λ'. Расстояние точки $\lambda = \frac{1}{2}$ до собственного значения $\lambda_1 = -1$ равно $1\frac{1}{2}$, и потому, если не помешают следующие собственные значения, полученный ряд по степеням λ' будет иметь радиус сходимости $1\frac{1}{2}$ и даст возможность, например, вычислять решение при $1 \leqslant \lambda < 2$, что было невозможно с помощью первоначального ряда. Независимо от расположения других собственных значений, кроме λ_1, перестроенный ряд будет наверное сходиться при $\lambda = 1$, т. е. $\lambda' = \frac{1}{2}$, если только само это значение не является собственным.

Перестроенный ряд имеет следующий вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)\varphi_1 + \left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)^2\varphi_2 + \ldots =$$
$$= \left(\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{4}\varphi_2 + \frac{1}{8}\varphi_3 + \ldots\right) + \left(\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3}{4}\varphi_3 + \ldots\right)\lambda' +$$
$$+ \left(\varphi_2 + \frac{3}{2}\varphi_3 + \ldots\right)\lambda'^2 + \ldots$$

Этим же рядом можно пользоваться и для приближенного вычисления значений φ в отдельных точках — чисел $\tilde{\varphi}^{(i)}$. При этом придется использовать последовательные приближения $\tilde{\varphi}_n^{(i)}$ (см. предыдущий номер).

2. *Уничтожение полюса посредством домножения.* Предположим известным, что первое собственное число ядра есть $\lambda_1 = -1$ и это есть простой полюс для резольвенты. Например, собственное число всегда будет простым полюсом, если ядро симметрическое $[K(x, y) = K(y, x)]$. Остальные собственные значения предполагаем бо́льшими чем 1 по модулю. В таком случае функции $(\lambda + 1)\Gamma(x, y, \lambda)$ и $(\lambda + 1) \times \varphi(x, \lambda)$ уже не имеют $\lambda = -1$ особой точкой, а потому ряды по степеням λ для этих функций будут сходящимися при $|\lambda| < |\lambda_2|$, в частности наверное сходятся, если $|\lambda| = 1$. Ряды же для этих функций находятся непосредственно, именно:

$$(\lambda + 1)\Gamma(x, y, \lambda) = [K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \ldots](\lambda + 1) =$$
$$= K(x, y) + \lambda[K(x, y) + K_2(x, y)] + \lambda^2[K_2(x, y) + K_3(x, y)] + \ldots$$
$$(\lambda + 1)\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \lambda[\varphi_0(x) + \varphi_1(x)] + \ldots$$

В частности, при $\lambda = 1$

$$\Gamma(x, y, 1) = \frac{1}{2}[K + (K + K_2) + (K_2 + K_3) + \ldots],$$

причем перегруппировку здесь произвести нельзя, так как тогда ряд может превратиться в расходящийся.

Этими же рядами можно пользоваться и для вычисления значений резольвенты в отдельных точках, если итерированные ядра находились численным образом.

3. *Преобразование ряда посредством замены переменной.* Общая идея состоит в следующем. Предположим, что мы можем ввести вместо λ новую переменную η, полагая $\eta = \omega(\lambda)$; $\lambda = \omega^*(\eta)$, где ω и ω^* функции регулярные во всяком случае в круге $|\eta| < 1$, так, чтобы: 1) начало $\lambda = 0$ перешло в начало $\eta = 0$; 2) точки $\eta, \eta_2, \ldots$, в которые перейдут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, были бы $\geqslant 1$ по модулю: $|\eta_1| \geqslant 1$, $|\eta_2| \geqslant 1, \ldots$; 3) для интересующего нас значения λ (при котором нужно решить уравнение) было бы соответствующее $|\eta| = |\omega(\lambda)| < 1$.

Если нам известна такая функция $\eta = \omega(\lambda)$, то, заменяя в ряду для резольвенты или решения λ на $\omega^*(\eta)$, раскладывая полученный ряд по степеням η, мы получим ряд, имеющий, в силу условия 2, радиус сходимости $\geqslant 1$, а потому наверное сходящийся при интересующем нас значении η, для которого $|\eta| < 1$.

Дадим два случая подобного преобразования.[1])

1. Пусть известно, что все собственные значения находятся в полуплоскости $\mathrm{Re}[\lambda] \leqslant -1$. Преобразуем в таком случае переменную, полагая:

$$\eta = \frac{\lambda}{\lambda + 2}; \quad \lambda = \frac{2\eta}{1 - \eta} = 2[\eta + \eta^2 + \eta^3 + \ldots],$$

[1]) Другие возможные преобразования указаны в работе В. Н. Кублановской [1].

т. е. беря за $\omega(\lambda)$ функцию, отображающую полуплоскость $\mathrm{Re}[\lambda] \geqslant -1$ на единичный круг $|\eta| \leqslant 1$.

Вводя эту подстановку, получим для Γ, например, следующий ряд:

$$\lambda\Gamma(x, y, \lambda) = \lambda K(x, y) + \lambda^2 K_2(x, y) + \ldots =$$
$$= \frac{2\eta}{1-\eta} K + \left(\frac{2\eta}{1-\eta}\right)^2 K_2 + \left(\frac{2\eta}{1-\eta}\right)^3 K_3 + \ldots =$$
$$= 2(\eta + \eta^2 + \eta^3 + \ldots) K + 4(\eta^2 + 2\eta^3 + 3\eta^4 + \ldots) K_2 +$$
$$+ 8(\eta^3 + 3\eta^4 + 6\eta^5 + \ldots) K_3 + \ldots =$$
$$= 2K\eta + (2K + 4K_2)\eta^2 + (2K + 8K_2 + 8K_3)\eta^3 + \ldots$$

Этот ряд сходится при $|\eta| < 1$, что отвечает всем λ из полуплоскости $\mathrm{Re}[\lambda] > -1$. В частности, для нахождения $\Gamma(x, y, 1)$ нужно принять $\lambda = 1$, а потому $\eta = \frac{\lambda}{\lambda+2} = \frac{1}{3}$; следовательно, получим быстро сходящийся ряд.

2. Предположим, что все собственные числа вещественны и $\leqslant -1$. В этом случае за функцию $\omega(\lambda)$ принимаем функцию, отображающую плоскость с вырезом от $\lambda = -1$ до $-\infty$ на единичный круг, именно

$$\eta = \omega(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda+1} - 1}{\sqrt{\lambda+1} + 1}.$$

В таком случае полученный после подстановки ряд по степеням η будет сходиться еще быстрее, чем предыдущий, например $\lambda = 1$ будет отвечать $\eta = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2} \approx \frac{1}{6}$. Для построения этого ряда, как показывает решение предыдущего уравнения относительно λ, оказывается нужным подставить в ряд по степеням λ вместо λ выражение:

$$\lambda = \left(\frac{\eta+1}{1-\eta}\right)^2 - 1 = (\eta+1)^2(1 + 2\eta + 3\eta^2 + \ldots) - 1 =$$
$$= 4(\eta + 2\eta^2 + 3\eta^3 + \ldots)$$

и полученный в результате ряд расположить по степеням η.

§ 3. Применение интегральных уравнений к решению задачи Дирихле

1. Интегральное уравнение теории потенциала. Прежде всего приведем вывод соответствующего интегрального уравнения.

Заметим предварительно, что если обозначить через r расстояние между точками $P(x, y)$ и $M(\xi, \eta)$, то $\ln r$, рассматриваемый как функция переменных x и y, есть функция гармоническая. В этом можно убедиться, проверив непосредственной подстановкой, что функция

$$u = \ln r = \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \frac{1}{2} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \qquad (1)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Производные функции u по параметрам ξ и η также будут гармоническими; например, для $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Отсюда ясно, что и производная этой функции по любому постоянному направлению L по переменным ξ и η, представляющая линейную комбинацию $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, также представляет функцию гармоническую.

Если обозначить через φ угол, который образует вектор $\overrightarrow{PM}$ с этим направлением L, то эта производная, как это ясно геометрически, будет:

$$\frac{\partial u}{\partial L} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial L} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Итак, $\frac{\cos\varphi}{r}$ — функция гармоническая.

После этого предварительного замечания перейдем к рассмотрению задачи Дирихле. Пусть дана конечная область D, ограниченная простым замкнутым контуром L. Предположим, что уравнение контура дано в параметрическом виде; за параметр принята дуга s:

$$x = x(s); \quad y = y(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0),$$

при этом предполагаем, что функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся в нуль одновременно. Требуется найти функцию u, гармоническую в области D, которая на контуре обращается в заданную непрерывную функцию дуги $f(s)$:

$$u = f(s) \text{ на } L.$$

Возьмем любую точку $M(\xi, \eta)$ на контуре L и обозначим через φ угол, образованный вектором $\overrightarrow{PM}$, проведенным из точки $P(x, y)$, с нормалью, построенной в точке M (рис. 4). Тогда, по сказанному выше, функция $\frac{\cos\varphi}{r}$ будет гармонической функцией переменных x и y в области D. Пусть теперь $\mu(s)$ — произвольная непрерывная функция, в таком случае интеграл

$$V(x, y) = \int_0^{s_0} \frac{\cos\varphi}{r}\mu(s)\,ds \tag{3}$$

есть гармоническая функция переменных x и y в области D. В самом деле, вычисляя ΔV, можем произвести дифференцирование под знаком

интеграла, но тогда, так как $\mu(s)$ от x и y не зависит, а $\frac{\cos\varphi}{r}$ функция гармоническая, получим $\Delta V=0$. Функция V носит название потенциала двойного слоя, и $\mu(s)$ называют его плотностью. Придадим выражению V другую форму, чтобы сделать более ясной геометрически его структуру. Обозначим через ω угол, который образует вектор $\overrightarrow{PM}$ (рис. 4) с положительным направлением оси OX. Если изменять положение точки M, то угол ω представляет функцию s, а $d\omega$ — угол, под которым элемент дуги ds виден из точки P. Но проекция ds на перпендикуляр к вектору $\overrightarrow{PM}$ есть $ds\cos\varphi$, а потому угол, под которым ds видно из точки P, есть $\frac{\cos\varphi\, ds}{r}$; итак:

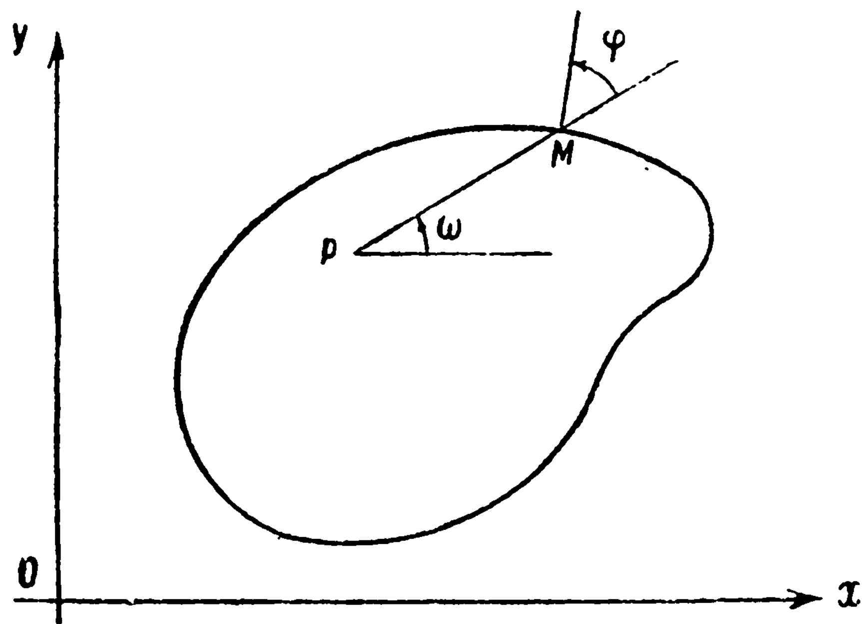


Рис. 4.

$$\frac{\cos\varphi}{r}ds = d\omega.$$

Поэтому выражению V можно придать вид:

$$V=\int_0^{s_0}\frac{\cos\varphi}{r}\mu(s)\,ds=\int_L \mu(s)\,d\omega=\int_0^{s_0}\frac{d\omega}{ds}\mu(s)\,ds. \tag{4}$$

При этом ω представляет функцию s, а также x и y: $\omega=\omega(s, x, y)$; s_0 обозначает полную длину контура L.

Примем, в частности, плотность $\mu(s)=1$, тогда $V=\int_L d\omega$ дает, очевидно, угол, под которым вся кривая L видна из точки P. Ясно, что этот угол равен 2π, если точка P внутри D; равен π, если точка P лежит на контуре L, и равен, наконец, нулю, если P вне контура L:

$$\int_0^{s_0}\frac{d\omega}{ds}ds=\begin{cases}2\pi, & \text{если } P \text{ внутри } D,\\ \pi, & \text{если } P \text{ на } L,\\ 0, & \text{если } P \text{ вне } L.\end{cases} \tag{5}$$

Попытаемся теперь найти решение задачи Дирихле в форме потенциала двойного слоя, именно попробуем найти плотность $\mu(s)$ так, чтобы функция

$$u(x, y)=\int_0^{s_0}\mu(s)\frac{d\omega}{ds}ds \tag{6}$$

имела при приближении к контуру значение $f(s)$.

Определим, чему равен предел $u(x, y)$, когда точка $P(x, y)$ стремится к точке P_0 на контуре, отвечающей дуге равной σ, т. е. к точке $P_0[x(\sigma), y(\sigma)]$. Имеем:

$$\lim_{P\to P_0} u(x, y) = \lim_{P\to P_0} \int_0^{s_0} \mu(s)\, d\omega =$$

$$= \lim_{P\to P_0}\left[\int_0^{s_0} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds + \mu(\sigma) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, x, y)}{ds} ds\right] =$$

$$= \int_0^{s_0} [\mu(s) - \mu(\sigma)] \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds + 2\pi\mu(\sigma) = \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds} ds + \pi\mu(\sigma),^{1)} \quad (7)$$

так как $\int_0^{s_0} \mu(\sigma)\, d\omega = \pi\mu(\sigma)$. Итак, мы должны иметь:

$$\pi\mu(\sigma) + \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega}{ds} ds = f(\sigma). \quad (8)$$

Полученное уравнение и есть интегральное уравнение для определения функции μ. Если мы разделим еще на π, то приведем его к виду:

$$\mu(\sigma) - \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\, \mu(s)\, ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma), \quad (9)$$

где ядро $K(s, \sigma)$, если воспользоваться геометрически очевидным выражением для угла $\omega(s, \sigma)$, может быть записано в виде:

$$K(s, \sigma) = -\frac{1}{\pi} \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(\sigma)}{x(s) - x(\sigma)}. \quad (10)$$

Заметим, что интегральное уравнение могло быть составлено таким же образом, если бы за параметр в уравнении кривой L была взята не дуга s, а некоторый другой параметр t. Уравнение имело бы тогда вид:

$$\mu(\tau) + \int_0^{t_0} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)}\, \mu(t)\, dt = \frac{1}{\pi} f(t). \quad (11)$$

Если ввести в уравнении (9) перед знаком интеграла параметр

$$\mu(\sigma) - \lambda \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\, \mu(s)\, ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma), \quad (12)$$

[1]) Здесь $\omega(s, \sigma)$ есть краткое обозначение для $\omega(s, x(\sigma), y(\sigma))$.

то можно показать, что значение $\lambda=1$, которое для нас интересно, не является собственным числом для данного интегрального уравнения. Поэтому, на основании общей теории интегральных уравнений, уравнение (9) имеет единственное решение при любом свободном члене $f(\sigma)$.

Для приближенного решения уравнения существенную роль играет распределение собственных значений этого уравнения. Прежде всего можно показать, что они все вещественны. Далее, $\lambda=-1$ — собственное значение для этого уравнения, так как, очевидно, постоянная $\mu(s)=C$ удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (9), ибо, как мы видели выше [см. (5)],

$$\pi C-\int_0^{s_0} C\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds=0.$$

Наконец, можно установить, что в промежутке $(-1, 1)$ собственных значений нет.[1])

Тот факт, что $\lambda=1$ не является собственным значением ядра и между точками -1 и 1 собственных значений нет, позволяет утверждать, что все указанные в предыдущем параграфе приемы аналитического продолжения применимы. В частности, прием продолжения с помощью домножения приводит к следующему ряду для искомого решения:

$$\mu(\sigma)=\frac{1}{2}\mu_0(\sigma)+\frac{1}{2}[\mu_0(\sigma)+\mu_1(\sigma)]+\frac{1}{2}[\mu_1(\sigma)+\mu_2(\sigma)]+\ldots, \tag{13}$$

где

$$\mu_0(\sigma)=\frac{1}{\pi}f(\sigma);$$

$$\mu_{n+1}(\sigma)=\int_0^{s_0} K(s, \sigma)\mu_n(s)\,ds=-\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\mu_n(s)\,ds. \tag{14}$$

Скажем еще несколько слов о третьем приеме. Согласно этому приему, мы должны ввести в ряду, дающем разложение решения по степеням λ, новый параметр η, полагая $\lambda=\varphi(\eta)$, и переразложить ряд по степеням η.

В качестве двух возможных подстановок были указаны

$$\lambda=\frac{2\eta}{1-\eta} \quad \text{и} \quad \lambda=\left(\frac{\eta+1}{1-\eta}\right)^2-1.$$

Обе эти подстановки дают удовлетворительный результат для данной задачи. Применение их не представляет никаких особенностей по сравнению с общим случаем, кроме того, мы встретимся с ними ниже в примере, поэтому мы не останавливаемся здесь на них подробнее. В следующем номере мы рассмотрим подробнее другую подстановку.

---

[1]) См. Гурса [1], т. III, ч. 2, стр. 172.

2. Метод Неймана. Для нас представит здесь интерес подстановка $\lambda = \frac{\eta}{1-\eta}$. Эта подстановка переводит $\lambda = 1$ в $\eta = \frac{1}{2}$; $\lambda = -1$ в $\eta = \infty$. Наконец, промежутку $-\frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{2}$ будет соответствовать $-\frac{1}{3} \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Как ясно из сказанного выше, в последнем промежутке нет собственных значений, а потому ряд по степеням η будет иметь радиус сходимости $> \frac{1}{2}$ и наверное будет сходиться при интересующем нас значении $\eta = \frac{1}{2}$. Для получения этого ряда по степеням η мы не будем пользоваться рядом по степеням λ, а непосредственно в данное интегральное уравнение введем параметр η. Имеем тогда:

$$\mu(\sigma) - \frac{\eta}{1-\eta} \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\, \mu(s)\, ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma);$$

$$(1-\eta)\, \mu(\sigma) - \eta \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\, \mu(s)\, ds = \frac{1-\eta}{\pi} f(\sigma),$$

или, пользуясь тем, что $\int_0^{s_0} K(s, \sigma)\, ds = -1$ [см. (5) и (10)], можем переписать еще иначе:

$$\mu(\sigma) - \eta \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\, [\mu(s) - \mu(\sigma)]\, ds = \frac{1-\eta}{\pi} f(\sigma),\text{[1]} \tag{15}$$

где должно быть взято $\eta = \frac{1}{2}$. Если искать решение этого уравнения по методу последовательных приближений, то получим его в следующем виде:

$$\mu(\sigma) = \mu_0(\sigma) + \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) + \ldots, \tag{16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mu_0(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} f(\sigma), \\ \mu_{n+1}(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_0^{s_0} K(s, \sigma)\, [\mu_n(s) - \mu_n(\sigma)]\, ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\, [\mu_n(\sigma) - \mu_n(s)]\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

---

[1]) К уравнению (15) можно было прийти и проще. Именно, приравняв $f(s)$ выражение (7) перед последним преобразованием, мы получили бы уравнение (15) при $\eta = \frac{1}{2}$.

Ряд (16) для решения задачи Дирихле был предложен еще в 1877 г. Нейманом.[1]) Для случая выпуклого контура его сходимость была установлена еще самим Нейманом с помощью совершенно элементарных средств.[2])

Мы приведем вкратце это доказательство. Как мы говорили выше, контур будем предполагать выпуклым и притом в узком смысле, т. е. без прямолинейных участков. Сделаем несколько предварительных замечаний.

1. Все функции $\mu_n(\sigma)$ непрерывны.

Для $\mu_0(\sigma)=\frac{1}{2\pi}f(\sigma)$ это справедливо по предположению. Пусть, далее, $\mu_n(\sigma)$ непрерывна; для того чтобы убедиться в непрерывности функции $\mu_{n+1}(\sigma)$ при $\sigma=\sigma_0$, рассмотрим ее выражение:

$$\mu_{n+1}(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0}\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}[\mu_n(\sigma)-\mu_n(s)]\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0}[\mu_n(\sigma)-\mu_n(\sigma_0)]\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0}[\mu_n(\sigma_0)-\mu_n(s)]\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds=$$

$$=\frac{1}{2}[\mu_n(\sigma)-\mu_n(\sigma_0)]+\frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0}[\mu_n(\sigma_0)-\mu_n(s)]\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds.$$

Здесь первый член непрерывен по предположению, а второй также непрерывен при $\sigma=\sigma_0$, благодаря тому, что первый множитель $[\mu_n(\sigma_0)-$ $-\mu_n(s)]$ подынтегральной функции обращается в нуль при $s=\sigma_0$.

2. Пусть функция $f(s)$ положительна и ограничена: $0\leqslant f(s)\leqslant K$, тогда

$$|J|=\left|\int_L f(s)\left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds}-\frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}\right]ds\right|\leqslant h\pi K, \qquad (18)$$

где $h<1$ постоянная, не зависящая от выбора точек σ_1, σ_2 и функции $f(s)$. В самом деле, разобьем контур C на две части: L', где выполнено неравенство

$$\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds}\geqslant\frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds},$$

и L'', где

$$\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds}<\frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}.$$

---

[1]) См. Гурса [1], т. III, ч. 1, стр. 170.

[2]) Интересно отметить, что ряд, который получается, если разыскивать решение уравнения (15) в виде ряда по степеням η, и члены которого представляют линейные комбинации двух соседних членов ряда (16), будет сходящимся в случае любой области с гладким контуром, как это следует из приведенных выше рассуждений.

Очевидно тогда, что $|J|$ окажется максимальным, если мы возьмем функцию $f(s)$, равной K на L' и нулю на L'' или наоборот. Останавливаясь для определенности на первом случае, имеем:

$$|J| = K \int_{L'} \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}\right] ds.$$

Стоящий справа интеграл означает геометрически разность тех углов, под которыми видна часть L' контура L из точек, отвечающих $s = \sigma_1$ и $s = \sigma_2$. Очевидно, каждый член этой разности $\leqslant \pi$ и $\geqslant 0$, причем одновременный знак равенства исключен. Итак, при каждых данных σ_1 и σ_2

$$\int_{L'} \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}\right] ds < \pi.$$

Далее, величина, стоящая слева, представляет непрерывную функцию σ_1 и σ_2, а потому и верхняя ее граница $< \pi$. Обозначим эту верхнюю границу через $h\pi$ $(h < 1)$, тогда по предыдущему

$$|J| \leqslant Kh\pi,$$

и неравенство (18) установлено.

Приведем теперь доказательство сходимости ряда (16), для чего оценим $\mu_i(\sigma)$. Пусть $m \leqslant \mu_0(\sigma) \leqslant M$ $\left[\mu_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi} f(\sigma)\right]$, тогда

$$\mu_1(\sigma_2) - \mu_1(\sigma_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \left\{ [\mu_0(\sigma_2) - \mu_0(s)] \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds} - \right.$$

$$\left. - [\mu_0(\sigma_1) - \mu_0(s)] \cdot \frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} \right\} ds = \frac{1}{2\pi} \left[\mu_0(\sigma_2) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds} ds - \right.$$

$$\left. - \mu_0(\sigma_1) \int_0^{s_0} \frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} ds \right] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} [\mu_0(s) - m] \times$$

$$\times \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}\right] ds + \frac{m}{2\pi} \int_C^{s_0} \left[\frac{d\omega(s, \sigma_1)}{ds} - \frac{d\omega(s, \sigma_2)}{ds}\right] ds.$$

Здесь первый член равен $\frac{1}{2}[\mu_0(\sigma_2) - \mu_0(\sigma_1)]$ и не превосходит по модулю $\frac{1}{2}(M - m)$. Во втором члене функция $\mu_0(s) - m$ может играть роль $f(s)$ в предложении 2, а потому второй интеграл не

превзойдет $\frac{1}{2}h(M-m)$; наконец, третий интеграл равен нулю. Итак,

$$|\mu_1(\sigma_2)-\mu_1(\sigma_1)| \leqslant \frac{1}{2}(M-m)+\frac{1}{2}h(M-m)=\rho(M-m),$$

где

$$\rho=\frac{1+h}{2}<1.$$

Таким же точно образом можно получить последовательно, что

$$|\mu_i(\sigma_2)-\mu_i(\sigma_1)| \leqslant (M-m)\rho^i. \tag{19}$$

Отсюда заключаем:

$$|\mu_i(\sigma)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}[\mu_{i-1}(\sigma)-\mu_{i-1}(s)]\,ds\right|<$$

$$<(M-m)\rho^{i-1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\right|=\frac{M-m}{2}\rho^{i-1}. \tag{20}$$

На основании полученного неравенства ясна уже и равномерная сходимость ряда (16) и то, что полученное решение $\mu(\sigma)$ непрерывно. В том, что $\mu(\sigma)$ удовлетворяет предложенному уравнению, можно убедиться хотя бы непосредственной подстановкой.

Отметим еще следующее неравенство:

$$|\mu(\sigma)-\mu_0(\sigma)|=|\mu_1(\sigma)+\mu_2(\sigma)+\ldots| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M-m}{2}(1+\rho+\rho^2+\ldots)=\frac{M-m}{2(1-\rho)}. \tag{21}$$

Мы покажем теперь, что если предположить кривую L имеющей всюду конечный радиус кривизны, то для величины h и ρ можно дать вполне точную оценку через известные геометрические элементы.[1])

Для этой цели оценим прежде всего снизу $\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}$, которая для выпуклой области представляет величину положительную. Обозначим через $\theta=\theta(s)$ угол касательной к кривой L с положительным направлением оси OX. Ясно, во-первых, что

$$\left[\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\right]_{s=\sigma}=\frac{1}{2}\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{2R_\sigma},$$

где R_σ — радиус кривизны кривой L в точке, соответствующей $s=\sigma$. В самом деле, геометрически $\left[\frac{d\omega}{ds}\right]_{s=\sigma}$ есть скорость поворота секущей, отнесенная к дуге, и потому, очевидно, она равна половине кривизны.

---

[1]) См. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [1], где содержатся частично приведенные ниже рассуждения.

Далее, если минимум $\frac{d\omega}{ds}$ достигается не при $s=\sigma$, то в такой точке должна быть $\frac{d^2\omega}{ds^2}=0$. Вычислим эту вторую производную. Обозначим через $r_{s,\sigma}$ длину вектора, идущего от точки σ к s, а через $\omega_{s,\sigma}=\omega(s,\sigma)$, как и раньше, угол, образованный им с осью OX; имеем:

$$\omega_{s,\sigma}=\operatorname{arctg}\frac{y(s)-y(\sigma)}{x(s)-x(\sigma)};$$

$$\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}=\frac{1}{1+\left[\frac{y(s)-y(\sigma)}{x(s)-x(\sigma)}\right]^2}\cdot\frac{[x(s)-x(\sigma)]\frac{dy}{ds}-[y(s)-y(\sigma)]\frac{dx}{ds}}{[x(s)-x(\sigma)]^2}=$$

$$=\frac{[x(s)-x(\sigma)]\sin\theta-[y(s)-y(\sigma)]\cos\theta}{r^2_{s,\sigma}}=$$

$$=\frac{1}{r_{s,\sigma}}(\cos\omega_{s,\sigma}\sin\theta-\sin\omega_{s,\sigma}\cos\theta)=\frac{\sin(\theta-\omega_{s,\sigma})}{r_{s,\sigma}};$$

$$\frac{d^2\omega}{ds^2}=$$

$$=\frac{r\cos(\theta-\omega)\left[\frac{d\theta}{ds}-\frac{d\omega}{ds}\right]-\sin(\theta-\omega)\frac{1}{r}\{[x(s)-x(\sigma)]\cos\theta+[y(s)-y(\sigma)]\sin\theta\}}{r^2}=$$

$$=\frac{r\cos(\theta-\omega)\frac{d\theta}{ds}-\cos(\theta-\omega)\sin(\theta-\omega)-\sin(\theta-\omega)\cos(\theta-\omega)}{r^2}=$$

$$=\frac{\cos(\theta-\omega)}{r^2}\left[r\frac{1}{R_s}+2\sin(\omega-\theta)\right].$$

Отсюда видно, что $\frac{d^2\omega_{s,\sigma}}{ds^2}$ обращается в нуль, только если $\cos(\omega_{s,\sigma}-\theta)=0$ или $\sin(\omega_{s,\sigma}-\theta)=-\frac{r_{s,\sigma}}{2R_s}$, но тогда $\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}$ обращается в $\frac{1}{r_{s,\sigma}}$ или соответственно в $\frac{1}{2R_s}$. Последнее значение, как мы видели, $\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}$ принимает в частности при $s=\sigma$. Итак, ясно, что если мы обозначим через d_0 максимальное расстояние между двумя точками кривой, а через R_0 — максимальный радиус кривизны, то минимум $\frac{d\omega}{ds}$ будет $\geqslant$ меньшего из двух чисел $\frac{1}{d_0}$ и $\frac{1}{2R_0}$. Геометрически очевидно, однако, что $\frac{1}{2R_0}\leqslant\frac{1}{d_0}$, а потому, полагая $\frac{1}{2R_0}=\alpha$, можем утверждать, что при всех рассматриваемых значениях s и σ

$$\frac{d\omega_{s,\sigma}}{ds}\geqslant\alpha. \tag{22}$$

После того как получена оценка для $\frac{d\omega}{ds}$, легко указать и число $h<1$, о котором идет речь в предложении 2.

Пусть, действительно, L' — некоторая часть контура L. Обозначим L'' ту часть L, которая остается после удаления L'. Пусть, далее, s' — полная длина L' и $s''=s_0-s'$ — длина L''. Имеем тогда:

$$J=\int\limits_{L'}\left[\frac{d\omega(s,\sigma_1)}{ds}-\frac{d\omega(s,\sigma_2)}{ds}\right]ds=$$

$$=\int\limits_{L}\frac{d\omega(s,\sigma_1)}{ds}ds-\int\limits_{L''}\frac{d\omega(s,\sigma_1)}{ds}-\int\limits_{L'}\frac{d\omega(s,\sigma_2)}{ds}ds\leqslant\pi-s''\alpha-s'\alpha=$$

$$=\pi\left(1-\frac{\alpha s_0}{\pi}\right)=\pi\left(1-\frac{s_0}{2\pi R_0}\right).$$

Таким же образом может быть установлено аналогичное неравенство для $-J$, а потому

$$|J|\leqslant\pi\left(1-\frac{s_0}{2\pi R_0}\right)=\pi h. \tag{23}$$

Следовательно, за h может быть взято число $1-\frac{s_0}{2\pi R_0}$; вычитаемое имеет здесь простой геометрический смысл: это есть отношение длины кривой L к максимальной длине окружности круга кривизны.

Для задачи Дирихле может применяться рассмотренный в § 1 данной главы метод замены интегрального уравнения системой обыкновенных линейных уравнений. При этом имеющаяся здесь оценка для верхней границы искомой функции (21) позволяет с успехом дать оценку для погрешности, которая получается при применении метода.

3. Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Мы рассмотрим здесь более подробно один из возможных способов замены интегрального уравнения системой алгебраических, именно способ, предложенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [1].[1]) Этот способ состоит в том, что в интегральном уравнении

$$\mu(\sigma)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{s_0}\mu(s)\,\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}ds=f(\sigma) \tag{24}$$

входящий в него интеграл заменяют приближенно следующей суммой:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mu(s_j)\int\limits_{s_j-\frac{\Delta s}{2}}^{s_j+\frac{\Delta s}{2}}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mu(s_j)\left[\omega\left(s_j+\frac{\Delta s}{2},\sigma\right)-\omega\left(s_j-\frac{\Delta s}{2},\sigma\right)\right]=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\mu(s_j)\,\Delta\omega(s_j,\sigma).$$

[1]) Оценка погрешности проведена там несколько иначе.

Здесь Δs есть n-я часть промежутка $(0,\ s_0)$: $\Delta s = \frac{s_0}{n}$; s_i — любые точки, отстоящие одна от другой на расстояние Δs, например:

$$s_1 = \frac{\Delta s}{2}; \quad s_1 = \frac{3}{2}\Delta s; \ \ldots; \quad s_n = \frac{(2n-1)}{2}\Delta s = s_0 - \frac{\Delta s}{2}.$$

Эта замена сводится к тому, что весь интеграл разбивается на интегралы по промежуткам $\left(s_j - \frac{\Delta s}{2},\ s_j + \frac{\Delta s}{2}\right)$, причем в каждом из этих интегралов выносится среднее значение функции $\mu(s)$, при этом берется значение μ именно в срединной точке интервала. Итак, заменим в интегральном уравнении (24) интеграл на сумму и положим в полученном равенстве последовательно $\sigma = s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$; мы придем тогда к системе уравнений для определения приближенных значений μ в точках s_j:

$$\tilde{\mu}(s_i) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j,\ s_i) = f(s_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{25}$$

где для краткости положено

$$\Delta_j\omega(s_j,\ s_i) = \int\limits_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \frac{d\omega(s,\ s_i)}{ds}\,ds.$$

Система уравнений (25) удобна тем, что коэффициенты ее $\Delta_j\omega(s_j, s_i)$ могут быть легко определены даже по чертежу.

Решая эту систему, найдем приближенные значения искомой функции в точках s_i: $\tilde{\mu}(s_i)$. Соответствующие точные значения обозначим через $\mu(s_i)$. Если мы обозначим через z_i разность между ними:

$$z_i = \mu(s_i) - \tilde{\mu}(s_i),$$

то, как легко видеть, числа z_i удовлетворяют системе уравнений

$$z_i + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \Delta_j\omega(s_j,\ s_i)\,z_j = R(s_i), \tag{26}$$

где

$$R(\sigma) = \frac{1}{\pi}\left[\sum_{j=1}^{n} \mu(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j,\ \sigma) - \int\limits_0^{s_0} \mu(s)\,\frac{d\omega(s,\ \sigma)}{ds}\,ds\right]. \tag{27}$$

Обозначим через R^* максимум величины $R(\sigma)$ (оценкой этой величины мы займемся ниже) и оценим числа z_i.

Преобразуем прежде всего систему (26). Именно, пользуясь равенством

$$1=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\Delta_j\omega(s_j,\ s_i)\left(=\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\,ds\right),$$

перепишем ее в виде:

$$z_i=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\Delta_j\omega(s_j,\ s_i)(z_i-z_j)+\frac{1}{2}R(s_i). \qquad (28)$$

Эта система уравнений аналогична уравнению Неймана и может быть решена тем же способом последовательных приближений. Именно решение z_i найдем в форме ряда:

$$z_i=z_i^{(0)}+z_i^{(1)}+\ldots, \qquad (29)$$

где

$$z_i^{(0)}=\frac{R(s_i)}{2};\quad z_i^{(l+1)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\Delta_j\omega(s_j,\ s_i)(z_i^{(l)}-z_j^{(l)}). \qquad (30)$$

Сходимость ряда (29) может быть установлена тем же способом что и для ряда Неймана. Действительно, прежде всего справедливо неравенство, аналогичное (23):

$$\left|\sum_{j=1}^{n}{}'\Delta_j\omega(s_j,\ s_i)-\sum_{j=1}^{n}{}'\Delta_j\omega(s_j,\ s_k)\right|\leqslant\pi h=\pi\left(1-\frac{s_0}{2\pi R_0}\right), \qquad (31)$$

если $\sum'$ означает сумму, взятую по некоторым, любым образом выбранным j от 1 до n. Это неравенство справедливо, так как если взять за L' часть L, состоящую из промежутков $\left(s_j-\frac{\Delta s}{2},\ s_j+\frac{\Delta s}{2}\right)$, отвечающих тем j, по которым производится суммирование, то неравенство (31) есть не что иное, как (23). Далее, аналогично предложению 2, можно показать, что если f_j любые числа и $0\leqslant f_j\leqslant K$, то

$$\left|\sum_{j=1}^{n}[\Delta_j\omega(s_j,\ s_i)-\Delta_j\omega(s_j,\ s_k)]f_j\right|\leqslant\pi hK. \qquad (32)$$

Для установления этого достаточно разбить сумму на две: $\sum'$ и $\sum''$, относя в одну те слагаемые, для которых разность в скобках положительна, и во вторую — те, для которых она отрицательна. Далее при оценке каждой суммы можно заменить f_i на K и воспользоваться неравенством (31).

Оценки для установления сходимости ряда дальше могут быть произведены так же, как и в способе Неймана [(19) и (20)], если только оперировать теперь с суммами, как там с интегралами. Эти оценки дадут:

$$|z_i^{(0)}| \leqslant \frac{R^*}{2}; \quad |z_i^{(l)}| \leqslant \frac{R^*}{2}\rho^{l-1}; \quad \rho = \frac{1+h}{2},$$

$$|z_i - z_i^{(0)}| \leqslant \frac{R^*}{2}(1+\rho+\rho^2+\ldots) = \frac{R^*}{2(1-\rho)},$$

$$|z_i| \leqslant \frac{R^*}{2} + \frac{R^*}{2(1-\rho)} = \frac{3-h}{2(1-h)} R^* = \frac{2+\frac{s_0}{2\pi R_0}}{2\cdot\frac{s_0}{2\pi R_0}} R^* = \tau R^*,$$

где τ — вполне определенная постоянная.

Итак, в точках s_i мы имеем:

$$|\mu(s_i) - \tilde{\mu}(s_i)| \leqslant \tau R^*. \tag{33}$$

Отметим, кроме того, что так как $\tilde{\mu}(s_i)$ удовлетворяют такой же системе, как и z_i, лишь с другими свободными членами $f(s_i)$ вместо $R(s_i)$, то ясно, что если N есть верхняя граница $|f(s)|$, то

$$|\tilde{\mu}(s_i)| \leqslant \tau N. \tag{34}$$

Далее для точного решения $\mu(s)$, как это следует из рассуждений, приведенных при изложении метода Неймана, будет выполнена аналогичная оценка

$$|\mu(s)| \leqslant \tau N. \tag{35}$$

В результате решения системы (25) мы получим приближенные значения функции μ в точках s_i, в остальных точках ее естественно определить приближенно на основании (24) как

$$\tilde{\mu}(s) = f(s) - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j,\ s). \tag{36}$$

Оценим разницу между этим приближенным решением и точным $\mu(s)$. Для этой цели напишем точное равенство

$$\mu(s) = f(s) - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \mu(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j,\ s) + R(s), \tag{37}$$

где $R(s)$ — остаточный член, который по модулю $\leqslant R^*$. Сравнивая это равенство с предыдущим (36) и пользуясь (33), находим:

$$|\mu(s) - \tilde{\mu}(s)| \leqslant R^* + \tau R^*. \tag{38}$$

Займемся теперь оценкой R^*.

Для любой функции $F(s)$ имеем:

$$\int\limits_{a-h/2}^{a+h/2} F(s)\,ds - F(a)\cdot h = \int\limits_{a-h/2}^{a+h/2} \Big(F(a)+(s-a)F'(a)+ + \frac{F''(\zeta)}{2}(s-a)^2\Big)ds - F(a)\,h = \frac{1}{24}F''(s^*)\,h^3,$$

где s^* — некоторое среднее значение: $a-\frac{h}{2}\leqslant s^*\leqslant a+\frac{h}{2}$. Применяя эту формулу для функции

$$F(s) = [\mu(s)-\mu(s_j)]\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds},$$

получим:

$$\left|\int\limits_{s_j-\Delta s/2}^{s_j+\Delta s/2} [\mu(s)-\mu(s_j)]\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\Delta s)^3}{24}\left\{\max\left|\mu''(s)\cdot\frac{d\omega}{ds}\right| + 2\max\left|\mu'(s)\frac{d^2\omega}{ds^2}\right| + + 2\max\left|\frac{d^3\omega}{ds^3}\mu(s)\right|\right\} \leqslant \frac{(\Delta s)^3}{24}Q.$$

При этом постоянную Q легко определить на основании данных задачи. В самом деле, пользуясь (35) и затем дифференцируя первоначальное уравнение (24), находим, что:

$$|\mu(\sigma)|\leqslant\tau N;$$

$$|\mu'(\sigma)| < \max|f'| + \frac{1}{\pi}[\max|\mu(s)|]\int\limits_0^{s_0}\left|\frac{d^2\omega}{ds\,d\sigma}\right|ds = M_1;$$

$$|\mu''(\sigma)|\leqslant\max|f''| + \frac{1}{\pi}[\max|\mu(s)|]\int\limits_0^{s_0}\left|\frac{d^3\omega}{ds\,d\sigma^2}\right|ds = M_2,$$

где M_1, M_2, очевидно, легко определяемые постоянные. Далее, значения

$$\frac{d^2\omega}{ds^2},\quad \frac{d^3\omega}{ds^3}$$

могут быть также оценены, а потому и все выражение для Q может быть найдено. На основании этого

$$|R(s)| = \left|\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\left[\int\limits_{s_j-\frac{\Delta s}{2}}^{s_j+\frac{\Delta s}{2}}\mu(s)\frac{d\omega}{ds}ds - \mu(s_j)\int\limits_{s_j-\frac{\Delta s}{2}}^{s_j+\frac{\Delta s}{2}}\frac{d\omega}{ds}ds\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{(\Delta s)^2}{24}Q\cdot n\Delta s = \frac{1}{\pi}\frac{(\Delta s)^2}{24}Qs_0.$$

Последняя величина и может быть принята за оценку R^*, а потому имеем:

$$|\mu(s)-\tilde{\mu}(s)|\leqslant R^*(1+\tau)\leqslant\frac{1+\tau}{\pi}\frac{(\Delta s)^2}{24}Qs_0.$$

После того как плотность $\mu(s)$ найдена с помощью потенциала двойного слоя, можем написать требуемое решение задачи Дирихле:

$$\tilde{u}(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\tilde{\mu}(s)\frac{d}{ds}\omega(s, x, y)\,ds,$$

где

$$\omega(s, x, y)=\operatorname{arctg}\frac{y(s)-y}{x(s)-x}.$$

Так как точное и приближенное значения u — функции гармонические, то максимум их разности достигается, когда точка (x, y) принадлежит контуру. Но значение приближенного решения на контуре есть

$$\tilde{\mu}(\sigma)+\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\tilde{\mu}(s)\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds,$$

а значение точного решения есть

$$\mu(\sigma)+\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\mu(s)\,\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds=f(s),$$

отсюда разница на контуре будет равна:

$$|u(x, y)-\tilde{u}(x, y)|\leqslant|\mu(\sigma)-\tilde{\mu}(\sigma)|+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}|\tilde{\mu}(s)-\mu(s)|\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}\,ds\leqslant\frac{1+\tau}{\pi}\frac{(\Delta s)^2}{12}Qs_0.$$

Укажем, впрочем, что приближенное решение, полученное в виде интеграла, можно заменить приближенно суммой, а именно:

$$\tilde{u}(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\tilde{\mu}(s)\frac{d}{ds}\omega(s, x, y)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{s_j-\frac{\Delta s}{2}}^{s_j+\frac{\Delta s}{2}}\tilde{\mu}(s)\frac{d}{ds}\omega(s, x, y)\,ds\cong\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\mu}(s_j)\,\Delta_j\omega(s_j, x, y),$$

где $\mu(s_j)$ — найденные приближенные значения.

4. Пример. [1]) Рассмотрим в качестве примера применения методов, изложенных в этом и в предыдущем параграфе, задачу Дирихле для эллипса:

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ (a \geqslant b),$$

т. е. задачу определения гармонической внутри эллипса функции $u(x, y)$, которая на контуре обращается в заданную функцию $g(t)$: $u(a\cos t, b\sin t) = g(t)$. Эта задача, если искать решение в виде потенциала двойного слоя

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega(t, x, y)}{dt}\mu(t)\,dt,$$

приводит к уравнению (11):

$$\mu(\tau) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)}\mu(t)\,dt = \frac{1}{\pi}g(\tau).$$

Положим для краткости

$$K(t, \tau) = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)}.$$

Раскрывая это выражение, имеем:

$$K(t, \tau) = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{b\sin t - b\sin\tau}{a\cos t - a\cos\tau} = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\frac{2\cos\frac{t+\tau}{2}\cdot\sin\frac{\tau - t}{2}}{-2\sin\frac{t+\tau}{2}\sin\frac{\tau - t}{2}} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\frac{t+\tau}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}ab}{a^2\sin^2\frac{t+\tau}{2} + b^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}}.$$

Или, предполагая $b \neq a$, т. е. исключая случай круга, можем $K(t, \tau)$ придать следующий вид, удобный для численных подсчетов:

$$K(t, \tau) = \frac{\frac{ab}{a^2 - b^2}}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \cos(t + \tau)}.$$

Будем для простоты предполагать, что условия симметричны относительно координатных осей, т. е. $g(-t) = g(t)$; $g\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = g\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, тогда искомая функция $\mu(t)$ будет удовлетворять тому же условию. В интегральном уравнении заменим интеграл суммой следующим образом. Для определенности выбираем в промежутке $(0, 2\pi)$ 16 точек: 4 точки возьмем в промежутке

---

[1]) Этот пример рассмотрен в работе Нистрёма [1], стр. 32. См. также Берстоу-Берри [1] и С. Г. Михлин [4], стр. 35.

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, пусть это будет t_1, t_2, t_3, t_4, остальные точки $t_5, t_6, \ldots, t_{16}$ берем симметрично относительно осей:

$$\begin{array}{lll} t_8=\pi-t_1; & t_9=\pi+t_1; & t_{16}=2\pi-t_1; \\ t_7=\pi-t_2; & t_{10}=\pi+t_2; & t_{15}=2\pi-t_2; \\ t_6=\pi-t_3; & t_{11}=\pi+t_3; & t_{14}=2\pi-t_3; \\ t_5=\pi-t_4; & t_{12}=\pi+t_4; & t_{13}=2\pi-t_4. \end{array}$$

В силу симметрии задачи:

$$\begin{array}{ll} g(t_1)=g(t_8)=g(t_9)=g(t_{16}); & g(t_2)=g(t_7)=g(t_{10})=g(t_{15}); \\ g(t_3)=g(t_6)=g(t_{11})=g(t_{14}); & g(t_4)=g(t_5)=g(t_{12})=g(t_{13}); \\ \mu(t_1)=\mu(t_8)=\mu(t_9)=\mu(t_{16}); & \mu(t_2)=\mu(t_7)=\mu(t_{10})=\mu(t_{15}); \\ \mu(t_3)=\mu(t_6)=\mu(t_{11})=\mu(t_{14}); & \mu(t_4)=\mu(t_5)=\mu(t_{12})=\mu(t_{13}). \end{array}$$

Мы рассмотрим две формулы квадратур: формулу Гаусса и формулу прямоугольников. Формулу Гаусса применяем для промежутка $(0, \pi)$ с восемью ординатами. Тогда абсциссы t_5, t_6, t_7 и t_8 сами получатся симметричными точкам t_1, t_2, t_3, t_4. За точки t_1, t_2, t_3, t_4, преобразовав соответствующие абсциссы Гаусса к промежутку $(0, \pi)$, должны принять:

$$t_1=3°34'26'',09; \quad t_2=18°18'0'',06; \quad t_3=42°42'7'',50; \quad t_4=73°29'27'',18.$$

Для промежутка $(\pi, 2\pi)$ мы возьмем ту же формулу Гаусса, только вместо точек $t_1, \ldots, t_8$ воспользуемся точками $t_9, \ldots, t_{16}$. Формула Гаусса в применении к интегралу $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} K(t, \tau)\mu(t)\,dt$ дает:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(t, \tau)\mu(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{16} a_k K(t_k, \tau)\mu(t_k),$$

при этом коэффициенты a_k, благодаря присутствию множителя $\frac{1}{\pi}$, должны быть взяты те же, что и для промежутка $(0, 1)$ при 8 ординатах, а именно:

$$\begin{array}{ll} a_1=a_8=a_9=a_{16}=0{,}0506143; & a_2=a_7=a_{10}=a_{15}=0{,}1111905; \\ a_3=a_6=a_{11}=a_{14}=0{,}1568533; & a_4=a_5=a_{12}=a_{13}=0{,}1813419. \end{array}$$

Подставляя вместо интеграла сумму и полагая $\tau=t_1, t_2, \ldots$, получим систему уравнений

$$\tilde{\mu}(t_i)+\sum_{k=1}^{16} a_k K(t_k, t_i)\,\tilde{\mu}(t_k)=\frac{1}{\pi}g(t_i) \quad (i=1, 2, \ldots, 16).$$

Мы получили систему 16 уравнений для определения 16 неизвестных $\tilde{\mu}(t_i)$ — приближенных значений функции μ в точках t_i. Однако в силу упомянутой выше симметрии можно оставить 4 неизвестных $\tilde{\mu}(t_1)$, $\tilde{\mu}(t_2)$, $\tilde{\mu}(t_3)$, $\tilde{\mu}(t_4)$ и сохранить лишь 4 первых уравнения, так как остальные уравнения их повторяют.

Группируя члены с каждым неизвестным, можем записать систему в виде:

$$\tilde{\mu}(t_j)+\sum_{k=1}^{4} B_{j,k}\tilde{\mu}(t_k)=\frac{1}{\pi}g(t_j) \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

где коэффициентам $B_{j,k}$, пользуясь выражениями t_5, t_6, ... t_{16} через t_1, t_2, t_3, t_4 можно придать форму

$$B_{j,\ k}=\frac{ab}{a^2-b^2}a_k\left[\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(t_k+t_j)}+\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(\pi-t_k+t_j)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(\pi+t_k+t_j)}+\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(2\pi-t_k+t_j)}\right]=$$

$$=\frac{ab}{a^2-b^2}a_k\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\mp\cos(t_k\pm t_j)},$$

при этом последний множитель представляет сокращенное обозначение для суммы четырех слагаемых, стоящих в фигурной скобке.

После того как в результате решения систем $\tilde{\mu}(t_1)$, $\tilde{\mu}(t_2)$, $\tilde{\mu}(t_3)$, $\tilde{\mu}(t_4)$ будут определены, можем получить приближенное значение $\tilde{\mu}(t)$ в остальных точках, заменяя в данном интегральном уравнении интеграл на сумму. Получим:

$$\tilde{\mu}(\tau)=\frac{1}{\pi}g(\tau)-\frac{ab}{a^2-b^2}\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i\tilde{\mu}(t_i)}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\mp\cos(\tau\pm t_i)}.$$

Для численных подсчетов остановимся на случае $a=1$; $b=\frac{1}{2}$. Вычислив для данного случая коэффициенты $B_{j,k}$ и пользуясь указанными выше значениями t_i и a_i, можем систему уравнений, служащую для определения $\tilde{\mu}(t_j)$, написать в виде:

$$\tilde{\mu}(t_1)\cdot 1{,}125990+\tilde{\mu}(t_2)\cdot 0{,}263037+\tilde{\mu}(t_3)\cdot 0{,}311729+\tilde{\mu}(t_4)\cdot 0{,}299244=\frac{1}{\pi}g(t_1),$$

$$\tilde{\mu}(t_1)\cdot 0{,}119735+\tilde{\mu}(t_2)\cdot 1{,}254816+\tilde{\mu}(t_3)\cdot 0{,}315974+\tilde{\mu}(t_4)\cdot 0{,}309480=\frac{1}{\pi}g(t_2),$$

$$\tilde{\mu}(t_1)\cdot 0{,}100591+\tilde{\mu}(t_2)\cdot 0{,}223987+\tilde{\mu}(t_3)\cdot 1{,}321839+\tilde{\mu}(t_4)\cdot 0{,}353576=\frac{1}{\pi}g(t_3),$$

$$\tilde{\mu}(t_1)\cdot 0{,}083522+\tilde{\mu}(t_2)\cdot 0{,}189758+\tilde{\mu}(t_3)\cdot 0{,}305828+\tilde{\mu}(t_4)\cdot 1{,}420914=\frac{1}{\pi}g(t_4).$$

	$t_1=11°15'$	$t_2=33°45'$	$t_3=56°15'$	$t_4=78°45'$	$\mu_0=g$	μ_1	μ_2
$t_1=11°15'$	0,300608	0,266309	0,227517	0,205566	0,6184474	0,4223938	0,4006101
$t_2=33°45'$	0,266309	0,261815	0,244358	0,227517	0,4892463	0,4080378	0,3990146
$t_3=56°15'$	0,227517	0,244358	0,261815	0,266309	0,3065284	0,3877361	0,3967589
$t_4=78°45'$	0,205566	0,227517	0,266309	0,300608	0,1773273	0,3733809	0,3951642

Чтобы довести вычисления до конца, остановимся и на определенных граничных условиях. Будем искать функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условию [1])

$$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

на эллипсе, иначе говоря, в данном случае

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(\cos^2 t+\frac{1}{4}\sin^2 t\right)=\frac{1}{16}(5+3\cos 2t).$$

В таком случае в правой части нужно подставить:

$$\frac{1}{\pi}g(t_1)=0{,}158691;\quad \frac{1}{\pi}g(t_2)=0{,}147386;\quad \frac{1}{\pi}g(t_3)=0{,}104254;$$
$$\frac{1}{\pi}g(t_4)=0{,}049428.$$

Решая непосредственно написанную выше систему четырех уравнений, найдем:

$$\tilde\mu(t_1)=0{,}103038;\ \tilde\mu(t_2)=0{,}092859;\ \tilde\mu(t_3)=0{,}054038;\ \tilde\mu(t_4)=0{,}004698.$$

Подставляя эти значения в приведенное выше выражение для $\tilde\mu(t)$, можно определить $\tilde\mu$ и в остальных точках.

В этой задаче можно получить точное решение интегрального уравнения, это есть

$$\mu(t)=\frac{1}{160\pi}(25+27\cos 2t).$$

Вычислив для сравнения значения μ в точках t_1, t_2, t_3, t_4, найдем:

$$\mu(t_1)=0{,}103034;\ \mu(t_2)=0{,}092859;\ \mu(t_3)=0{,}054040;\ \mu(t_4)=0{,}004696.$$

---

[1]) К этому условию приводит задача о кручении стержня эллиптического сечения, т. е. об определении решения уравнения $\Delta u=-2$ при нулевых условиях на контуре. Действительно, вводя $u_1=u+\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, мы видим, что функция u_1 удовлетворяет уравнению $\Delta u_1=0$. Упомянем, что для поставленной задачи о кручении легко указать точное решение, именно

$$u=-\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}-1\right).$$

Таблица 1

μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}
0,3891895	0,3979204	0,3978903	0,3978868	0,3978860	0,3978860	0,3978858	0,3978856
0,3980119	0,3979003	0,3978877	0,3978861	0,3978858	0,3978856	0,3978854	0,3978852
0,3977612	0,3978724	0,3978846	0,3978858	0,3978857	0,3978855	0,3978853	0,3978851
0,3975844	0,3978531	0,3978828	0,3978859	0,3978861	0,3978859	0,3978857	0,3978855

Сравнивая значения μ и $\tilde{\mu}$ в других точках, получим расхождение того же порядка, например:

$$\tilde{\mu}(0) = 0{,}103451; \quad \mu(0) = 0{,}103451; \quad \tilde{\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}003985;$$

$$\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}003979.$$

Применим для решения того же примера ряд, который дает метод последовательных приближений и его аналитическое продолжение. При этом требующиеся квадратуры будем проводить приближенно. Тогда, как мы указывали выше (стр. 127), этот способ представляет не что иное, как применение способа итераций для решения той системы линейных уравнений, к которой приближенно сводится решение интегрального уравнения. Мы здесь воспользуемся только вместо формулы Гаусса формулой прямоугольников, что допустимо, так как функции $K(t, \tau)$ и $g(\tau)$ периодичны. Тогда

Таблица 2

	$\lambda = \frac{2\eta}{1-\eta}$, $\eta = \frac{1}{3}$		$\lambda = \left(\frac{\eta+1}{1-\eta}\right)^2 - 1$, $\eta = 3 - 2\sqrt{2}$		$\lambda = \frac{\eta}{1-\eta}$, $\eta = \frac{1}{2}$	
	до η^{10}	до η^5	до η^{10}	до η^5	до η^{10}	до η^5
μ_0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
μ_1	0,999983	0,995885	0,999998	0,999233	0,999023	0,968750
μ_2	0,999664	0,954732	0,999979	0,980458	0,989258	0,812500
μ_3	0,996596	0,790123	0,999570	0,855813	0,945312	0,500000
μ_4	0,980338	0,460905	0,995129	0,526324	0,828125	0,187500
μ_5	0,923436	0,131687	0,968748	0,152244	0,623047	0,031250
μ_6	0,786872		0,875178		0,376953	
μ_7	0,559264		0,668391		0,171875	
μ_8	0,299141		0,381319		0,054687	
μ_9	0,104049		0,138075		0,010742	
μ_{10}	0,017341		0,023178		0,000976	

коэффициенты $B_{i,k}$ можно находить по тем же формулам, что и выше, только t_i и a_i будут иметь другие значения, а именно

$$t_1=\frac{\pi}{16}=11^\circ 15'; \quad t_2=\frac{3}{16}\pi=33^\circ 45'; \quad t_3=\frac{5}{16}\pi=56^\circ 15';$$

$$t_4=\frac{7}{16}\pi=78^\circ 45'; \quad a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

Последовательное вычисление функций $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \ldots$ производим по той схеме, которая указана на стр. 127. Прежде всего вычисляем значения $\lambda K_{i,k} A_i = B_{i,k}$ и затем последовательно определяем $\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \ldots$ (мы пользуемся обозначениями, примененными в § 2 n° 1, только роль φ играет μ). Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 3

	$\mu_1=\mu_8=\mu_9=\mu_{16}$	$\mu_2=\mu_7=\mu_{10}=\mu_{15}$	$\mu_3=\mu_6=\mu_{11}=\mu_{14}$	$\mu_4=\mu_5=\mu_{12}=\mu_{13}$
$\mu(t)=\frac{1}{160\pi}(25+27\cos 2t)$ истинное	0,0993620	0,0702917	0,0291802	0,0001099
Подстановка $\lambda=\left(\frac{\eta+1}{1-\eta}\right)^2-1;\ \eta=3-2\sqrt{2}$ до η^{10}	0,0993621	0,0702919	0,0291803	0,0001099
до η^5	0,09931	0,07024	0,02913	0,00006
Способ домножения $\frac{1}{2}[\mu_0+(\mu_0+\mu_1)+(\mu_1+\mu_2)+\ldots+(\mu_4+\mu_5)]$	0,0993623	0,0702919	0,0291800	0,0001095
$\frac{1}{2}[\mu_0+(\mu_0+\mu_1)+\ldots+(\mu_9+\mu_{10})]$	0,0993620	0,0702917	0,0291802	0,0001098
Подстановка $\lambda=\frac{2\eta}{1-\eta};\ \eta=\frac{1}{3}$ до η^{10}	0,0993628	0,0702926	0,0291810	0,0001107
до η^5	0,09916	0,07009	0,02897	0,00010
$\lambda=\frac{\eta}{1-\eta};\ \eta=\frac{1}{2}$ до η^{10}	0,0993637	0,0702925	0,0291796	0,0001073
до η^5	0,09946	0,07033	0,02914	0,000014

Как мы видим, $\mu_n^{(k)}$ не убывают с увеличением n, поэтому рядом, составленным прямо по последовательным приближениям, воспользоваться для вычислений не можем. Применим различные приемы аналитического продолжения. Во всех случаях мы, после соответствующей подстановки, ряд $\mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + \lambda^2\mu_2 + \ldots$ перестраиваем по степеням η и затем, сохранив некоторое число членов ряда, подставляем вместо η численное значение, соответствующее $\lambda = 1$.

Мы будем сохранять члены до η^5 или до η^{10}. Получающееся в результате подстановки значения η выражение представляет сумму μ_i, снабженных различными численными коэффициентами. В табл. 2 приведены значения этих коэффициентов, которые получаются при различных подстановках.

При способе домножения нужно взять все μ_i с коэффициентом 1 за исключением последнего слагаемого, которое нужно взять с множителем $\frac{1}{2}$. Применяя эти приемы к данной задаче и пользуясь вычисленными значениями $\mu_n^{(j)}$, получаем результаты, которые даны в табл. 3.

Как видим, все приемы продолжения дают вполне удовлетворительные результаты; наилучший результат дает самый простой прием продолжения, именно продолжение с помощью домножения. Отметим, что значения коэффициентов, приведенные в табл. 2, не связаны с данным частным примером и могут использоваться и в других случаях.

§ 4. Решение интегральных уравнений с помощью замены произвольного ядра на вырожденное

1. Интегральное уравнение с вырожденным ядром. Вырожденным называют ядро, которое может быть представлено в виде конечной суммы произведений:

$$K(x, y) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s(x)\beta_s(y). \tag{1}$$

Для такого ядра нетрудно дать полное решение уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x). \tag{2}$$

Прежде всего можем предположить функции $\alpha_s(x)$ линейно независимыми, ибо в противном случае число слагаемых в выражении ядра можно было бы уменьшить.

Решение естественно искать в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\alpha_i(x), \tag{3}$$

где A_i — неизвестные пока постоянные.

Введем обозначения:

$$\int_a^b f(x)\beta_i(x)\,dx = f_i; \quad \int_a^b \alpha_i(x)\beta_j(x)\,dx = \beta_{j,i}. \tag{4}$$

Подставляя выражение $\varphi(x)$ (3) в уравнение, мы должны иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\alpha_i(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{s=1}^{n} \alpha_s(x)\beta_s(y)\right] f(y)\,dy - \\ - \lambda \int_a^b \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_j\alpha_s(x)\beta_s(y)\alpha_j(y)\,dy = 0. \tag{5}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $\alpha_i(x)$, найдем:

$$A_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j\beta_{i,j} = \lambda f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Если обозначить через $\Delta(\lambda)$ детерминант системы (6):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\beta_{1,1} & -\lambda\beta_{1,2} & \ldots & -\lambda\beta_{1,n} \\ -\lambda\beta_{2,1} & 1-\lambda\beta_{2,2} & \ldots & -\lambda\beta_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda\beta_{n,1} & -\lambda\beta_{n,2} & \ldots & 1-\lambda\beta_{n,n} \end{vmatrix} \tag{7}$$

и через $\Delta_{i,k}$ — алгебраическое дополнение элемента k-й строки и i-го столбца, то решение системы напишется в виде:

$$A_i = \lambda \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} f_k}{\Delta(\lambda)}. \tag{8}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{i,k} f_k}{\Delta(\lambda)} \alpha_i(x) =$$

$$= f(x) + \lambda \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_{i,k}\alpha_i(x)\right) \int_a^b \beta_k(y) f(y)\,dy}{\Delta(\lambda)} =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{i,k}\alpha_i(x)\beta_k(y)}{\Delta(\lambda)} f(y)\,dy =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(y)\,dy, \tag{9}$$

где

$$\Delta(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k}\alpha_i(x)\beta_k(y).$$

Следовательно, резольвента для уравнения этого рода получается в явном виде:

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\Delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{10}$$

Собственные числа ядра находятся посредством решения уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0.$$

2. Замена произвольного ядра вырожденным. Возможность удобного решения уравнений с вырожденным ядром приводит естественно к мысли о том, чтобы при решении уравнения с любым ядром заменить это ядро приближенно на вырожденное и решить соответствующее ему уравнение вместо данного. Подыскание вырожденного ядра, близкого к данному, может проводиться многими способами. В частности, в качестве такого ядра может приниматься отрезок ряда Тэйлора (см. n° 3, пример), отрезок ряда Фурье, что, как мы увидим ниже (n° 5), эквивалентно применению метода моментов или особого приема интерполирования (n° 6). Мы займемся сейчас оценкой погрешности, которая получается при замене данного ядра на близкое к нему другое ядро, в частности на вырожденное.

Теорема. *Пусть даны два ядра $k(x, y)$ и $K(x, y)$ и известно, что*

$$\int_a^b |K(x, y) - k(x, y)| \, dy < h \tag{11}$$

и что резольвента $\gamma(x, y, \lambda)$ уравнения с ядром $k(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |\gamma(x, y, \lambda)| \, dy < B, \tag{12}$$

а также, что

$$|f(x) - f_1(x)| < \eta.$$

Тогда, если выполнено условие:

$$1 - |\lambda| h (1 + |\lambda| B) > 0, \tag{13}$$

то уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) \, dy = f(x) \tag{14}$$

имеет единственное решение $\varphi(x)$, и разность между этим решением и решением $\tilde{\varphi}(x)$ уравнения

$$\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \tilde{\varphi}(y) \, dy = f_1(x) \tag{15}$$

не превосходит

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<\frac{N|\lambda|h(1+|\lambda|B)^2}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}+\eta(1+|\lambda|B), \tag{16}$$

где N верхняя граница $|f(x)|$.

Доказательство. Пусть M есть верхняя граница $|\varphi(x)|$ и $\tilde{M}$ верхняя граница $|\tilde{\varphi}(x)|$. Имеем из (14):

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x, y)\varphi(y)\,dy=$$
$$=f(x)+\lambda\int_a^b [K(x, y)-k(x, y)]\varphi(y)\,dy=f^*(x). \tag{17}$$

Правая часть этого уравнения не превосходит

$$|f^*(x)|=|f(x)+\lambda\int_a^b [K(x, y)-k(x, y)]\varphi(y)\,dy|\leqslant$$
$$\leqslant N+|\lambda|M\int_a^b |K(x, y)-k(x, y)|\,dy<N+|\lambda|Mh;$$

тогда решение его $\varphi(x)$ не превзойдет следующей величины:

$$|\varphi(x)|=|f^*(x)+\lambda\int_a^b \gamma(x, y, \lambda)f^*(y)\,dy|<$$
$$<N+|\lambda|Mh+|\lambda|B(N+|\lambda|Mh).$$

Следовательно,

$$M<N+|\lambda|hM+|\lambda|B(N+|\lambda|Mh),$$

откуда

$$M<\frac{N(1+|\lambda|B)}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}, \tag{18}$$

причем последний переход законен, если выполнено условие

$$1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)>0. \tag{13}$$

Итак, при соблюдении этого условия все решения уравнения (14) ограничены, а потому уравнение (14) имеет единственное решение; последнее показывает, между прочим, что λ не есть собственное значение этого уравнения.

Вычитая теперь уравнение (15) из (17), получаем следующее уравнение для разности $\psi(x)=\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)$:

$$\psi(x)-\lambda\int^b k(x, y)\psi(y)\,dy=f^*(x)-f_1(x).$$

Отсюда, так как

$$|f^*(x)-f_1(x)|\leqslant|f^*(x)-f(x)|+|f(x)-f_1(x)|\leqslant|\lambda|Mh+\eta,$$

найдем

$$|\psi(x)|=|f^*(x)-f_1(x)+\lambda\int_a^b\gamma(x,\ y,\ \lambda)[f^*(y)-f_1(y)]\,dy|\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda|Mh+\eta+|\lambda|B(|\lambda|Mh+\eta)=(|\lambda|Mh+\eta)(1+|\lambda|B). \qquad (19)$$

Подставляя еще вместо M его оценку (18), имеем:

$$|\psi(x)|=|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<\frac{N|\lambda|h(1+|\lambda|B)^2}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}+\eta(1+|\lambda|B)$$

и требуемая оценка (16) получена. Заметим, что можно уточнить оценку разности $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|=|\psi(x)|$ следующим образом. Обозначая максимум ее через δ, имеем, очевидно,

$$M\leqslant\tilde{M}+\delta$$

и по (19)

$$\delta\leqslant[|\lambda|(\tilde{M}+\delta)h+\eta](1+|\lambda|B). \qquad (20)$$

Разрешая это неравенство относительно δ, находим

$$\delta\leqslant\frac{(|\lambda|\tilde{M}h+\eta)(1+|\lambda|B)}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}. \qquad (21)$$

Другой способ оценки приведен ниже, в n°4 [1].)

Замечание. Из доказанной теоремы вытекает, что если λ не собственное число ядра $K(x,\ y)$ и последовательность ядер $K_n(x,\ y)\to K(x,\ y)$ и $f_n(x)\to f(x)$ (равномерно), то

$$\tilde{\varphi}_n(x)\to\varphi(x).$$

Действительно, достаточно воспользоваться оценкой (16), составленной для пары ядер $K_n(x,\ y)$ и $K(x,\ y)$ вместо соответственно $K(x,\ y)$ и $k(x,\ y)$.

---

[1]) Изложенный здесь способ оценки погрешности опубликован впервые в первом издании данной монографии. Оценка погрешности, произведенная в других предположениях, чем приведенная здесь, имеется в диссертации И. А. Акбергенова, выполненной в 1935 году в Ленинградском НИИММ. Там же дана оценка погрешности при определении собственных значений. Основные результаты диссертации можно найти в работе И. А. Акбергенова [2]. См. также Л. В. Канторович [11] и [18].

Другая оценка разности $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$ в случае $f_1(x)=f(x)$ предложена И. П. Мысовских [2].

Доказанная теорема дает, в частности, и способ оценки погрешности при замене ядра алгебраическим. Проиллюстрируем это на следующем простом примере.

3. Пример. Решить уравнение:

$$\varphi(x) - \int_0^{\frac{1}{2}} \sin xy\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Относительно $f(x)$ частных предположений делать пока не будем.

Разлагая $\sin xy$ в ряд имеем:

$$\sin xy = xy - \frac{x^3y^3}{6} + \frac{x^5y^5}{120} - \ldots$$

Заменим $\sin xy$ двумя первыми членами ряда и рассмотрим соответствующее уравнение с алгебраическим ядром:

$$\tilde{\varphi}(x) - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(xy - \frac{x^3y^3}{6}\right) \tilde{\varphi}(y)\, dy = f(x).$$

Ищем решение в виде:

$$\tilde{\varphi}(x) = Ax + Bx^3 + f(x).$$

Подставляя это выражение в уравнение и обозначая через f_1 и f_2 интегралы

$$f_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} yf(y)\, dy; \qquad f_2 = -\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}} y^3 f(y)\, dy,$$

находим:

$$Ax + Bx^3 - f_1 x - f_2 x^3 - \frac{1}{24}Ax - \frac{1}{160}Bx + \frac{1}{960}Ax^3 + \frac{1}{5376}Bx^3 = 0.$$

Отсюда, приравнивая нулю коэффициенты при x и x^3, получим:

$$\frac{23}{24}A - \frac{1}{160}B = f_1, \quad \frac{1}{960}A + \left(1 + \frac{1}{5376}\right)B = f_2.$$

Решая эту систему, найдем

$$A = 1{,}043277\left(\frac{5377}{5376}f_1 + \frac{1}{160}f_2\right); \qquad B = 1{,}043277\left(-\frac{1}{960}f_1 + \frac{23}{24}f_2\right).$$

Поэтому решение будет иметь вид:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + Ax + Bx^3 =$$

$$= f(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} 1{,}043277\,(1{,}0001860xy - 0{,}0010416x^3y - 0{,}0010416xy^3 -$$

$$- 0{,}1597222x^3y^3)\, f(y)\, dy.$$

а резольвента:

$$\gamma(x, y, 1) = 1{,}043277\,(1{,}0001860xy - 0{,}0010416x^3y - 0{,}0010416xy^3 - 0{,}1597222x^3y^3).$$

Отсюда ясно, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\gamma(x, y, 1)|\,dy < \frac{1}{12}.$$

Следовательно, в приведенной выше оценке можно принять $B = \frac{1}{12}$. Далее,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |K(x, y) - k(x, y)|\,dy \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^5y^5}{120}\,dy = \frac{1}{64\cdot 720}\,x^5,$$

и так как $x \leqslant \frac{1}{2}$, то можно принять $h = \frac{1}{64\cdot 32\cdot 720} = \frac{1}{1474560}$ или, грубее, $h = \frac{3}{4\cdot 10^6}$. Тогда

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| < N\frac{|\lambda|\,h\,(1 + |\lambda|\,B)^2}{1 - |\lambda|\,h\,(1 + |\lambda|\,B)} = N\frac{\frac{3}{4\cdot 10^6}\left(1 + \frac{1}{12}\right)^2}{1 - \frac{3}{4\cdot 10^6}\left(1 + \frac{1}{12}\right)} < \frac{N}{10^6},$$

где N — верхняя граница $|f(x)|$.

В частности, примем

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\left(\cos\frac{x}{2} - 1\right) = 1 - \frac{x}{8} + \frac{x^3}{384} - \frac{x^5}{46080} + \ldots$$

Соответствующее точное решение есть $\varphi(x) = 1$. За верхнюю границу $f(x)$ в $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ можем принять $N = 1$.

Поэтому приближенное решение должно разниться от точного не более чем на $\frac{1}{10^6}$.

В действительности приближенное решение будет:

$$\varphi(x) = 1 + 0{,}0000009x - 0{,}0000002x^3 - 0{,}0000217x^5 + \ldots$$

4. Другая оценка погрешности. Мы рассмотрели в n° 2 способ оценки погрешности в решении интегрального уравнения при замене данного ядра на другое, близкое к нему. Другой способ оценки погрешности был предложен ранее Трикоми. [1]) Этот способ дает, правда, значительно менее точную оценку погрешности, чем способ n° 2. Он вновь позволяет установить сходимость приближенного решения к точному, если разница между ядрами стремится к нулю.

---

[1]) Трикоми [1, 2].

Итак, рассмотрим два уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy=f(x),\\ &\tilde{\varphi}(x)-\lambda\int_0^1 \tilde{K}(x, y)\,\tilde{\varphi}(y)\,dy=f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Оценим разность $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$, предполагая, что в квадрате (0,1; 0,1)

$$|K(x, y)-\tilde{K}(x, y)|<\varepsilon. \qquad (23)$$

Докажем предварительно лемму об определителях.

Лемма. *Пусть даны два определителя*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}; \qquad \Delta'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n}\\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn}\end{vmatrix},$$

пр.чем элементы второго определителя близки к элементам первого: $a'_{ik}=a_{ik}+\delta_{ik}$. *Тогда, если*

$$|a_{ik}|<N \quad \text{и} \quad |\delta_{ik}|<\varepsilon,$$

то

$$|\Delta-\Delta'|<n^{\frac{n}{2}}\left[(N+\varepsilon)^n-N^n\right]. \qquad (24)$$

Доказательство. Разложим определитель Δ' на сумму определителей:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11}+\delta_{11} & a_{12}+\delta_{12} & \dots & a_{1n}+\delta_{1n}\\ a_{21}+\delta_{21} & a_{22}+\delta_{22} & \dots & a_{2n}+\delta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}+\delta_{n1} & a_{n2}+\delta_{n2} & \dots & a_{nn}+\delta_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+\sum\begin{vmatrix} \delta_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \delta_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$+\sum\sum\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn}\end{vmatrix},$$

где в каждой сумме выписано типичное слагаемое, в остальных слагаемых столбцы с δ находятся на других местах. В первой сумме число слагае-

мых C_n^1, каждое не превосходит, по оценке Адамара,[1] $n^{\frac{n}{2}}\varepsilon N^{n-1}$; во второй число слагаемых C_n^2, каждое не превосходит $n^{\frac{n}{2}}\varepsilon^2 N^{n-2}$ и т. д. Поэтому

$$|\Delta'-\Delta| < C_n^1 n^{\frac{n}{2}}\varepsilon N^{n-1} + C_n^2 n^{\frac{n}{2}}\varepsilon^2 N^{n-2} + \ldots + C_n^n n^{\frac{n}{2}}\varepsilon^n = n^{\frac{n}{2}}[(N+\varepsilon)^n - N^n]$$

и лемма доказана.

Дадим теперь оценку разности $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$. По формулам Фредгольма решение уравнений (22) можно получить в виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - \lambda\int_0^1 \frac{\Delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(y)\,dy, \\ \tilde{\varphi}(x) &= f(x) - \lambda\int_0^1 \frac{\tilde{\Delta}(x, y, \lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} f(y)\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ — так называемые определители Фредгольма для уравнений (22), а $\Delta(x, y, \lambda)$ и $\tilde{\Delta}(x, y, \lambda)$ — их миноры. Дадим прежде всего оценку разности $|\Delta(\lambda)-\tilde{\Delta}(\lambda)|$. Эту разность можно записать в виде

$$\Delta(\lambda)-\tilde{\Delta}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1\left[K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n\end{pmatrix} - \tilde{K}\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n\end{pmatrix}\right] dz_1\,dz_2 \ldots dz_n, \tag{26}$$

при этом в скобках под знаком интеграла находятся определители n-го порядка из значений ядер $K(x, y)$ и $\tilde{K}(x, y)$:

$$K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(z_1, z_1) & K(z_1, z_2) & \ldots & K(z_1, z_n) \\ K(z_2, z_1) & K(z_2, z_2) & \ldots & K(z_2, z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(z_n, z_1) & K(z_n, z_2) & \ldots & K(z_n, z_n) \end{vmatrix};$$

$$\tilde{K}\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_n \\ z_1, z_2, \ldots, z_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{K}(z_1, z_1) & \tilde{K}(z_1, z_2) & \ldots & \tilde{K}(z_1, z_n) \\ \tilde{K}(z_2, z_1) & \tilde{K}(z_2, z_2) & \ldots & \tilde{K}(z_2, z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{K}(z_n, z_1) & \tilde{K}(z_n, z_2) & \ldots & \tilde{K}(z_n, z_n) \end{vmatrix}.$$

[1] И. И. Привалов [2], стр. 46.

Если N — верхняя граница $K(x, y)$, то, пользуясь леммой о разности двух определителей (24), сразу найдем, что

$$\left| K\begin{pmatrix} z_1, & z_2, & \ldots, & z_n \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_n \end{pmatrix} - \tilde{K}\begin{pmatrix} z_1, & z_2, & \ldots, & z_n \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_n \end{pmatrix} \right| < n^{\frac{n}{2}} [(N+\varepsilon)^n - N^n].$$

Отсюда

$$|\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} n^{\frac{n}{2}} [(N+\varepsilon)^n - N^n] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} [|\lambda|(N+\varepsilon)]^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} (|\lambda| N)^n =$$

$$= \Omega[|\lambda|(N+\varepsilon)] - \Omega(|\lambda| N), \tag{27}$$

если положить

$$\Omega(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} u^n. \tag{28}$$

Таким же точно образом можно оценить разность $|\Delta(x, y, \lambda) - \tilde{\Delta}(x, y, \lambda)|$, исходя из разложения

$$\Delta(x, y, \lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x, & z_1, & \ldots, & z_n \\ y, & z_1, & \ldots, & z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n. \tag{29}$$

Получим тогда:

$$|\Delta(x, y, \lambda) - \tilde{\Delta}(x, y, \lambda)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} [(N+\varepsilon)^{n+1} - N^{n+1}] =$$

$$= (N+\varepsilon)\, \Omega'[|\lambda|(N+\varepsilon)] - N\Omega'(|\lambda| N).$$

Теперь можно оценить разность $|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|$; имеем

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant \lambda \int_0^1 \left| \frac{\Delta(x, y, \lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{\tilde{\Delta}(x, y, \lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} \right| |f(y)|\, dy. \tag{30}$$

Обозначим через F границу $|f(x)|$ и через $\delta\Delta$ и $\delta\Delta_{x,y}$ полученные выше оценки для $|\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda)|$ и $|\Delta(x, y, \lambda) - \tilde{\Delta}(x, y, \lambda)|$, тогда после упрощений, приняв во внимание, что $|\Delta(\lambda)| < \Omega(|\lambda| N)$ и $|\Delta(x, y, \lambda)| < N\Omega'(N|\lambda|)$, найдем:

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < |\lambda| F \frac{N\Omega'(|\lambda| N)\, \delta\Delta + \Omega(|\lambda| N)\, \delta\Delta_{x,y}}{|\Delta(\lambda)|\, |\tilde{\Delta}(\lambda)|}.$$

Преобразуем еще $\delta\Delta$ и $\delta\Delta_{x,y}$, пользуясь теоремой о среднем, приняв при этом во внимание, что Ω, Ω' и Ω'' — возрастающие функции, тогда получим окончательно:

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<\varepsilon|\lambda|F\frac{L\Omega'(L)\Omega'(\tilde{L})+\Omega(L)\Omega'(\tilde{L})+\tilde{L}\Omega(L)\Omega''(\tilde{L})}{|\Delta(\lambda)||\tilde{\Delta}(\lambda)|}, \quad (31)$$

где для краткости положено $N|\lambda|=L$; $(N+\varepsilon)|\lambda|=\tilde{L}$.

Полученные оценки показывают, что если ядра $\tilde{K}(x, y)$ будут равномерно сходиться к ядру $K(x, y)$, т. е. $\varepsilon\to 0$, то при этом по (27) $\tilde{\Delta}(\lambda)\to\Delta(\lambda)$. Далее, если $\Delta(\lambda)\neq 0$, то при ε достаточно малом $\tilde{\Delta}(\lambda)\neq 0$, а тогда, как это ясно из оценки (31), $\tilde{\varphi}(x)\to\varphi(x)$. Следует заметить, однако, что присутствие в оценке Трикоми величины $\Delta(\lambda)$, которую обычно трудно оценить, не зная решения уравнения, делает ее не вполне удобной для действительной оценки погрешности. Однако, если уравнение с ядром $\tilde{K}$ решено и определено $\tilde{\Delta}(\lambda)$, то можно указать, пользуясь приведенной выше оценкой (27), нижнюю границу для $\Delta(\lambda)$, после чего полученная оценка оказывается уже применимой. Упомянем еще, что, как легко установить, для ряда (28) будет мажорантным ряд функции

$$\Omega_0(u)=(1+u)e^{\frac{eu^2}{2}},$$

и потому во всех приведенных оценках можно брать Ω_0, Ω_0', Ω_0'' вместо Ω, Ω', Ω''.

5. Метод моментов. Этот метод заключается в том, что приближенное решение данного интегрального уравнения

$$L(\varphi)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy-f(x)=0$$

разыскивается в определенной форме — линейной комбинации некоторых заранее выбранных функций с неопределенными коэффициентами:

$$\tilde{\varphi}(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x). \quad (32)$$

Очевидно, всегда можем считать, что функции $\varphi_i(x)$ ортогональны, нормированы и представляют первые n функций некоторой полной системы $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Коэффициенты c_i, входящие в состав $\tilde{\varphi}(x)$, определяются из следующего соображения.

Для того чтобы функция $\tilde{\varphi}(x)$ представляла точное решение уравнения, нужно чтобы $L(\tilde{\varphi})$ равнялось тождественно нулю, а это эквивалентно (если $L(\tilde{\varphi})$ непрерывно) тому, чтобы оно было ортогонально всем функциям $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Однако, имея в своем

распоряжении только n постоянных c_i, мы имеем возможность удовлетворить лишь первым n из этих условий:

$$\int_a^b \left[\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\tilde{\varphi}(y)\,dy - f(x)\right]\varphi_i(x)\,dx =$$
$$= \int_a^b L(\tilde{\varphi})\,\varphi_i(x)\,dx = 0. \qquad (33)$$

Поэтому мы можем ожидать, что функция $\tilde{\varphi}(x)$, построенная по значениям c_i, найденным из системы (33), будет лишь приближенным решением уравнения.

Этот метод носит название метода моментов, так как уравнения (33) требуют, чтобы первые n обобщенных моментов функции $L(\tilde{\varphi})$ равнялись нулю и в том случае, когда $\varphi_k(x) = x^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обращаются в требование равенства нулю первых n классических чебышевских моментов. Он разработан главным образом акад. Н. М. Крыловым и его школой.

Отметим также, что этот метод решения интегральных уравнений представляет прямой аналог метода Галеркина приближенного решения дифференциальных уравнений (см. гл. IV, § 2). Установим теперь связь этого метода с методом замены ядра на вырожденное.

Построим вырожденное ядро $K_n(x, y)$ — n-й отрезок разложения $K(x, y)$ в ряд Фурье по функциям $\varphi_i(x)$:

$$K_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(y)\,\varphi_i(x); \qquad u_i(y) = \int_a^b K(x,y)\,\varphi_i(x)\,dx$$

и составим соответствующее интегральное уравнение

$$L_n(\varphi) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K_n(x,y)\,\varphi(y)\,dy - f(x) = 0.$$

Заметим прежде всего, что если мы к этому интегральному уравнению применим метод моментов, то получим то же самое решение, что и для первоначального уравнения.

Действительно, все отличие уравнений вида (33) будет заключаться в том, что во втором слагаемом вместо $K(x, y)$ будет стоять $K_n(x, y)$, однако легко убедиться, что и эти слагаемые будут в обоих случаях равны, достаточно только сначала произвести интегрирование по x и учесть, что

$$\int_a^b K_n(x,y)\,\varphi_i(x)\,dx = \int_a^b K(x,y)\,\varphi_i(x)\,dx = u_i(y).$$

Поэтому применение метода моментов к первоначальному уравнению и к уравнению с вырожденным ядром приводит к одному и тому же приближенному решению. Но для уравнения с вырожденным ядром $K_n(x, y)$, как это ясно из его структуры, точное решение будет вида (32); действительно

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K_n(x, y)\varphi(y)\,dy=$$
$$=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b u_i(y)\varphi(y)\,dy\right)\varphi_i(x).$$

Поэтому для уравнения с вырожденным ядром применение метода моментов приводит к точному его решению, но так как то же самое решение получается при применении метода моментов к первоначальному уравнению, то приходим к следующему заключению: *применение метода моментов равносильно замене ядра $K(x, y)$ на вырожденное ядро $K_n(x, y)$.*

Благодаря этому можно при применении метода моментов пользоваться методом оценки погрешности, данным в n°2, а также, опираясь на результат n°4, при известных условиях, например, если $K_n(x, y)\to K(x, y)$ равномерно, утверждать сходимость приближенных решений к точному, если только λ не собственное значение первоначального уравнения. Более полно вопрос о сходимости метода моментов и ее быстроте исследован в работах Н. М. Крылова и М. Ф. Кравчука.[1])

Отметим еще, что если бы мы не включили $f(x)$ в выражение (32) для $\tilde{\varphi}(x)$, то вся разница была бы в том, что в уравнении с вырожденным ядром нужно было бы свободный член $f(x)$ заменить на $f_n(x)$ — n-й отрезок ряда Фурье функции $f(x)$ по функциям $\varphi_i(x)$. Это изменение не требуется для справедливости утверждения, что применение метода моментов к обоим уравнениям приводит к одному и тому же результату, но без него мы не могли бы утверждать, что точное решение уравнения с вырожденным ядром имеет требуемую форму $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$.

Таким образом, и в этом случае можно использовать оценку n° 2, только будет $\eta\neq 0$.

При нашем рассуждении мы предполагали, что функции нормированы и ортогонализированы, однако при фактическом применении

---

[1]) Н. М. Крылов [1, 2], М. Ф. Кравчук [1]. См. по этому вопросу также Оберг [1], Л. В. Канторович [18], гл. II, § 5 и Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XIV, § 4.

метода нет необходимости добиваться этого, так как на виде решения это не отразится.

Наконец, необходимо указать, что метод Ритца в применении к интегральным уравнениям представляет частный случай метода моментов.

Возможность применения метода Ритца к интегральным уравнениям связана с тем, что задача решения интегрального уравнения с симметричным ядром в известном смысле эквивалентна задаче о минимуме функционала

$$J(\varphi)=\int_a^b \varphi^2(x)\,dx-\lambda\int_a^b\int_a^b K(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy-2\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx.$$

Применение метода Ритца к этой задаче состоит в том, что разыскивается функция вида (32), дающая минимум J. Но если подставить сюда вместо φ выражение $\tilde{\varphi}$ и приравнять нулю производные по c_i, мы придем к системе уравнений

$$\int_a^b \tilde{\varphi}(x)\,\varphi_i(x)\,dx-\lambda\int_a^b\int_a^b K(x, y)\,\tilde{\varphi}(x)\,\varphi_i(y)\,dy\,dx-$$
$$-\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx=0 \quad (i=1, 2, \ldots, N),$$

которая очевидным образом совпадает с системой (33).

Рассмотрим один пример применения метода моментов.

Пример. Задача о колебании струны, как известно, может быть приведена к интегральному уравнению с ядром

$$K(x, y)=\begin{cases} x(y-1), & \text{если } 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ y(x-1), & \text{если } 1\geqslant x\geqslant y\geqslant 0.\end{cases}$$

Применим метод моментов для нахождения первого собственного числа и первой собственной функции этого уравнения. Как известно, точное решение этой задачи:

$$\lambda_1=\pi^2=9{,}8696; \qquad \varphi_1(x)=\sqrt{2}\sin \pi x.$$

Первое приближение ищем в виде постоянной

$$\varphi(x)=A.$$

Подставляя A вместо $\varphi(x)$ в интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy=0,$$

после умножения на 1 и интегрирования по x, согласно методу моментов, приходим к уравнению

$$\int_0^1 \{A-\lambda \int_0^1 K(x, y)\, A\, dy\}\, dx = 0.$$

Предварительно вычислим

$$\int_0^1 K(x,y)\, dy = \int_0^x y(1-x)\, dy + \int_x^1 x(1-y)\, dy =$$

$$= \frac{x^2(1-x)}{2} + \frac{x(1-x)^2}{2} = \frac{x(1-x)}{2}.$$

Подставляя это значение, придадим уравнению вид

$$A \int_0^1 \left[1 - \lambda \frac{x(1-x)}{2}\right] dx = A\left(1 - \frac{\lambda}{12}\right) = 0.$$

Ненулевое решение возможно, только если $\lambda = 12$, что и представляет первое весьма грубое приближение $\lambda_1^{(1)} = 12$.

Переходя к нахождению следующего приближения, отметим, что из соображений симметрии ясно, что первая собственная функция $\varphi_1(x)$ должна быть симметрична относительно точки $x = \frac{1}{2}$. Такого рода полинома первой степени, отличного от постоянной, нет, а общий вид полинома второй степени, подчиненного этому условию, есть

$$\varphi(x) = A + Bx(1-x).$$

В таком виде мы и ищем $\varphi(x)$. Подставляя это выражение в интегральное уравнение и домножая на основные функции 1 и $x(1-x)$ и интегрируя по x, придем к системе уравнений:

$$\int_0^1 \{A + Bx(1-x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\,[A + By(1-y)]\, dy\}\, dx = 0,$$

$$\int_0^1 \{A + Bx(1-x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\,[A + By(1-y)]\, dy\}\, x(1-x)\, dx = 0$$

или

$$A\left(1 - \frac{1}{12}\lambda\right) + B \cdot \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{10}\lambda\right) = 0,$$

$$A \cdot \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{10}\lambda\right) + B \cdot \frac{1}{30}\left(1 - \frac{17}{168}\lambda\right) = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем уравнение

$$\lambda^2 - 180\lambda + 1680 = 0,$$

корни которого $\lambda = 9{,}8751$ и $170{,}1249$; меньший из них и представляет второе

приближение для первого собственного значения $\lambda_1^{(2)}=9{,}8751$. Подставляя это значение в систему, связывающую A и B, найдем, что $A=-0{,}01176B$ или, определяя B из условия $\int\limits_0^1 \varphi_1^{2}(x)\,dx=1$, получим окончательно приближение к собственной функции вида:

$$\varphi_1^{(2)}(x)=-0{,}0684+5{,}817x(1-x).$$

Сравнивая с точным значением, видим, что первое собственное число определено с погрешностью в 0,06%, а собственная функция с погрешностью порядка 4% (от ее максимума).

6. Метод Бэтмена. Может оказаться полезной часто не только замена данного ядра вырожденным (алгебраическим), но и приближенное его представление в виде суммы ядра, для которого резольвента известна, и вырожденного ядра. Для ядер последнего вида резольвента также может быть дана в конечном виде. Способ получения этой резольвенты был указан Бэтменом.[1]) Мы его изложим в виде следующей леммы.

Лемма. *Пусть для уравнения*

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b k(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy=f(x) \tag{34}$$

с ядром $k(x,\ y)$ *известна резольвента* $\gamma(x,\ y,\ \lambda)$, *т. е. функция, с помощью которой решение уравнения* (34) *дается в виде*

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b \gamma(x,\ y,\ \lambda)\,f(y)\,dy. \tag{35}$$

Тогда для интегрального уравнения с ядром

$$K(x,\ y)=\frac{\begin{vmatrix} k(x,\ y) & f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ g_1(y) & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n(y) & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{36}$$

---

1) Бэтмен [1, 2]. Ср. Гурса [3].

где $f_r(x)$ и $g_m(y)$ — произвольные функции, а $a_{i,k}$ — произвольные числа, резольвента дается в виде:

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \gamma(x, y, \lambda) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(y) & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{37}$$

где

$$\varphi_r(x) = f_r(x) + \lambda \int_a^b \gamma(x, y, \lambda) f_r(y)\, dy, \tag{38}$$

$$\chi_m(x) = g_m(x) + \lambda \int_a^b \gamma(y, x, \lambda) g_m(y)\, dy, \tag{39}$$

$$\tau_{m,r} = \int_a^b \varphi_r(x) g_m(x)\, dx, \tag{40}$$

т. е. $\varphi_r(x)$ и $\chi_m(x)$ суть решения интегральных уравнений:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)\, dy = f_r(x), \tag{41}$$

$$\chi(x) - \lambda \int_a^b k(y, x)\chi(y)\, dy = g_m(x). \tag{42}$$

Доказательство. Для того чтобы $\Gamma(x, y, \lambda)$ была резольвентой уравнения

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\, dy = f(x), \tag{43}$$

достаточно установить, что $\Gamma(x, y, \lambda)$ удовлетворяет характеристическому для резольвенты уравнению:

$$K(x, y) = \Gamma(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t)\Gamma(t, y, \lambda)\, dt. \tag{44}$$

Прежде всего, если обозначить через Δ определитель, стоящий в знаменателе (36), а через $\Delta_{m,r}$ алгебраическое дополнение

элемента $a_{m,r}$, то, раскрывая определитель (36) по элементам первой строки, а затем по элементам первого столбца, получим:

$$K(x, y) = k(x, y) - \sum_{m=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\Delta_{m,r}}{\Delta} f_r(x) g_m(y). \tag{45}$$

Для того чтобы проверить, что функция $\Gamma(x, y, \lambda)$, определенная равенством (37), удовлетворяет уравнению (44), вычислим интеграл, стоящий в правой части.

Ввиду (45) найдем прежде всего

$$\lambda \int_a^b k(x, t)\,\Gamma(t, y, \lambda)\,dt.$$

Обозначая через θ определитель, стоящий в знаменателе (37), имеем

$$\lambda \int_a^b k(x, t)\,\Gamma(t, y, \lambda)\,dt =$$

$$= \frac{\lambda}{\theta} \begin{vmatrix} \int_a^b \gamma(t, y, \lambda)\,k(x, t)\,dt & \int_a^b k(x, t)\,\varphi_1(t)\,dt & \dots & \int_a^b k(x, t)\,\varphi_n(t)\,dt \\ \chi_1(y) & a_{11} + \lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n} + \lambda\tau_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \chi_n(y) & a_{n1} + \lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn} + \lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}.$$

Далее, пользуясь равенствами (41), а также тем, что резольвента $\gamma(x, y, \lambda)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\gamma(x, y, \lambda) - \lambda \int_a^b k(x, t)\,\gamma(t, y, \lambda)\,dt = k(x, y),$$

получаем:

$$\lambda \int_a^b k(x, t)\,\Gamma(t, y, \lambda)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\theta} \begin{vmatrix} \gamma(x, y, \lambda) - k(x, y) & \varphi_1(x) - f_1(x) & \dots & \varphi_n(x) - f_n(x) \\ \chi_1(y) & a_{11} + \lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n} + \lambda\tau_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \chi_n(y) & a_{n1} + \lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn} + \lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким же образом, пользуясь (40) и (42), найдем:

$$\lambda \int_a^b g_m(t)\,\Gamma(t, y, \lambda)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\theta}\begin{vmatrix} \chi_m(y) - g_m(y) & \lambda\tau_{m1} & \dots & \lambda\tau_{mn} \\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_n(y) & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\theta}\begin{vmatrix} g_m(y) & a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_n(y) & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix},$$

если вычесть m-ю строку из первой.

Далее, домножая последние равенства на $-\frac{\Delta_{mr}}{\Delta}$ и складывая их, пользуясь при этом для алгебраических дополнений обычными соотношениями:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{n} a_{mp}\Delta_{mr} = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq r, \\ 1 & \text{при } p = r, \end{cases}$$

найдем

$$-\lambda \int_a^b \sum_{m=1}^{n} \frac{\Delta_{mr}}{\Delta} g_m(t)\,\Gamma(t, y, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{\theta}\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{\Delta_{mr}}{\Delta} g_m(y) & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11} & & \dots & & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_n(y) & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & & \dots & & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix},$$

где 1 стоит в 1-й строке на $(r+1)$-м месте. Умножая теперь это равенство на $f_r(x)$, суммируя по r и добавляя еще ранее полученное

выражение для $\lambda \int\limits_a^b k(x, t)\Gamma(t, y, \lambda)\,dt$, пользуясь (45), получим окончательно:

$$\lambda \int\limits_a^b K(x, t)\Gamma(t, y, \lambda)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\theta}\begin{vmatrix} \gamma(x, y, \lambda) - K(x, y) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(y) & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\theta}\begin{vmatrix} \gamma(x, y, \lambda) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \chi_1(y) & a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(y) & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{1}{\theta}\begin{vmatrix} K(x, y) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ 0 & a_{11}+\lambda\tau_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1}+\lambda\tau_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \Gamma(x, y, \lambda) - K(x, y),$$

если полученный определитель разбить на два по первому столбцу.

Итак, мы проверили, что $\Gamma(x, y, \lambda)$, заданная равенством (37), действительно удовлетворяет уравнению (44), а поэтому есть резольвента для уравнения (43).

Рассмотрим некоторые частные случаи установленного общего результата.

1. Положим

$$a_{m,r} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq r, \\ 1 & \text{при } m = r, \end{cases}$$

т. е., иначе говоря, ввиду (36) предположим, что ядро $K(x, y)$ имеет вид:

$$K(x, y) = k(x, y) - \sum_{m=1}^{n} f_m(x)\,g_m(y).$$

Резольвента для этого случая примет вид:

$$\Gamma(x, y, \lambda)=\frac{\begin{vmatrix} \gamma(x, y, \lambda) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \chi_1(y) & 1+\lambda\tau_{11} & \lambda\tau_{12} & \dots & \lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(y) & \lambda\tau_{n1} & \lambda\tau_{n2} & \dots & 1+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\lambda\tau_{11} & \lambda\tau_{12} & \dots & \lambda\tau_{1n} \\ \lambda\tau_{21} & 1+\lambda\tau_{22} & \dots & \lambda\tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\tau_{n1} & \lambda\tau_{n2} & \dots & 1+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}},$$

где $\varphi_i(x)$, $\chi_i(y)$ и $\tau_{m,r}$ имеют то же значение, что и раньше.

Сделаем теперь еще предположение, что $k(x, y)=0$, т. е. ядро $K(x, y)$ чисто алгебраическое:

$$K(x, y)=-\sum_{i=1}^{n} f_m(x) g_m(y).$$

В данном случае, очевидно, $\gamma(x, y, \lambda)=0$; далее, ввиду (38) и (39), $\varphi_r(x)=f_r(x)$ и $\chi_m(x)=g_m(x)$; наконец,

$$\tau_{mr}=\int_a^b f_r(x) g_m(x)\, dx.$$

Поэтому резольвента принимает вид:

$$\Gamma(x, y, \lambda)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \dots & f_m(x) \\ g_1(y) & 1+\lambda\tau_{11} & \dots & \lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(y) & \lambda\tau_{n1} & \dots & 1+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\lambda\tau_{11} & \dots & \lambda\tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda\tau_{n1} & \dots & 1+\lambda\tau_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Этот частный случай мы рассматривали в n° 1 и получили там выражение для Γ в несколько иной форме, которая легко может быть приведена к данной.

2. Рассмотрим интегральное уравнение с некоторым ядром $\bar{k}(x, y)$. Выберем произвольно в промежутке (a, b) точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$. Положим теперь в равенстве (36)

$$k(x, y)=0; \quad f_r(x)=\bar{k}(x, y_r);$$

$$g_m(y)=-\bar{k}(x_m, y); \quad a_{mr}=\bar{k}(x_m, y_r).$$

Тогда, очевидно, $\gamma(x, y, \lambda)=0$ и ядро $K(x, y)$ принимает вид:

$$K(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{k}(x, y_1) & \dots & \bar{k}(x, y_n) \\ \bar{k}(x_1, y) & \bar{k}(x_1, y_1) & \dots & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y) & \bar{k}(x_n, y_1) & \dots & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{k}(x_1, y_1) & \dots & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y_1) & \dots & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}=$$

$$=\bar{k}(x, y)-\frac{\begin{vmatrix} \bar{k}(x, y) & \bar{k}(x, y_1) & \dots & \bar{k}(x, y_n) \\ \bar{k}(x_1, y) & \bar{k}(x_1, y_1) & \dots & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y) & \bar{k}(x_n, y_1) & \dots & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{k}(x_1, y_1) & \dots & \bar{k}(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}(x_n, y_1) & \dots & \bar{k}(x_n, y_n) \end{vmatrix}}.$$

Это ядро вырожденное и обладает тем свойством, что совпадает с ядром $\bar{k}(x, y)$ на прямых $x=x_m$, $y=y_r$; действительно, если положить $x=x_m$ или $y=y_r$, то определитель, стоящий в числителе второго члена, будет иметь две одинаковых строки или столбца и, следовательно, обратится в нуль, а потому:

$$K(x_m, y)=\bar{k}(x_m, y); \quad K(x, y_r)=\bar{k}(x, y_r).$$

Такое совпадение на $2n$ прямых позволяет вообще рассчитывать на то, что $K(x, y)$ близко к $\bar{k}(x, y)$, а решение уравнения с ядром $K(x, y)$ к решению уравнения с ядром $\bar{k}(x, y)$. Следует заметить, что если $\bar{k}(x, y)$ вырожденное, т. е. имеет вид:

$$\bar{k}(x, y)=\sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x)\beta_m(y),$$

то определитель в числителе тождественно равен нулю, ввиду известных теорем о разложении определителя на сумму определителей, а потому в этом случае

$$K(x, y)\equiv\bar{k}(x, y).$$

Если $\bar{k}(x, y)$ состоит не менее чем из n слагаемых, то нулю равен и определитель в знаменателе, но в случае если это не так, то он, вообще говоря, отличен от нуля и равен нулю лишь при случайном выборе точек $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_n$.

Для ядра $K(x, y)$ резольвента может быть составлена на основании леммы. Именно в данном случае

$$\gamma(x, y, \lambda)=0;\ \varphi_r(x)=f_r(x)=\bar{k}(x, y_r);$$
$$\chi_m(y)=g_m(y)=-\bar{k}(x_m, y);$$
$$\tau_{mr}=-\int_a^b \bar{k}(x, y_r)\bar{k}(x_m, x)\,dx=-k^*(x_m, y_r),$$

где $k^*(x, y)$ второе итерированное ядро для $\bar{k}(x, y)$:

$$k^*(x, y)=\int_a^b \bar{k}(x, t)\bar{k}(t, y)\,dt,$$

и, следовательно,

$$\Gamma(x, y, \lambda)=$$
$$=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{k}(x, y_1) & \ldots & \bar{k}(x, y_n) \\ \bar{k}(x_1, y) & \bar{k}(x_1, y_1)-\lambda k^*(x_1, y_1) & \ldots & \bar{k}(x_1, y_n)-\lambda k^*(x_1, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{k}(x_n, y) & \bar{k}(x_n, y_1)-\lambda k^*(x_n, y_1) & \ldots & \bar{k}(x_n, y_n)-\lambda k^*(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{k}(x_1, y_1)-\lambda k^*(x_1, y_1) & \ldots & \bar{k}(x_1, y_n)-\lambda k^*(x_1, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{k}(x_n, y_1)-\lambda k^*(x_n, y_1) & \ldots & \bar{k}(x_n, y_n)-\lambda k^*(x_n, y_n) \end{vmatrix}}.$$

С помощью резольвенты $\Gamma(x, y, \lambda)$ мы и можем получить приближенное решение уравнения с ядром $\bar{k}(x, y)$. В частности, приближенные значения для собственных значений λ этого ядра найдем, приравнивая нулю определитель, стоящий в знаменателе Γ. Оценка погрешности этого метода может быть приведена на основании теорем n° 2 и n° 4. Приведем иллюстрирующий пример, который заимствуем из статьи Бэтмена [1].

Пример. Рассмотрим в качестве примера ядро интегрального уравнения, к которому приводится уравнение струны и которое в квадрате (0,1; 0,1) задается равенствами:

$$\bar{k}(x, y)=\begin{cases} x(y-1) & \text{при } x\leqslant y, \\ y(x-1) & \text{при } x\geqslant y. \end{cases}$$

Для составления Γ нужно еще $k^*(x, y)$, но

$$k^*(x, y)=\int_0^1 \bar{k}(x, t)\bar{k}(t, y)\,dt=\begin{cases} \frac{1}{6}x(1-y)(2y-x^2-y^2) & \text{при } x\leqslant y, \\ \frac{1}{6}y(1-x)(2x-x^2-y^2) & \text{при } x\geqslant y. \end{cases}$$

Точки x_m и y_r выберем равноотстоящие и возьмем $n=5$, тогда

$$x_1=y_1=\frac{1}{6};\quad x_2=y_2=\frac{2}{6};\quad x_3=y_3=\frac{3}{6};\quad x_4=y_4=\frac{4}{6};\quad x_5=y_5=\frac{5}{6}.$$

Мы займемся только определением собственных чисел и составим определитель, стоящий в знаменателе Г. Тогда, полагая $\lambda=216x$ и проводя сокращение, найдем:

$$\begin{vmatrix} 5(1-10x) & 4(1-19x) & 3(1-26x) & 2(1-31x) & 1-34x \\ 4(1-19x) & 8(1-16x) & 6(1-23x) & 4(1-23x) & 2(1-31x) \\ 3(1-26x) & 6(1-23x) & 9(1-18x) & 6(1-23x) & 3(1-26x) \\ 2(1-31x) & 4(1-28x) & 6(1-23x) & 8(1-16x) & 4(1-19x) \\ 1-34x & 2(1-31x) & 3(1-26x) & 4(1-19x) & 5(1-10x) \end{vmatrix}=0.$$

После раскрытия приходим к уравнению:

$$130x^5-441x^4+488x^3-206x^2+30x-1=0$$

или

$$(x-1)(2x-1)(5x-1)(13x^2-22x+1)=0.$$

Отсюда после решения находим для λ следующие значения:

$$\lambda_1=10{,}02;\quad \lambda_2=43{,}2;\quad \lambda_3=108;\quad \lambda_4=216;\quad \lambda_5=355{,}2.$$

Точные величины собственных значений здесь, как известно: π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2, \ldots$, т. е.

$$\lambda_1=9{,}8696;\quad \lambda_2=39{,}4784;\quad \lambda_3=88{,}8264;\ \ldots,$$

следовательно, ошибка при определении первого собственного значения 2%, второго — 9%, третьего — 20%.

Несколько более точные результаты получились бы, если бы мы выбрали другие точки $x_1, x_2, \ldots$, например:

$$x_1=y_1=\frac{1}{10};\quad x_2=y_2=\frac{3}{10};\quad x_3=y_3=\frac{5}{10};\quad x_4=y_4=\frac{7}{10};\quad x_5=y_5=\frac{9}{10},$$

или если бы взяли за x_i и y_i пять точек Гаусса для промежутка (0,1). Однако очень большая точность не может быть достигнута при таком числе ординат, так как само ядро $\bar{k}(x, y)$ имеет особенность: производная его разрывна при $x=y$, вследствие чего невозможна хорошая аппроксимация его алгебраическими ядрами.

ГЛАВА III

МЕТОД СЕТОК [1])

§ 1. Выражения производных через разностные отношения. Соотношения между значениями функции в узлах сетки, гармоническим и бигармоническим операторами

1. Выражения производных через разностные отношения. При применении метода сеток рассматриваемое дифференциальное уравнение заменяют приближенно некоторым уравнением в конечных разностях, которое, как правило, получают из дифференциального уравнения путем замены в нем производных и разного рода дифференциальных операций их приближенными выражениями через разностные отношения или значения функции в отдельных точках сетки.

Мы начнем поэтому изложение метода сеток с напоминания выражения производных через разностные отношения. По причине, которая выяснится ниже, нам будут недостаточны формулы, относящиеся к равноотстоящим значениям аргумента. Мы приведем поэтому все формулы для общего случая, когда значения аргумента не являются равноотстоящими.

Выражение производных через значения функции в узлах сетки обычно получают следующим способом. Строят интерполирующий полином, который в точках сетки принимает те же значения, что и заданная функция, а затем производные от заданной функции приближенно считают равными соответствующим производным от интерполирующего полинома.

Все формулы параболического интерполирования, которое мы имеем здесь в виду, могут быть получены из основной формулы Ньютона путем ее преобразования. Большинство из них с теоретической точки зрения являются равносильными и одна получается из другой перегруппировкой в ней членов. Эта перегруппировка про-

---

[1]) За последние полтора десятилетия, в связи с вычислениями на быстродействующих машинах, в теории метода сеток были получены многие новые результаты. Для более подробного ознакомления с методом сеток могут быть рекомендованы следующие работы: Л. А. Люстерник [2], В. С. Рябенький и А. Ф. Филиппов [1], Р. Д. Рихтмайер [1], В. К. Саульев [1].

изводится сообразно с той целью, которая преследуется при вычислении; ее производят обычно так, чтобы при употреблении по возможности меньшего числа членов интерполяционной формулы получить лучшую точность.

Теория интерполяционных формул широко известна. В нашем изложении мы не будем преследовать цели подробного изложения и поставим перед собой задачу только в кратких чертах напомнить ее, отсылая читателя для более подробного ознакомления с ней к специальным руководствам по приближенным вычислениям.[1])

Пусть даны произвольные значения $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ независимой переменной x и соответствующие им значения функции $y_0=f(a_0)$, $y_1=f(a_1), \ldots, y_n=f(a_n)$.

Рассматривают так называемые разностные отношения, образованные по следующему закону;

$$f(a_1, a_0)=\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}, \quad f(a_2, a_1)=\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}.$$
$$f(a_3, a_2)=\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}, \ldots \tag{1}$$

Это — разностные отношения первого порядка. По ним образуют разностные отношения второго порядка:

$$f(a_2, a_1, a_0)=\frac{f(a_2, a_1)-f(a_1, a_0)}{a_2-a_0},$$
$$f(a_3, a_2, a_1)=\frac{f(a_3, a_2)-f(a_2, a_1)}{a_3-a_1}, \ldots; \tag{2}$$

затем разностные отношения третьего порядка:

$$f(a_3, a_2, a_1, a_0)=\frac{f(a_3, a_2, a_1)-f(a_2, a_1, a_0)}{a_3-a_0} \tag{3}$$

и т. д.

Нетрудно видеть, что для равноотстоящих значений аргумента a_0, $a_1=a_0+h$, $a_2=a_0+2h, \ldots$

$$\left.\begin{array}{c} f(a_1, a_0)=\frac{\Delta y_0}{h}, \quad f(a_2, a_1)=\frac{\Delta y_1}{h}, \quad f(a_3, a_2)=\frac{\Delta y_2}{h}, \ldots; \\ f(a_2, a_1, a_0)=\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}, \quad f(a_3, a_2, a_1)=\frac{\Delta^2 y_1}{2!\,h^2}, \ldots; \\ f(a_3, a_2, a_1, a_0)=\frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}, \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{4}$$

---

[1]) См., например, Э. Уиттекер и Г. Робинсон [1], А. Н. Крылов [3], Дж. Скарборо [1].

Разностные отношения могут быть представлены в более симметричном виде, именно:

$$\left.\begin{aligned}
&f(a_1, a_0) = \frac{f(a_0)}{a_0 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0},\\
&f(a_2, a_1, a_0) = \frac{1}{a_2 - a_0}\left[\frac{f(a_2)}{a_2 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_2}\right] + \\
&+ \frac{1}{a_0 - a_2}\left[\frac{f(a_1)}{a_1 - a_0} + \frac{f(a_0)}{a_0 - a_1}\right] = \frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \\
&\qquad + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k)}{(a_k - a_0)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Из написанных равенств совершенно очевидно, что правые части симметричны относительно $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и поэтому $f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ не изменится при любой перестановке значений a_k аргумента.

Будем искать полином степени n, который при значениях аргумента $a_0, a_1, \ldots, a_n$ принимал бы значения соответственно $y_0 = f(a_0)$, $y_1 = f(a_1), \ldots, y_n = f(a_n)$.

Приведем решение задачи в удобной для нас форме, данной Ньютоном в 1687 г.[1]) Мы будем опираться на очевидное утверждение, что разностные отношения порядка n от полинома степени n — постоянны.[2]) Допустим, простоты ради, что нам даны лишь четыре значения аргумента a_0, a_1, a_2, a_3 и мы ищем полином третьей степени, принимающий при этих значениях заданные значения $f(a_k)$.

В силу постоянства разностных отношений третьего порядка, имеем:

$$f(x, a_0, a_1, a_2) = f(a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Но по определению разностных отношений третьего порядка

$$f(x, a_0, a_1, a_2) = \frac{f(x, a_0, a_1) - f(a_0, a_1, a_2)}{x - a_2},$$

---

[1]) Ньютон [1], книга III, лемма V.

[2]) Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что разностные отношения первого порядка от любой степени $f(x) = x^k$ будут полиномами степени на единицу ниже. Но проверить это можно весьма быстро, ибо

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^k - a^k}{x - a} = x^{k-1} + x^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}.$$

поэтому

$$f(x,\ a_0,\ a_1) = f(a_0,\ a_1,\ a_2) + (x - a_2) f(x,\ a_0,\ a_1,\ a_2) =$$
$$= f(a_0,\ a_1,\ a_2) + (x - a_2) f(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3).$$

Дальше, согласно определению второго разностного отношения,

$$f(x,\ a_0,\ a_1) = \frac{f(x,\ a_0) - f(a_0,\ a_1)}{x - a_1},$$

$$f(x,\ a_0) = f(a_0,\ a_1) + (x - a_1) f(x,\ a_0,\ a_1) =$$
$$= f(a_0,\ a_1) + (x - a_1) f(a_0,\ a_1,\ a_2) + (x - a_1)(x - a_2) f(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3).$$

Наконец, так как

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(x,\ a_0),$$

окончательно получим:

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(a_0,\ a_1) + (x - a_0)(x - a_1) f(a_0,\ a_1,\ a_2) +$$
$$+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2) f(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3).$$

При выводе этой интерполяционной формулы мы провели рассуждения для случая четырех точек. Но подобные же рассуждения, очевидно, применимы и к случаю любого другого числа точек. Если провести их применительно к интерполирующему полиному степени n в задаче с $n+1$ узлами интерполяции, получим следующую общую формулу Ньютона:

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(a_0,\ a_1) + (x - a_0)(x - a_1) f(a_0,\ a_1,\ a_2) + \ldots$$
$$\ldots + (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1}) f(a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n). \qquad (6)$$

Тот же самый интерполяционный полином был получен Лагранжем в иной форме, менее удобной для вычислений, но более удобной для исследований. Мы приведем лагранжеву форму полинома, так как она нам будет полезна при определении остаточных членов в приближенных формулах, которые мы позже получим для производных различных порядков от заданной функции. Чтобы отличить в обозначениях заданную функцию $f(x)$ и полином (6), ее интерполирующий в точках $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,$ мы условимся всюду ниже интерполирующий полином обозначать $P_n(x)$.

Если в (6) собрать члены, содержащие одинаковые значения $f(a_0), \ldots,\ f(a_n)$ интерполируемой функции $f(x)$, то полином (6) можно привести к виду

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - a_0) \ldots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \ldots (x - a_n)}{(a_k - a_0) \ldots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \ldots (a_k - a_n)} \cdot f(a_k). \qquad (7)$$

Это и есть интерполяционный полином в форме Лагранжа. Для упрощения его записи мы введем следующее обозначение:

$$\omega(x) = (x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n);$$

$\omega(x)$ есть, очевидно, полином степени $n+1$, имеющий коэффициент при старшем члене, равный единице и обращающийся в нуль в узлах интерполяции.

Если обратить внимание на то, что

$$(x - a_0)\dots(x - a_{k-1})(x - a_{k+1})\dots(x - a_n) = \frac{\omega(x)}{x - a_k}$$

и

$$(a_k - a_0)\dots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\dots(a_k - a_n) = \omega'(a_k),$$

то ясно будет, что полином Лагранжа может быть представлен в форме

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k)}{\omega'(a_k)(x - a_k)}. \tag{7$_1$}$$

Если функция $f(x)$ есть полином степени не выше n, то интерполирующий полином $P_n(x)$ тождественно совпадает с интерполируемой функцией $f(x)$. В противном случае $f(x)$ и $P_n(x)$ принимают одинаковые значения в узлах интерполяции, а в остальных точках, вообще говоря, расходятся. Разница $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$ называется остаточным членом интерполяционной формулы

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x). \tag{7$_2$}$$

Мы получим сейчас выражение остаточного члена $R_{n+1}(x)$ в удобной для наших целей форме. Заметим прежде всего, что если $f(x) = 1$, то полином $P_n(x)$ будет тождественно равен единице, и поэтому $\omega(x) \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\omega'(a_k)(x - a_k)} = 1$. Умножив обе части этого равенства на функцию $f(x)$, представим ее в форме $f(x) = \omega(x) \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f(x)}{\omega'(a_k)(x - a_k)}$.

Если теперь в (7$_2$) вместо $f(x)$ внести это ее выражение, а вместо $P_n(x)$ — его значение из равенства (7$_1$), мы получим $R_{n+1}(x)$ в виде, удобном для исследований:

$$R_{n+1}(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k) - f(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)}, \tag{8}$$

$$f(x) = P_n(x) + \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k) - f(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)}. \tag{9}$$

Обычно, при изучении остаточного члена, его приводят к форме, отличной от (8). Предположим, что функция $f(x)$ имеет производные

до порядка $n+1$ включительно, и рассмотрим вспомогательную функцию аргумента z:

$$F(z) = f(z) - P_n(z) - [f(x) - P_n(x)] \frac{\omega(z)}{\omega(x)}.$$

Она обращается в нуль при $n+2$ значениях аргумента z, равных $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и x. Поэтому должна найтись такая точка ξ, лежащая между $a_0, a_1, \ldots, a_n, x$, в которой производная $(n+1)$-го порядка от рассматриваемой функции обращается в нуль.

Но так как $P_n(z)$ есть полином степени n и, стало быть, производная от него порядка $n+1$ равна нулю, а $\omega(z)$ — полином степени $n+1$ с коэффициентом при старшем члене, равным единице и $(n+1)$-я производная от него равна $(n+1)!$, то

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - [f(x) - P_n(x)] \frac{(n+1)!}{\omega(x)}.$$

В точке ξ должна быть $F^{(n+1)}(\xi) = 0$, и поэтому

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{8_1}$$

Здесь ξ есть число, лежащее между $a_0, a_1, \ldots, a_n, x$.

Мы отметим один вытекающий отсюда результат. Из сличения равенств (8) и (8_1) видно, что если $f(x)$ имеет производные до порядка $n+1$, то должно существовать такое ξ, среднее между $a_0, \ldots, a_n, x$, что имеет место равенство:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k) - f(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{8_2}$$

Рассмотрим теперь частные случаи общей формулы интерполирования (9) для равноотстоящих значений аргумента.

Формула Ньютона для интерполирования вперед. Допустим, что функция $f(x)$ дана для следующих равноотстоящих значений аргумента:

$$a_0 = a, \quad a_1 = a + h, \; a_2 = a + 2h, \ldots, \; a_n = a + nh.$$

Для построения интерполяционной формулы нам достаточно подсчитать разностные отношения, входящие в (6), применительно к заданным узлам интерполяции. Разностные отношения здесь сразу же выражаются через разности функции и величину h шага сетки, согласно равенствам (4), так что в нашем случае интерполяционная формула принимает вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!\,h} \Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2} \Delta^2 f(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(n-1)h]}{n!\,h^n} \Delta^n f(a) + R_{n+1}(x). \tag{10}$$

Как показывает само название этой формулы, она удобна при вычислении значений функции и ее производных для значений аргумента, близких к начальному значению a.

Формула Ньютона для интерполирования назад. Мы остановимся на формуле, аналогичной (10), но употребляющейся при вычислении $f(x)$ и производных от нее при x, близких к наибольшему из известных значений аргумента.

Пусть $f(x)$ задана для следующих значений x:

$$a_0 = a, \quad a_1 = a - h, \quad a_2 = a - 2h, \ldots, \; a_n = a - nh.$$

Для построения формулы нам вновь достаточно подсчитать при нашем расположении узлов интерполяции разностные отношения в равенстве (6). Пользуясь симметрией разностных отношений и равенствами (4), получим

$$f(a_0, a_1) = f(a - h, a) = \frac{1}{h} \Delta f(a - h),$$

$$f(a_0, a_1, a_2) = f(a - 2h, a - h, a) = \frac{1}{2!\,h^2} \Delta^2 f(a - 2h),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = f(a - nh, \ldots, a - h, a) = \frac{1}{n!\,h^n} \Delta^n f(a - nh).$$

Отсюда видно, что интерполяционная формула в нашем случае будет иметь вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!\,h} \Delta f(a - h) + \frac{(x - a)(x - a + h)}{2!\,h^2} \Delta^2 f(a - 2h) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x - a)(x - a + h)\ldots[x - a + (n - 1)h]}{n!\,h^n} \Delta^n f(a - nh) + R_{n+1}(x). \quad (11)$$

Формула Ньютона—Гаусса при интерполировании для значений аргумента, близких к середине промежутка. Как мы уже говорили выше, большинство формул параболического интерполирования, о которых идет речь в этом номере, по существу своему равносильны и отличаются между собой лишь перестановкой членов. В некоторых вопросах, например при вычислении интегралов, несущественно, в каком порядке брать узлы интерполирования, так как на величину интеграла порядок узлов, очевидно, не окажет никакого влияния, ибо в нем одинаковую роль играют значения функций в любой из точек промежутка интегрирования. Но если идет дело о вычислении значений самой функции или ее производных в отдельных точках промежутка, то для удобства вычислений естественно узлы интерполяции располагать так, чтобы значения функции в узлах, ближайших к рассматриваемому значению аргумента, входили в первые члены интерполяционной формулы, а значения функции в далеких узлах — входили в последние ее члены. Выведенные нами формулы (10) и

(11) удовлетворяют этому требованию для того случая, когда x близко к одному из концов промежутка интерполирования.

Если x лежит близко к середине промежутка, выгодно интерполяционную формулу преобразовать так, чтобы в первые члены входили только значения функции в точках, близких к середине промежутка. Это достигается следующим расположением узлов.

Пусть функция $f(x)$ дана для $n+1$ значений x:

$$\ldots,\ a-2h,\ a-h,\ a,\ a+h,\ a+2h,\ldots$$

Мы не предрешаем вопроса о том, будет ли $n+1$ четным или нечетным числом. Если $n+1$ нечетное число, то a будет средним узлом сетки, если же $n+1$ — четное число, то пусть середина промежутка находится между a и $a+h$.

Положим в формуле (6)

$$a_0=a,\ a_1=a+h,\ a_2=a-h,\ a_3=a+2h,\ a_4=a-2h,\ldots$$

и подсчитаем все разностные отношения, в нее входящие. Если вновь воспользоваться симметрией разностных отношений относительно значений аргумента и формулами (4), получим

$$\left.\begin{aligned}
&f(a_0,\ a_1)=f(a,\ a+h)=\frac{1}{1!\,h}\,\Delta f(a),\\
&f(a_0,\ a_1,\ a_2)=f(a-h,\ a,\ a+h)=\frac{1}{2!\,h^2}\,\Delta^2 f(a-h),\\
&f(a_0, a_1, a_2, a_3)=f(a-h, a, a+h,\ a+2h)=\frac{1}{3!\,h^3}\,\Delta^3 f(a-h),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!\,h}\,\Delta f(a)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 f(a-h)+\\
&\qquad+\frac{(x-a+h)(x-a)(x-a-h)}{3!\,h^3}\,\Delta^3 f(a-h)+\\
&+\frac{(x-a+h)(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{4!\,h^4}\,\Delta^4 f(a-2h)+\ldots\\
&\qquad\qquad\ldots+R_{n+1}(x).
\end{aligned}\right\}\quad (12)$$

Это и есть формула Ньютона — Гаусса.

Формула Стирлинга. Допустим, что нам нужно найти значения функции или производных от нее для x, весьма близких к одному из узлов интерполяции, например a. Тогда естественно в формуле (12) взять нечетное число узлов, а именно левее точки a столько же узлов, сколько и правее от нее. Схема узлов будет такой:

$$a-ph,\ldots,\ a-h,\ a,\ a+h,\ldots,\ a+ph.$$

Чтобы придать (12) более симметричный вид, соответствующий симметрии расположения узлов, ее преобразуют следующим способом. Совершим в ней указываемую ниже перестановку членов

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!h}\left[\Delta f(a)-\frac{1}{2}\Delta^2 f(a-h)\right]+\frac{(x-a)^2}{2!h^2}\Delta^2 f(a-h)+$$
$$+\frac{(x-a)[(x-a)^2-h^2]}{3!h^3}\left[\Delta^3 f(a-h)-\frac{1}{2}\Delta^4 f(a-2h)\right]+$$
$$+\frac{(x-a)^2[(x-a)^2-h^2]}{4!h^4}\Delta^4 f(a-2h)+\ldots+R_{2p+1}(x).$$

Затем заменим разности четного порядка, стоящие в квадратных скобках, их выражениями через нечетные разности из тождеств

$$\Delta^2 f(a-h)=\Delta f(a)-\Delta f(a-h),$$
$$\Delta^4 f(a-2h)=\Delta^3 f(a-h)-\Delta^3 f(a-2h),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В результате получим формулу Стирлинга

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!h}\frac{\Delta f(a)+\Delta f(a-h)}{2}+\frac{(x-a)^2}{2!h^2}\Delta^2 f(a-h)+$$
$$+\frac{(x-a)[(x-a)^2-h^2]}{3!h^3}\frac{\Delta^3 f(a-h)+\Delta^3 f(a-2h)}{2}+$$
$$+\frac{(x-a)^2[(x-a)^2-h^2]}{4!h^4}\Delta^4 f(a-2h)+\ldots+R_{2p+1}(x). \tag{13}$$

Ниже мы воспользуемся ею для нахождения приближенного выражения производных в узлах сетки через значения функции.

Формула Бесселя. Допустим теперь, что нужно найти значение функции или производных от нее либо ровно посередине между двумя узлами, либо в точках, близких к этой середине. Здесь естественно брать четное число узлов интерполяции и располагать их симметрично относительно той точки, вблизи которой находятся нужные значения. Пусть, например, нужно произвести вычисления для значений x, близких к середине промежутка между узлами a и $a+h$. Возьмем $n+1=2p$ узлов, расположенных симметрично относительно точки $a+\frac{h}{2}$:

$$a-(p-1)h,\ldots,\ a-h,\ a,\ a+h,\ldots,\ a+ph,$$

и положим в формуле Ньютона (6)

$$a_0=a,\ a_1=a+h,\ a_2=a-h,\ a_3=a+2h,\ldots$$

Она приведется, как мы выяснили при выводе формулы Ньютона — Гаусса, к виду (12).

Для преобразования ее к симметричному виду выделим в ней величины $\frac{1}{2}f(a)$, $\frac{1}{2}\Delta^2 f(a-2h)$, $\frac{1}{2}\Delta^4 f(a-2h)$,... и подставим вместо них их выражения из равенств

$$f(a)=f(a+h)-\Delta f(a),$$
$$\Delta^2 f(a-h)=\Delta^2 f(a)-\Delta^3 f(a-h),$$
$$\Delta^4 f(a-2h)=\Delta^4 f(a-h)-\Delta^5 f(a-2h),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Формула (12) примет вид:

$$f(x)=\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{x-a-\frac{h}{2}}{1!\,h}\Delta f(a)+\\
+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}\,\frac{\Delta^2 f(a-h)+\Delta^2 f(a)}{2}+\\
+\frac{(x-a)(x-a-h)\left(x-a-\frac{h}{2}\right)}{3!\,h^3}\Delta^3 f(a-h)+\\
+\frac{(x-a+h)(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{4!\,h^4}\times\\
\times\frac{\Delta^4 f(a-2h)+\Delta^4 f(a-h)}{2}+\ldots+R_{2p}(x). \quad (14)$$

Это и есть формула Бесселя. Для нас она представляет интерес в следующем отношении. Пусть граничная задача для дифференциального уравнения решена по методу сеток для сетки с шагом h и пусть найденные значения не дают необходимой точности. Тогда мы должны будем уменьшить шаг сетки и решать ту же задачу для более мелкой сетки. Обычно уменьшают шаг сетки в два раза и решают задачу для сетки шага $\frac{h}{2}$. Чтобы начать решение задачи для новой сетки по методу итерации (см. n° 2 § 3 данной главы), нужно во всех узлах ее задать исходные приближенные значения для искомого решения. В тех узлах новой сетки, которые одновременно являлись и узлами старой сетки, за исходные значения можно принять те, которые были получены при решении задачи с сеткой шага h. Останется еще указать исходные значения в узлах новой сетки, которые не были узлами старой сетки. Вообще говоря, эти значения можно задавать произвольными, но от того, насколько заданные значения будут отличаться от истинных, зависит число циклов вычислений, которые нужно проделать, чтобы довести результат до нужной точности. Вычисления будут тем длительнее, чем больше погрешность исходных значений. Чтобы по возможности уменьшить их погрешность, можно при их задании воспользоваться ранее найденными значениями в узлах старой сетки и провести интерполяцию с них на

промежуточные узлы новой сетки. Для такого интерполирования и может оказаться полезной формула Бесселя (14).

При измельчении сетки в два раза интерполировать придется как раз на середину промежутка между двумя узлами. Поэтому мы укажем частный случай формулы Бесселя для $x = a + \frac{h}{2}$. Коэффициенты при нечетных разностях содержат множитель $x - a - \frac{h}{2}$, который при нашем выборе x обращается в нуль. Все такие члены выпадут, и в результате мы получим простую формулу, которая называется формулой Бесселя для интерполирования на середину промежутка:

$$f\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(a) + f(a+h)}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{\Delta^2 f(a-h) + \Delta^2 f(a)}{2} + \\ + \frac{3}{128}\,\frac{\Delta^4 f(a-2h) + \Delta^4 f(a-h)}{2} - \frac{5}{1024}\,\frac{\Delta^6 f(a-3h) + \Delta^6 f(a-2h)}{2} + \ldots \\ \ldots + R_{2p}\left(a + \frac{h}{2}\right). \qquad (14_1)$$

Определим более точно величину остаточного члена $R_{2p}\left(a + \frac{h}{2}\right)$. Общая форма его указана в равенстве (8_1). В нашем случае $n + 1 = 2p$, и узлы интерполирования есть $a - (p-1)h, \ldots, a - h, a, a + h, \ldots, a + ph$. Полином $\omega(x)$ будет иметь вид

$$\omega(x) = \\ = (x-a)(x-a-h)(x-a+h)\ldots[x-a+(p-1)h]\cdot(x-a-ph),$$

$$\omega\left(a + \frac{h}{2}\right) = (-1)^p \frac{h^{2p}[1\cdot 3\ldots(2p-1)]^2}{2^{2p}},$$

и, следовательно,

$$R_{2p}\left(a + \frac{h}{2}\right) = (-1)^p \frac{h^{2p}[1\cdot 3\ldots(2p-1)]^2}{2^{2p}} \cdot \frac{f^{(2p)}(\xi)}{(2p)!}, \qquad (14_2)$$

где ξ есть некоторое число, промежуточное между $a - (p-1)h$ и $a + ph$.

Обратимся теперь к задаче о вычислении производных. Пусть нам даны $n + 1$ значений независимой переменной $x = a_0, a_1, \ldots, a_n$ и соответствующие им значения функции $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)$. Мы поставим задачей найти выражение производных от функции $f(x)$ через заданные значения самой функции. Она решается обычно следующим способом. По известным значениям функции в точках a_k составляют интерполяционный полином $P_n(x)$:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Затем отбрасывают остаточный член $R_{n+1}(x)$ интерполяционной формулы, заменяя интерполируемую функцию полиномом $P_n(x)$, и вычисляют от этого полинома производную нужного порядка. Получают

следующие приближенные выражения производных через значения функции в узлах интерполяции:

$$f'(x) \approx P'_n(x), \quad f''(x) \approx P''_n(x), \ldots$$

Точные же значения производных будут равны

$$f'(x) = P'_n(x) + R'_{n+1}(x); \quad f''(x) = P''_n(x) + R''_{n+1}(x), \ldots$$

В этих равенствах величины $R'_{n+1}(x)$, $R''_{n+1}(x), \ldots$ имеют смысл погрешностей в полученных приближенных выражениях производных.

Выбор интерполяционной формулы зависит от того, какая дана система узлов сетки и при каких значениях x нужно вычислить производные.

В общем случае, если значения a_k не равноотстоящие, можно воспользоваться общей формулой Ньютона (6). Она дает выражения производных через разностные отношения заданной функции. Обозначив для облегчения записи $x - a_k = \alpha_k$, запишем формулу Ньютона в виде

$$f(x) = f(a_0) + \alpha_0 f(a_0, a_1) + \alpha_0\alpha_1 f(a_0, a_1, a_2) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} f(a_0, a_1, \ldots, a_n) + R_{n+1}(x).$$

Дифференцируя почленно это равенство по x, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x) &= f(a_0, a_1) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(a_0, a_1, a_2) + \\
&\quad + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \ldots \\
&\quad \ldots + R'_{n+1}(x), \\
\frac{1}{2!} f''(x) &= f(a_0, a_1, a_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \\
&\quad + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \times \\
&\quad \times f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots + R''_{n+1}(x), \\
\frac{1}{3!} f'''(x) &= f(a_0, a_1, a_2, a_3) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots \\
&\quad \ldots + R'''_{n+1}(x), \\
\frac{1}{4!} f^{IV}(x) &= f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \times \\
&\quad \times f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + \ldots + R^{IV}_{n+1}(x)
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

и т. д.

Коэффициентами в этих формулах при разностных отношениях стоят симметрические функции от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ В первой из формул (15) коэффициентом при $f(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ стоит симметрическая функция порядка $r - 1$ от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$. Во всех следующих формулах после каждого дифференцирования измерение ее убывает на единицу.

Равенства (15), если отбросить в них остаточные члены, дают приближенные выражения производных при любых значениях аргумента x. Для нас особый интерес представляет получить выражения производных в узлах сетки a_k.

Пусть x совпадает, например, с a_0. Из (15), если в них считать $\alpha_k = a_0 - a_k$ и $\alpha_0 = 0$, вытекает

$$\left.\begin{aligned} f'(a_0) &= f(a_0, a_1) + \alpha_1 f(a_0, a_1, a_2) + \alpha_1\alpha_2 f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \ldots \\ &\qquad \ldots + R'_{n+1}(a_0), \\ \frac{1}{2!} f''(a_0) &= f(a_0, a_1, a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \\ &\qquad + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots \\ &\qquad \ldots + R''_{n+1}(a_0), \\ \frac{1}{3!} f'''(a_0) &= f(a_0, a_1, a_2, a_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + \ldots \\ &\qquad \ldots + R'''_{n+1}(a_0), \\ \frac{1}{4!} f^{IV}(a_0) &= f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \times \\ &\qquad \times f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) + \ldots + R^{IV}_{n+1}(a_0) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

и т. д.

Найдем еще выражение остаточных членов общих равенств (15), позволяющее производить оценку погрешностей приближенных выражений для производных. Величина остаточного члена $R_{n+1}(x)$ интерполяционной формулы была нами приведена к формуле (8). Из нее следует, что

$$\left.\begin{aligned} R'_{n+1}(x) &= \omega'(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k) - f(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)} + \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k) - f(x) - \frac{a_k - x}{1!} f'(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)^2}, \\ R''_{n+1}(x) &= \omega''(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k) - f(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)} + 2\omega'(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k) - f(x) - \frac{a_k - x}{1!} f'(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)^2} + \\ &\quad + \omega(x) \sum_{k=0}^{n} 2\, \frac{f(a_k) - f(x) - \frac{(a_k - x)}{1!} f'(x) - \frac{(a_k - x)^2}{2!} f''(x)}{\omega'(a_k)(a_k - x)^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R^{(r)}_{n+1}(x) &= \sum_{s=0}^{r} C_r^s \omega^{(r-s)}(x) \sum_{k=0}^{n} s! \times \\ &\quad \times \frac{f(a_k) - f(x) - \frac{a_k - x}{1!} f'(x) - \ldots - \frac{(a_k - x)^s}{s!} f^{(s)}_{(x)}}{\omega'(a_k)(a_k - x)^{s+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

В том случае, когда x совпадает с одним из узлов интерполяции, эти выражения упрощаются. В частности, в них будут отсутствовать члены, содержащие $\omega(x)$, так как при $x = a_0, a_1, \ldots$ полином $\omega(x)$ обращается в нуль.

Когда даны значения функции для равноотстоящих значений аргумента, можно воспользоваться одной из интерполяционных формул Ньютона, Стирлинга или Бесселя. Они дадут выражения производных через разности функций. Выбор между ними производится на тех же основаниях, что и в задаче интерполирования. Так, например, если нам даны значения функции в точках a, $a+h$, ..., $a+nh$ и нужно найти значения производных вблизи точки a, мы воспользуемся формулой Ньютона (10) для интерполирования вперед. Нам ниже потребуются выражения для производных лишь в узлах сетки, и потому мы будем считать $x=a$.

Вычисляя от (10) производную и полагая в результате $x=a$, найдем следующие выражения производных в точке a через значения функции в точках, лежащих справа от a:

$$\left.\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{1}{h}\Big[\Delta f(a) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a) - \ldots \\
&\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n f(a)\Big] + R'_{n+1}(a),\\
f''(a) &= \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(a) - \frac{5}{6}\Delta^5 f(a) + \\
&\qquad + \frac{137}{180}\Delta^6 f(a) - \ldots\Big] + R''_{n+1}(a),\\
f'''(a) &= \frac{1}{h^3}\Big[\Delta^3 f(a) - \frac{3}{2}\Delta^4 f(a) + \frac{7}{4}\Delta^5 f(a) - \frac{15}{8}\Delta^6 f(a) + \ldots\Big] + \\
&\qquad + R'''_{n+1}(a)
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

и т. д.

Если же нам даны значения функции в точках a, $a-h$, $a-2h$, ... и нужно найти производные при $x=a$, мы воспользуемся формулой Ньютона (11) для интерполирования назад. Дифференцируя (11) по x и полагая в результате $x=a$, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{1}{h}\Big[\Delta f(a-h) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(a-2h) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a-3h) + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{1}{n}\Delta^n f(a-nh)\Big] + R'_{n+1}(a),\\
f''(a) &= \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^2 f(a-2h) + \Delta^3 f(a-3h) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(a-4h) + \\
&\qquad + \frac{5}{6}\Delta^5 f(a-5h) + \frac{137}{180}\Delta^6 f(a-6h) + \ldots\Big] + R''_{n+1}(a),\\
f'''(a) &= \frac{1}{h^3}\Big[\Delta^3 f(a-3h) + \frac{3}{2}\Delta^4 f(a-4h) + \frac{7}{4}\Delta^5 f(a-5h) + \\
&\qquad + \frac{15}{8}\Delta^6 f(a-6h) + \ldots\Big] + R'''_{n+1}(a),\\
f^{\mathrm{IV}}(a) &= \frac{1}{h^4}\Big[\Delta^4 f(a-4h) + 2\Delta^5 f(a-5h) + \frac{17}{6}\Delta^6 f(a-6h) + \ldots\Big] + \\
&\qquad + R^{\mathrm{IV}}_{n+1}(a).
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Более подробно мы остановимся на наиболее важном для нас случае, когда нужно найти выражения производных в некотором узле сетки через значения функции в узлах, лежащих симметрично с обеих сторон от рассматриваемой точки. Здесь мы воспользуемся формулой Стирлинга. Пусть рассматриваются значения функции в точках $a-ph, \ldots, a-h, a, a+h, \ldots, a+ph$ и нужно найти производные в точке a. Возьмем производные от обоих членов равенства (13) и положим $x=a$. Тогда найдем:

$$\left.\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta f(a)+\Delta f(a-h)}{2}-\frac{1}{3!}\frac{\Delta^3 f(a-h)+\Delta^3 f(a-2h)}{2}+\right.\\
&\qquad +\frac{4}{5!}\frac{\Delta^5 f(a-2h)+\Delta^5 f(a-3h)}{2}-\ldots+\\
&\left.\quad+\frac{(-1)^{p-1}[(p-1)!]^2}{(2p-1)!}\frac{\Delta^{2p-1}f(a-(p-1)h)+\Delta^{2p-1}f(a-ph)}{2}\right]+R'_{2p+1}(a),\\
f''(a) &= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f(a-h)-\frac{2}{4!}\Delta^4 f(a-2h)+\frac{8}{6!}\Delta^6 f(a-3h)-\ldots\right]+\\
&\qquad + R''_{2p+1}(a),\\
f'''(a) &= \frac{1}{h^3}\left[\frac{\Delta^3 f(a-h)+\Delta^3 f(a-2h)}{2}-\frac{30}{5!}\frac{\Delta^5 f(a-2h)+\Delta^5 f(a-3h)}{2}+\ldots\right]+\\
&\qquad + R'''_{2p+1}(a),\\
f^{\mathrm{IV}}(a) &= \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 f(a-2h)-\frac{120}{6!}\Delta^6 f(a-3h)+\ldots\right]+R^{\mathrm{IV}}_{2p+1}(a)
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

и т. д.

Изучим остаточные члены этих формул и установим их оценки. Возьмем первый из них $R'_{2p+1}(a)$. Выражение его для любых узлов интерполяции дано первым равенством (17).

В нашем случае $a_0=a,\ a_1=a+h,\ a_2=a+h, \ldots$

$$\omega(x)=(x-a)[(x-a)^2-h^2]\ldots[(x-a)^2-p^2h^2],$$
$$\omega(a)=0,$$
$$\omega'(a)=(-1)^p(p!)^2h^{2p}.$$

Поэтому остаточный член будет равен

$$R'_{2p+1}(a)=(-1)^p(p!)^2h^{2p}\left[\sum_{k=0}^{2p}\frac{f(a_k)-f(x)}{\omega'(a_k)(a_k-x)}\right]_{x=a} \quad (21)$$

Если, кроме того, принять во внимание равенство (8_2), дающее значение функции в квадратных скобках при всяких значениях x, то будет ясно, что остаточный член в выражении первой производной представляется в форме

$$R'_{2p+1}(a)=\frac{(-1)^p(p!)^2h^{2p}}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(\xi) \quad (a-ph<\xi<a+ph). \quad (22)$$

Отметим частные случаи значений для первой производной:

при $p=1$

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}-\frac{h^2}{3!}f'''(\xi); \tag{20_1}$$

при $p=2$

$$f'(a)=\frac{-f(a+2h)+8f(a+h)-8f(a-h)+f(a-2h)}{12h}+\frac{h^4}{30}f^{V}(\xi). \tag{20_2}$$

Оценим еще остаточный член в выражении второй производной. Если разложить полином $\omega(x)$, который мы выписали несколькими строками выше, по степеням $x-a$, то будет видно, что в разложение войдут только нечетные степени $x-a$. Отсюда следует, что все производные четного порядка от $\omega(x)$ в точке $x=a$ равны нулю. В частности, $\omega''(a)=0$, и из второго равенства (17) видно, что

$$R''_{2p+1}(a)=2\omega'(a)\left[\sum_{k=0}^{2p}\frac{f(a_k)-f(x)-\frac{a_k-x}{1!}f'(x)}{\omega'(a_k)(a_k-x)^2}\right]_{x=a}$$

Произведем оценку выражения, стоящего в квадратных скобках. Для этого установим одно свойство коэффициентов интерполяционной формулы Лагранжа. Рассмотрим полином от аргумента z:

$$\Pi_s(z)=(z-x)^s \quad (s=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Узлы интерполяции назовем $a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n$. Составим интерполяционный полином для $\Pi_s(z)$. Так как $\Pi_s(z)$ есть полином степени не выше чем n, интерполяционный полином для него будет равен самому полиному $\Pi_s(z)$ и, согласно (7_1), будет иметь место равенство:

$$\Pi_s(z)=(z-x)^s=\omega(z)\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_k-x)^s}{\omega'(a_k)(z-a_k)}.$$

Если здесь положить $z=x$, то, ввиду $\Pi_s(x)=0$, отсюда будет следовать:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_k-x)^s}{\omega'(a_k)(x-a_k)}=0 \quad (s=1, 2,\ldots,\ n). \tag{23}$$

Вернемся к остаточному члену $R''_{2p+1}(a)$. Разложим числитель выражения, стоящего в скобках, по формуле Тэйлора:

$$f(a_k)-f(x)-\frac{a_k-x}{1!}f'(x)=\frac{(a_k-x)^2}{2!}f''(x)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(a_k-x)^{2p+1}}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(x)+\frac{(a_k-x)^{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+2)}(\xi_k),$$

ξ_k — промежуточное значение между x и a_k. Получим:

$$\sum_{k=0}^{2p} \frac{f(a_k)-f(x)-\frac{a_k-x}{1!}f'(x)}{\omega'(a_k)(a_k-x)^2}=$$

$$=\frac{f''(x)}{2!}\sum_{k=0}^{2p}\frac{(a_k-x)^2}{\omega'(a_k)(a_k-x)^2}+\ldots+\frac{f^{(2p+1)}(x)}{(2p+1)!}\sum_{k=0}^{2p}\frac{(a_k-x)^{2p+1}}{\omega'(a_k)(x-a_k)^2}+$$

$$+\frac{1}{(2p+2)!}\sum_{k=0}^{2p}\frac{(a_k-x)^{2p+2}}{\omega'(a_k)(x-a_k)^2}f^{(2p+2)}(\xi_k).$$

Все суммы в правой части равенства, за исключением последней, в силу (23) обращаются в нуль. Поэтому

$$R''_{2p+1}(a)=2\omega'(a)\frac{1}{(2p+2)!}\sum_{k=0}^{2p}\frac{(a_k-a)^{2p}}{\omega'(a_k)}f^{(2p+2)}(\xi_k).$$

Величина $\omega'(a)$ нами вычислена выше:

$$\omega'(a+kh)=(-1)^{p-k}h^{2p}(p+k)!\,(p-k)!$$

Объединим в $R''_{2p+1}(a)$ члены, отвечающие точкам, симметричным относительно a:

$$R''_{2p+1}(a)=2(-1)^p h^{2p}(p!)^2\frac{1}{(2p+2)!}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{p}\frac{k^{2p}h^{2p}\left[f^{(2p+2)}(\xi_{p+k})+f^{(2p+2)}(\xi_{p-k})\right]}{(-1)^{p-k}h^{2p}(p+k)!\,(p-k)!}.$$

Введем еще следующее обозначение:

$$\max_{a-ph\leqslant x\leqslant a+ph}|f^{(s)}(x)|=M_s.$$

Тогда

$$R''_{2p+1}(a)=4\frac{(p!)^2h^{2p}}{(2p+2)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{k^{2p}}{(p+k)!(p-k)!}\vartheta M_{2p+2};\quad |\vartheta|\leqslant 1.$$

В частных случаях для второй производной имеем:
при $p=1$

$$f''(a)=\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}+\frac{h^2}{12}\vartheta M_4; \qquad (20_3)$$

при $p=2$

$$f''(a)=\frac{-f(a+2h)+16f(a+h)-30f(a)+16f(a-h)-f(a-2h)}{12h^2}+$$
$$+\frac{h^4}{54}\vartheta M_6. \qquad (20_4)$$

Аналогичным способом могут быть получены оценки остаточных членов в выражениях производных выше второго порядка.

Ниже мы приводим сводку приближенных выражений для первых шести производных,[1] где

$$f_0=f(a),$$
$$\delta_\nu=f(a+\nu h)-f(a-\nu h),$$
$$\sigma_\nu=f(a+\nu h)+f(a-\nu h),$$
$$a-h<\xi_1<a+h, \quad a-2h<\xi_2<a+2h, \quad a-3h<\xi_3<a+3h.$$

$$\left.\begin{aligned}
f'(a)&=\frac{\delta_1}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)=\frac{-\delta_2+8\delta_1}{12h}+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi_2)=\\
&=\frac{\delta_3-9\delta_2+45\delta_1}{60h}-\frac{h^6}{140}f^{(7)}(\xi_3),\\
f''(a)&=\frac{\sigma_1-2f_0}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_1)=\frac{-\sigma_2+16\sigma_1-30f_0}{12h^2}+\\
&+\frac{h^4}{90}f^{(6)}(\xi_2)=\frac{2\sigma_3-27\sigma_2+270\sigma_1-490f_0}{180h^2}-\frac{h^6}{560}f^{(8)}(\xi_3),\\
f^{(3)}(a)&=\frac{\delta_2-2\delta_1}{2h^3}-\frac{h^2}{4}f^{(5)}(\xi_2)=\\
&=\frac{-\delta_3+8\delta_2-13\delta_1}{8h^3}+\frac{7h^4}{120}f^{(7)}(\xi_3),\\
f^{(4)}(a)&=\frac{\sigma_2-4\sigma_1+6f_0}{h^4}-\frac{h^2}{6}f^{(6)}(\xi_2)=\\
&=\frac{-\sigma_3+12\sigma_2-39\sigma_1+56f_0}{6h^4}+\frac{7h^4}{240}f^{(8)}(\xi_3),\\
f^{(5)}(a)&=\frac{\delta_3-4\delta_2+5\delta_1}{2h^5}-\frac{h^2}{3}f^{(7)}(\xi_3),\\
f^{(6)}(a)&=\frac{\sigma_3-6\sigma_2+15\sigma_1-20f_0}{h^6}-\frac{h^2}{4}f^{(8)}(\xi_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

---

[1] По поводу дополнительных членов равенств см. М. Л. Бродский [1].

2. Соотношения между значениями функции в узлах сетки, оператором Лапласа и бигармоническим оператором. При численном решении уравнений Лапласа и Пуассона нам потребуется некоторые соотношения между оператором Лапласа и значениями функции в узлах сетки. Для произвольной прямоугольной сетки на плоскости xy приближенное выражение операции Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ легко может быть получено, если в ней вместо вторых производных поставить их выражения через вторые центральные разностные отношения. Пусть сетка на плоскости образована прямыми

$$x = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots$$

$$y = y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots$$

и нужно найти приближенное выражение операции Лапласа в узле (x_i, y_k). Для вычисления второй частной производной по x придадим аргументу y значение y_k и будем изменять аргумент x, заставляя его пробегать значения, отвечающие узлам сетки. Расположим эти значения в порядке их удаленности от x_i. Пусть, например, это будет иметь место при следующем расположении точек

$$x_i,\ x_{i+1},\ x_{i-1}, \ldots$$

Вычисляем вторую производную от функции u по x при помощи формулы (15), полагая в ней $a_0 = x_i$, $a_1 = x_{i+1}$, $a_2 = x_{i-1}, \ldots$ Число точек, привлекаемых к вычислению, определяется той точностью, с которой мы хотим вычислить эту производную. Пренебрегая затем остаточным членом, мы заменяем вторую производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ найденным ее выражением через разностные отношения. Аналогично вычисляем приближенно вторую частную производную по y и, наконец, складывая оба результата вместе, найдем приближенное выражение операции Лапласа.

Например, ограничимся при вычислении второй производной по x лишь точками x_i, x_{i+1}, x_{i-1}. Для второго разностного отношения, если положить $u(x_i, y_k) = u_{i,k}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, будем иметь:

$$\frac{\dfrac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{\Delta x_i} - \dfrac{u_{i,k} - u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}.$$

Для второго разностного отношения по y получим, при сходных вычислениях

$$\frac{\dfrac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta y_k} - \dfrac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}.$$

Мы будем иметь, в силу второй из формул (15), если в ней сохранить лишь первые члены в правой части, следующее приближенное

выражение для лапласиана:

$$\Delta u = 2\left[\frac{\frac{u_{i+1,k}-u_{i,k}}{\Delta x_i}-\frac{u_{i,k}-u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i+\Delta x_{i-1}}+\frac{\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k}}{\Delta y_k}-\frac{u_{i,k}-u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k+\Delta y_{k-1}}\right].$$

Погрешность этого равенства может быть оценена, если оценить величины остаточных членов в формулах (15).

Можно получить также приближенное выражение операции Лапласа Δu в точке (x_i, y_k), рассматривая не только узлы сетки, лежащие на прямых $x = x_i$, $y = y_k$, но и другие узлы сетки. Наиболее простую форму эти выражения имеют в самом распространенном случае равноотстоящих значений аргументов, когда сетка будет квадратной.

Мы ограничимся рассмотрением только этого частного случая. Проведем на плоскости две системы параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih = x_i,$$
$$y = y_0 + kh = y_k.$$

Рассмотрим узел (i, k) сетки и возьмем четыре ближайших к нему узла $(i+1, k)$; $(i, k+1)$; $(i-1, k)$; $(i, k-1)$. Попытаемся найти приближенное выражение Δu в узле (i, k). Для этого образуем разности значений u в точке (i, k) и во взятых нами четырех ближайших точках. Пользуясь формулой Тэйлора, получим для них следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
u_{i+1,k}-u_{i,k} &= hu_x+\frac{h^2}{2!}u_{x^2}+\frac{h^3}{3!}u_{x^3}+\frac{h^4}{4!}u_{x^4}+\ldots,\\
u_{i-1,k}-u_{i,k} &= -hu_x+\frac{h^2}{2!}u_{x^2}-\frac{h^3}{3!}u_{x^3}+\frac{h^4}{4!}u_{x^4}-\ldots,\\
u_{i,k+1}-u_{i,k} &= hu_y+\frac{h^2}{2!}u_{y^2}+\frac{h^3}{3!}u_{y^3}+\frac{h^4}{4!}u_{y^4}+\ldots,\\
u_{i,k-1}-u_{i,k} &= -hu_y+\frac{h^2}{2!}u_{y^2}-\frac{h^3}{3!}u_{y^3}+\frac{h^4}{4!}u_{y^4}-\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Будем искать Δu в форме линейной комбинации написанных разностей. Ввиду очевидной равноправности этих разностей, все они войдут с одинаковыми коэффициентами, и мы должны будем построить следующую комбинацию из значений функции:

$$\diamond\, u_{i,k} = u_{i+1,k}+u_{i,k+1}+u_{i-1,k}+u_{i,k-1}-4u_{i,k}. \qquad (26)$$

Выражение для нее через производные мы найдем немедленно, если сложим почленно все равенства (25):

$$\diamond\, u_{i,k} = 2\left[\frac{h^2}{2!}(u_{x^2}+u_{y^2})+\frac{h^4}{4!}(u_{x^4}+u_{y^4})+\frac{h^6}{6!}(u_{x^6}+u_{y^6})+\ldots\right] \qquad (27)$$

Отсюда получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}\diamond\, u_{i,k} &= \Delta u + R_{i,k},\\
R_{i,k} &= \frac{2h^2}{4!}(u_{x^4}+u_{y^4})+\frac{2h^4}{6!}(u_{x^6}+u_{y^6})+\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Величина $R_{i,k}$ здесь имеет смысл остаточного члена. Заметим, что если бы мы в равенствах (25) разности функции представляли по формуле Тэйлора с остаточным членом, беря значения производных до третьего порядка в точке (x_i, y_k) и производные четвертого порядка в средних точках, мы получили бы для $R_{i,k}$ выражение следующего типа:

$$R_{i,k} = \frac{4h^2}{4!}\vartheta M_4, \tag{29}$$

где M_4 есть наибольшее значение модуля производных четвертого порядка u_{x^4} и u_{y^4} в той области, где рассматривается функция u.

Если функция u — гармоническая или удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = f(x, y)$, то, отбрасывая в (28) остаточный член $R_{i,k}$, получим для u уравнение в конечных разностях либо $\frac{1}{h^2}\diamond u_{i,k} = 0$, либо $\frac{1}{h^2}\diamond u_{i,k} = f_{i,k}$, которым приближенно заменяется точное уравнение (28). $R_{i,k}$ будет погрешностью уравнения в конечных разностях, сравнительно с (28). Если при одних и тех же граничных условиях решить точное уравнение (28) и приближенное уравнение в конечных разностях, то эти оба решения не будут совпадать. Расхождение между ними будет, вообще говоря, тем больше, чем больше погрешность $R_{i,k}$ приближенного уравнения. Поэтому представляется выгодным для получения большей точности результата попытаться уменьшить величину остаточного члена. Этого можно достигнуть следующим способом. Наряду с значениями функции в узлах сетки (i, k), $(i+1, k)$, $(i, k+1)$, $(i-1, k)$, $(i, k-1)$, которые входили в комбинацию $\diamond u_{i,k}$, мы возьмем еще значения u в узлах $(i+1, k+1)$, $(i+1, k-1)$, $(i-1, k-1)$, $(i-1, k+1)$. Составим разности между этими значениями и $u_{i,k}$ и разложим их по формуле Тэйлора:

$$\left.\begin{aligned}
u_{i+1,k+1} - u_{i,k} &= h\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\
&\qquad + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \ldots, \\
u_{i-1,k+1} - u_{i,k} &= h\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\
&\qquad + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \ldots, \\
u_{i-1,k-1} - u_{i,k} &= h\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\
&\qquad + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \ldots, \\
u_{i+1,k-1} - u_{i,k} &= h\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\
&\qquad + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

В силу той же равноправности, о которой мы говорили при образовании комбинации $\diamond u_{i,k}$ при использовании написанных разностей для составления приближенного выражения Δu, мы образуем сумму всех этих разностей. Обозначим ее $\square u_{i,k}$ и заметим, что при сложении равенств (30) все нечетные степени скобок сократятся, так как каждая из них входит дважды с противоположными знаками. Кроме того, при суммировании четных степеней скобок в результате сложения сохранятся только те члены, которые содержат каждую из операций $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ в четной степени. Простые подсчеты показывают, что

$$\square u_{i,k} = u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} - 4u_{i,k} =$$
$$= 4\left[\frac{h^2}{2!}(u_{x^2} + u_{y^2}) + \frac{h^4}{4!}(u_{x^4} + 6u_{x^2y^2} + u_{y^4}) + \right.$$
$$\left. + \frac{h^6}{6!}(u_{x^6} + 15u_{x^4y^2} + 15u_{x^2y^4} + u_{y^6}) + \ldots\right]. \quad (31)$$

Составим, наконец, комбинации $a\diamond u_{i,k} + b\square u_{i,k}$. Вспомним, что остаточный член в равенстве (28), когда мы использовали только $\diamond u_{i,k}$, содержал члены с производными четвертого порядка и при малых h эти члены являлись главными. Подобрать a и b в изучаемой комбинации так, чтобы в ней исчезли члены с четвертыми производными, мы не можем, хотя бы по той причине, что в $\square u_{i,k}$ входит смешанная производная четвертого порядка, тогда как в $\diamond u_{i,k}$ смешанные производные совершенно отсутствуют. Но для той частной задачи, которую мы рассматриваем сейчас, исключить члены с четвертыми производными из неизвестного остаточного члена и перевести их в разряд известных величин можно иным путем. Если u удовлетворяет уравнению Лапласа или Пуассона, то для нее является известной операция Лапласа и поэтому будет известной и всякая операция, производная от нее. В частности, будет известна и бигармоническая операция $\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$. Сообразно с этим мы постараемся a и b подобрать так, чтобы коэффициент при Δu в выражении $a\diamond u_{i,k} + b\square u_{i,k}$ был равен единице и чтобы члены с четвертыми производными образовали бигармоническую операцию $\Delta\Delta u$. Для этого, очевидно, должны быть соблюдены уравнения

$$2\frac{h^2}{2!}a + 4\frac{h^2}{2!}b = 1; \quad 2\left(2\frac{h^4}{4!}a + 4\frac{h^4}{4!}b\right) = 4\frac{h^4}{4!}6b.$$

Из них находим:

$$a = \frac{2}{3h^2}; \quad b = \frac{1}{6h^2}.$$

Заметим также, что при таком выборе a и b члены с производными шестого порядка могут быть выражены через операцию Лап-

ласа Δu. А именно, простые вычисления показывают, что если в $a \diamond u_{i,k} + b \,\square\, u_{i,k}$ собрать все такие члены, то получим

$$\frac{2h^4}{6!}(u_{x^6} + 5u_{x^4y^2} + 5u_{x^2y^4} + u_{y^6}) = \frac{2h^4}{6!}\left(\Delta^3 u + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\Delta u\right).$$

Сумма же членов с производными восьмого порядка, как видно из написанного ниже равенства, не может быть выражена только через Δu. По этой причине мы их относим к остаточному члену:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{6h^2}(4 \diamond u_{i,k} + \square\, u_{i,k}) = \Delta u + \frac{2h^2}{4!}\Delta^2 u + {}&\\ + \frac{2h^4}{6!}\left(\Delta^3 u + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\Delta u\right) + R_{i,k},&\\ R_{i,k} = \frac{2}{3}\,\frac{h^6}{8!}\left[3\Delta^4 u + 16\,\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\Delta^2 u + 20\,\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}\right] + \ldots& \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Первые три члена правой части выражаются только через операцию Лапласа Δu. Для функций, удовлетворяющих уравнениям $\Delta u = 0$ или $\Delta u = f(x, y)$, их можно считать известными. Относительно остаточного члена $R_{i,k}$ заметим, что если бы мы в равенствах (30) производили разложение по формуле Тэйлора с остаточным членом, причем производные до седьмого порядка брали бы в точке (i, k), а производные восьмого порядка в некоторых средних точках, включая их в остаточный член формулы, то для $R_{i,k}$ мы получили бы выражение следующего типа:

$$R_{i,k} = \frac{520h^6}{3 \cdot 8!}\,\vartheta M_8 \qquad (|\vartheta| \leqslant 1). \tag{33}$$

M_8 — наибольшее значение модуля восьмых производных в рассматриваемой области.

Оценка остатка $R_{i,k}$, доставляемая (33), является, по-видимому, преувеличенной и ею вряд ли целесообразно пользоваться в практических вычислениях. Второе равенство (32) дает разложение $R_{i,k}$ в ряд по степеням шага h сетки. При малых h главную роль будет играть первый член разложения и приближенно можно считать $R_{i,k}$ равной этому первому члену.

Отсюда и может быть получена приближенная оценка $R_{i,k}$, вероятно, достаточная для многих практических целей. Например, если u — гармоническая и стало быть для нее $\Delta u = 0$ и $\Delta^2 u = 0$, из (32) для $R_{i,k}$ получаем следующее выражение:

$$R_{i,k} = \frac{40}{3}\,\frac{h^6}{8!}\,\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \text{члены высшего порядка.}$$

Приближенная оценка, получаемая отсюда: $|R_{i,k}| \leqslant \frac{40}{3} \frac{h^6}{8!} M_8$ в задачах частного типа, вероятно, не будет сильно отклоняться от истинной. Она имеет тот же порядок малости, что и оценка, получаемая из (33), но коэффициент ее $\frac{40}{3 \cdot 8!}$ будет в 13 раз меньше коэффициента предыдущей оценки. Само собой разумеется, эта новая оценка, ввиду ее приближенного характера, имеет лишь ориентировочное значение, и возможность ее применения подлежит еще исследованию.

Нам потребуется еще одно преобразование равенства (32). Мы выясним предварительно цель его.

Пусть функция u удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = f(x, y)$. Если в правую часть (32) подставить вместо Δu его значение $f(x, y)$ и отбросить остаточный член $R_{i,k}$, для u получим следующее уравнение в конечных разностях:

$$\frac{1}{6h^2}[4 \diamond u_{i,k} + \square u_{i,k}] = f_{i,k} + \frac{2h^2}{4!} \Delta f_{i,k} + \frac{2h^4}{6!}\left(\Delta^2 f_{i,k} + 2\frac{\partial^4 f_{i,k}}{\partial x^2 \partial y^2}\right).$$

Когда функция $f(x, y)$ задана аналитически, пользование этим уравнением не представляет затруднения. Но если известны значения $f(x, y)$ только в узлах сетки, то дифференциальные операции от нее, входящие в правую часть равенства, точно вычислены быть не могут и вычисляются приближенно через значения самой функции.

Пусть вычисления проводятся с точностью до величин 4-го порядка малости относительно h исключительно. Отбросим в написанном выше равенстве последний член правой части, как содержащий множитель h^4, и затем заменим $\Delta f_{i,k}$ его значением из (28). Остаточный член $R_{i,k}$ в нем имеет порядок h^2. Кроме того, операцию $\Delta f_{i,k}$ мы должны умножить на $\frac{2h^2}{4}$. Поэтому мы отбрасываем $R_{i,k}$ в (28) и полагаем приближенно

$$\Delta f_{i,k} = \frac{1}{h^2} \diamond f_{i,k} = \frac{f_{i+1,k} + f_{i,k+1} + f_{i-1,k} + f_{i,k-1} - 4f_{i,k}}{h^2}.$$

После простых преобразований наше уравнение, если подставить в него вместо $\Delta f_{i,k}$ его приближенное значение, примет вид:

$$\frac{1}{h^2}[4 \diamond u_{i,k} + \square u_{i,k}] = \frac{u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1}}{h^2} +$$
$$+ \frac{4(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) - 20u_{i,k}}{h^2} =$$
$$= \frac{8f_{i,k} + f_{i+1,k} + f_{i-1,k} + f_{i,k+1} + f_{i,k-1}}{12}. \qquad (34)$$

Погрешность этого нового приближенного уравнения сравнительно с точным уравнением (32) будет порядка h^4.

Мы не станем входить в подробности такого рода преобразования уравнения (32) и отсылаем читателя, желающего с ним ознакомиться, к статье Ш. Е. Микеладзе [6].[1])

При выводе соотношений (28) и (32) мы использовали узлы сетки, являющиеся вершинами квадратов, прилежащих к точке (i, k). Если привлекать в вычисления значения функции во все более и более далеких узлах сетки, можно получать соотношения, аналогичные (28) и (32), но с остаточным членом все большего и большего порядка малости. Так как мы не стремимся к изложению вопроса о приближенном представлении уравнений Лапласа и Пуассона во всех подробностях и поставили себе целью только освещение основных идей метода сеток, то ограничиваемся простейшими соотношениями такого рода, указанными нами в равенствах (28) и (32).

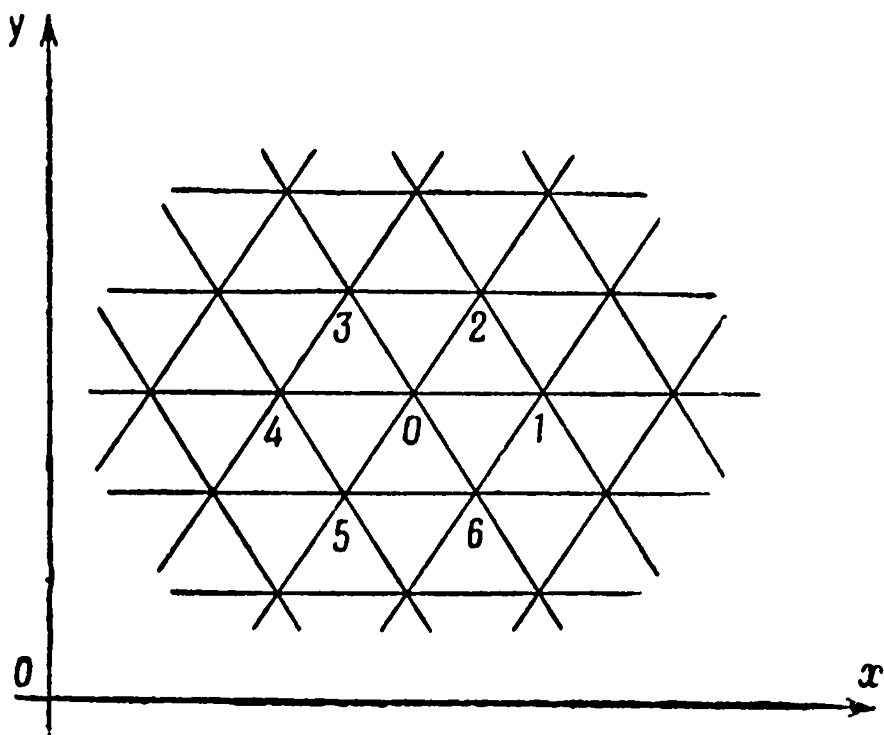


Рис. 5.

Наряду с квадратной сеткой мы рассмотрим другие возможные правильные сетки в плоскости — треугольную и шестиугольную.[2])

Первая из них изображена на рис. 5. Возьмем внутреннюю точку, помеченную номером *0*, и шесть ближайших окружающих ее узловых точек *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Если координаты нулевой точки будут x, y и длина стороны треугольника h, то координаты соседних точек будут соответственно:

$$(x+h,\ y),\ \left(x+\frac{1}{2}h,\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\ \left(x-\frac{1}{2}h,\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$

$$(x-h,\ y),\quad \left(x-\frac{1}{2}h,\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\ \left(x+\frac{1}{2}h,\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right).$$

---

[1]) См. также работы Ш. Е. Микеладзе [1], [3—5], [7—9].

[2]) Зависимость между оператором Лапласа Δu и значениями функции в центре и вершинах правильного многоугольника была рассмотрена в работе С. А. Гершгорина [1].

Для разностей между значениями функции u в узлах *1, 2, ..., 6* и в узле *0* по формуле Тэйлора получим:

$$u_1 - u_0 = hu_x + \frac{h^2}{2!} u_{x^2} + \frac{h^3}{3!} u_{x^3} + \frac{h^4}{4!} u_{x^4} + \ldots,$$

$$u_2 - u_0 = h\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \ldots,$$

$$u_3 - u_0 = h\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \ldots,$$

$$u_4 - u_0 = -hu_x + \frac{h^2}{2!} u_{x^2} - \frac{h^3}{3!} u_{x^3} + \frac{h^4}{4!} u_{x^4} - \ldots,$$

$$u_5 - u_0 = h\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \ldots,$$

$$u_6 - u_0 = h\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \\ + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \ldots$$

Сложим все эти равенства. При суммировании все производные, получающиеся в результате дифференцирования нечетное число раз по одной из переменных x и y, должны, очевидно, сократиться. После простых подсчетов найдем:

$$\sum_{i=1}^{6} u_i - 6u_0 = \frac{3h^2}{2!}\Delta u + \frac{9}{4}\frac{h^4}{4!}\Delta\Delta u + \\ + \frac{h^6}{6!}\left(\frac{33}{16}u_{x^6} + 15\cdot\frac{3}{16}u_{x^4y^2} + 15\cdot\frac{9}{16}u_{x^2y^4} + \frac{27}{16}u_{y^6}\right) + \ldots,$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{6} u_i - 6u_0\right) = \Delta u + \frac{1}{16}h^2\Delta^2 u + R_0,\\ &R_0 = \frac{h^4}{17280}(33u_{x^6} + 45u_{x^4y^2} + 135u_{x^2y^4} + 27u_{y^6}) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Если разлагать разности $u_i - u_0$ значений функции u по формуле Тэйлора с остаточным членом, вычисляя значения производных до пятого порядка включительно в точке x, y, а производные шестого порядка — в некоторой средней точке стороны треугольника, соединяющего узлы O и i, для R_0 получим, как просто можно видеть, оценку вида

$$|R_0| \leqslant \frac{4}{3}\cdot\frac{h^4}{6!}\left[1+2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^6\right]M_6 < \frac{7h^4}{270}M_6. \tag{36}$$

Приложение (35) к построению уравнения в конечных разностях, заменяющего приближенно уравнения Лапласа и Пуассона, мы дадим ниже, в n° 2 § 2.

Обратимся теперь к шестиугольной сетке. Возьмем узловую точку, помеченную на рис. 6 номером 0, и три соседних точки 1, 2, 3. Если h есть длина стороны шестиугольника, то координаты их есть

$$\left(x+\frac{1}{2}h,\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$
$$(x-h,\ y),$$
$$\left(x+\frac{1}{2}h,\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right).$$

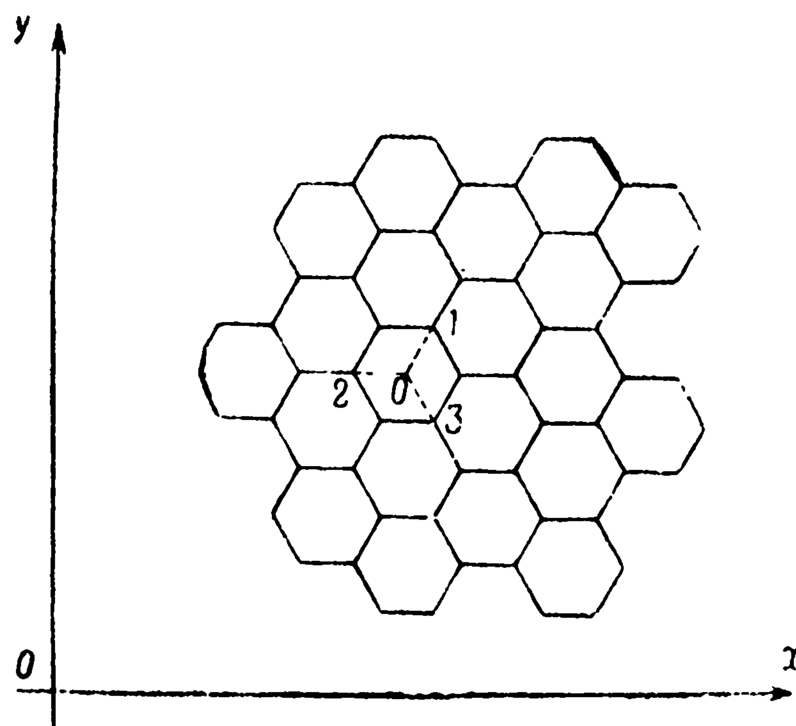


Рис. 6.

Для разностей значений функции u в узлах будем иметь:

$$u_1-u_0 = h\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + {}$$
$$+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\ldots,$$
$$u_2-u_0 = -hu_x+\frac{h^2}{2!}u_{x^2}-\frac{h^3}{3!}u_{x^3}+\ldots,$$
$$u_3-u_0 = h\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + {}$$
$$+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u+\ldots$$

После сложения этих равенств получим:

$$\sum_{i=1}^{3} u_i - 3u_0 = \frac{3}{2}\frac{h^2}{2!}\Delta u - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{3}{4}u_{x^3}-\frac{9}{4}u_{xy^2}\right)+\ldots$$

Отсюда

$$\frac{4}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i - 3u_0\right) = \Delta u + R_0; \quad R_0 = -\frac{h}{18}(3u_{x^3}-9u_{xy^2})+\ldots \tag{37}$$

Если бы мы выписанные выше разности значений функции представляли по формуле Тэйлора с остаточным членом, ограничиваясь тремя членами правой части равенства, то, после замены всех частных производных третьего порядка их максимальным значением M_3 в рассматриваемой области, для остатка R_0 формулы (37) мы получили бы следующее представление:

$$|R_0| = \frac{2h}{9}\left[1 + 2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]\vartheta M_3 < 1{,}36hM_3. \tag{38}$$

Мы закончим этот номер получением приближенного выражения для бигармонической операции. Так же как для операции Лапласа, для нее можно построить приближенные выражения через значения функции в узлах сетки различной точности, в зависимости от числа узлов, привлекаемых к построению этого выражения. Среди всех возможных выражений такого рода мы рассмотрим простейшее и наименее точное из них. Читателя, пожелавшего ознакомиться с более точными выражениями, мы отсылаем к сочинению Коллатца [1].

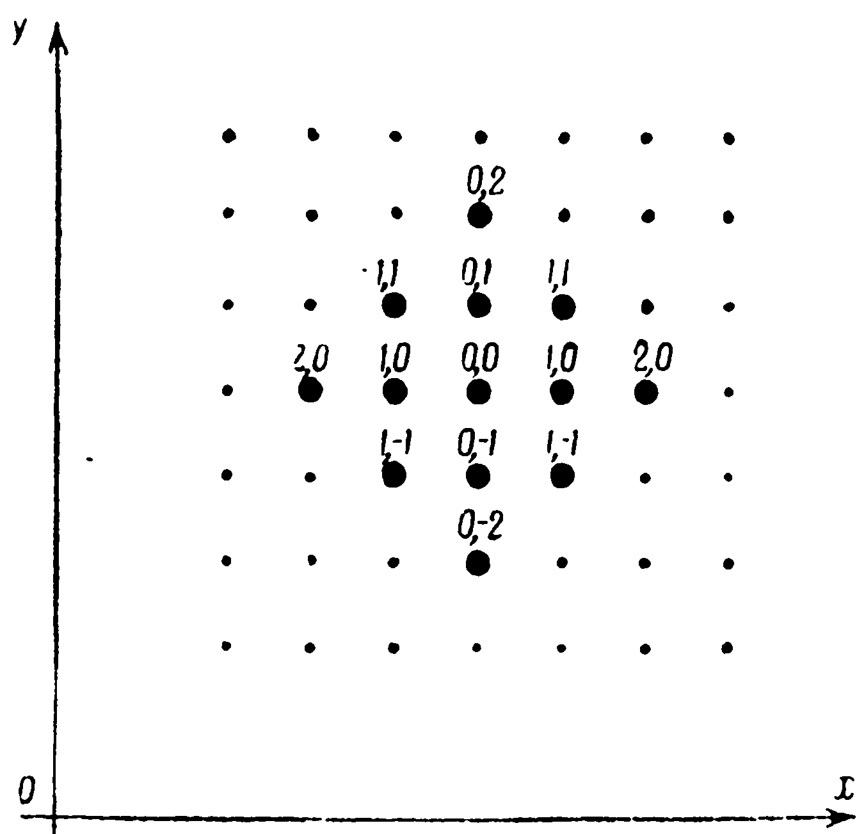


Рис. 7.

Пусть в плоскости построена квадратная сетка со стороной h. Возьмем какой-либо узел сетки. На рис. 7 мы пометили его номерами $(0, 0)$. Наряду с ним рассмотрим 12 ближайших к нему узлов, помеченных на чертеже жирными точками. Образуем разности $u_{i,k} - u_{0,0}$ между значениями функции u в этих 12 узлах и значением ее в $(0, 0)$. Из соображений симметрии мы возьмем не сами разности, а следующие их суммы:

$$\diamond\, u_{0,0} = u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1} - 4u_{0,0},$$

$$\square\, u_{0,0} = u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1} + u_{1,-1} - 4_{0,0},$$

$$\diamond'\, u_{0,0} = u_{2,0} + u_{0,2} + u_{-2,0} + u_{0,-2} - 4u_{0,0}.$$

Разложим каждую из разностей $u_{i,k} - u_{0,0}$ по степеням h, пользуясь формулой Тэйлора, и внесем их выражения в наши комбинации. Выше,

в равенствах (27) и (31) мы указали, какой вид примут $\diamond u_{0,0}$ и $\square u_{0,0}$ после подстановки:

$$\diamond u_{0,0} = 2\left[\frac{h^2}{2!}(u_{x^2}+u_{y^2})+\frac{h^4}{4!}(u_{x^4}+u_{y^4})+\frac{h^6}{6!}(u_{x^6}+u_{y^6})+\ldots\right]$$

$$\square u_{0,0} = 4\left[\frac{h^2}{2!}(u_{x^2}+u_{y^2})+\frac{h^4}{4!}(u_{x^4}+6u_{x^2y^2}+u_{y^4})+\right.$$
$$\left.+\frac{h^6}{6!}(u_{x^6}+15u_{x^4y^2}+15u_{x^2y^4}+u_{y^6})+\ldots\right].$$

Что же касается разложения $\diamond' u_{0,0}$, то оно получится из разложения $\diamond u_{0,0}$, если в нем заменить h на $2h$:

$$\diamond' u_{0,0} = 2\left[\frac{4h^2}{2!}(u_{x^2}+u_{y^2})+\frac{16h^4}{4!}(u_{x^4}+u_{y^4})+\frac{64h^6}{6!}(u_{x^6}+u_{y^6})+\ldots\right].$$

Составим затем линейную комбинацию этих выражений $a\diamond u_{0,0}+ + b\square u_{0,0}+c\diamond' u_{0,0}$ и коэффициенты ее выберем так, чтобы в ней члены с вторыми производными u_{x^2}, u_{y^2}, исчезли, а члены с четвертыми производными образовали бигармоническую операцию $u_{x^4}+ + 2u_{x^2y^2}+u_{y^4}$.

Для этого a, b и c должны удовлетворять следующей системе:

$$2\frac{h^2}{2!}a+4\frac{h^2}{2!}b+2\frac{4h^2}{2!}c=0;$$

$$2\frac{h^4}{4!}a+4\frac{h^4}{4!}b+2\frac{16h^4}{4!}c=1; \quad 4\frac{h^4}{4!}6b=2,$$

решая которую найдем

$$a=-\frac{8}{h^4},\quad b=\frac{2}{h^4},\quad c=\frac{1}{h^4}.$$

Наконец, подставляя в рассматриваемую комбинацию полученные значения a, b и c, придем к следующему равенству:

$$\frac{20u_{0,0}-8(u_{1,0}+u_{0,1}+u_{-1,0}+u_{0,-1})+2(u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}+u_{1,-1})}{h^4}+$$
$$+\frac{(u_{2,0}+u_{0,2}+u_{-2,0}+u_{0-2})}{h^4}=\Delta^2 u+R_{0,0},$$

$$R_{0,0}=\frac{h^2}{6}(u_{x^6}+u_{x^4y^2}+u_{x^2y^4}+u_{y^6})+\ldots \qquad (39)$$

При малых h главную роль в $R_{0,0}$ будет играть первый член его разложения, который мы выписали явно. Отбрасывая все остальные члены и обозначая M_6 наибольшее значение шестых производных в рассматриваемой области, мы получим следующую приближенную оценку остатка:

$$|R_{0,0}|\leqslant\frac{2}{3}h^2M_6.$$

Для получения не приближенной, а верной оценки мы должны были бы при разложении разностей $u_{i,k} - u_{0,0}$ пользоваться не рядом, а формулой Тэйлора с остаточным членом, вычисляя шестые производные не в точке $(0, 0)$, а в некоторых средних точках лучей, соединяющих $(0, 0)$ с узлами (i, k). Затем все производные в остаточных членах надо заменить их максимальным по абсолютной величине значением M_6. Как показывают простые подсчеты, для $R_{0,0}$ тогда получается следующая оценка:

$$|R_{0,0}| \leqslant \frac{10}{9} h^2 M_6. \tag{40}$$

§ 2. Дифференциальные уравнения и соответствующие им уравнения в конечных разностях

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Как в теоретических изысканиях искусство исследователя заключается скорее в постановке новых задач, так в прикладных вопросах меньше искусства требуется для производства вычислений, чем для предварительного изучения задачи и приведения ее к виду, наиболее удобному для самих вычислений. Возможности упрощения задачи, однако, так многочисленны и столь разнообразны, что их невозможно хотя бы в какой-либо мере полно изложить на том небольшом числе страниц, которые мы имеем в своем распоряжении. Кроме того, подробное перечисление способов упрощения было бы в значительной мере и бесполезно, так как многие из них основаны на очень простых фактах и легко могут быть замечены большинством внимательных и достаточно опытных вычислителей.

Поэтому при изучении метода сеток мы будем излагать только основные идеи замены дифференциальных уравнений уравнениями в конечных разностях и выясним их на наиболее простых задачах.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$L(y) = y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого $p(x)$, $q(x)$ и свободный член $f(x)$ мы будем считать непрерывными в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть нужно будет найти решение уравнения в этом интервале, удовлетворяющее на концах его одному из следующих граничных условий:

$$y(a) = \alpha; \qquad y(b) = \beta \tag{2_1}$$

или

$$y'(a) - h_1 y(a) = \alpha; \qquad y'(b) + h_2 y(b) = \beta. \tag{2_2}$$

Будем $p(x)$, $q(x)$, h_1, h_2 считать такими, чтобы поставленная задача имела одно и только одно решение.

Разделим интервал (a, b) на N равных частей точками

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \ \ldots, \ x_N = b; \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Взятая нами сетка равноотстоящих точек является самой простой, но, вообще говоря, не наилучшей, и можно привести примеры дифференциальных уравнений, где к существу дела более подходят неравномерные сетки. Заменим теперь в дифференциальном уравнении (1) производные их выражениями через разностные отношения. Выбор этих выражений зависит от степени точности, которую мы хотим получить. Мы разберем сейчас два случая такой замены. Возьмем i-й узел сетки $x_i = a + ih$. При приближенном вычислении второй производной y'' мы должны знать значение y по меньшей мере в трех точках. Возьмем ближайшие к x_i узлы $x_{i-1} = a + (i-1)h$ и $x_{i+1} = a + (i+1)h$ и для вычисления y'' воспользуемся формулой (20_3) предыдущего параграфа. Применительно к нашему случаю она дает

$$\frac{\Delta^2 y_{i-1}}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y'' + \frac{h^2}{12}\vartheta M_4.$$

Для приближенного выражения первой производной мы используем те же три узла сетки. За y' мы можем принять любое из трех следующих выражений: $\frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, $\frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ или (20_1) § 1. Погрешность первых двух из них будет иметь порядок $\frac{h}{2}\vartheta M_2$. Погрешность же последнего есть $\frac{h^2}{2}\vartheta M_3$. Оно точнее обоих предыдущих, и мы поэтому отдаем ему предпочтение:

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} = y' + \frac{h^2}{6}\vartheta M_3.$$

Составим теперь выражение

$$l_i^{(1)}(y) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = \\ = L(y) + R_i^{(1)*}(y), \qquad (3)$$

где

$$R_i^{(1)*}(y) = \frac{h^2}{12}(M_4 + 2PM_3)\vartheta,$$

$$p_i = p(a + ih), \quad q_i = q(a + ih), \quad P = \max_{a \leq x \leq b}|p(x)|, \quad |\vartheta| \leq 1.$$

Если функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению $L(y) = f(x)$, то из предыдущего равенства будет следовать, что она будет удовлетворять и следующему уравнению в конечных разностях:

$$l_i^{(1)}(y) = f_i + R_i^{(1)*}(y).$$

Отбросив здесь остаточный член $R_i^{(1)*}(y)$, получим уравнение в конечных разностях, приближенно заменяющее заданное дифференциальное уравнение (1):

$$l_i^{(1)}(y) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i. \qquad (4)$$

Погрешность $R_i^{(1)*}(y)$ этого приближенного уравнения имеет оценку

$$|R_i^{(1)*}(y)| \leqslant \frac{h^2}{12}(M_4 + 2PM_3). \qquad (5)$$

Уравнение (4) должно быть выполнено во всех внутренних точках нашей сетки.

Рассмотрим теперь граничные точки сетки a и b. Если условия на концах промежутка имеют форму (2_1), то значения y_0, y_N функции y в первой и последней точках сетки являются заданными и никаких уравнений в самих граничных точках составлять не нужно. Когда же условия на концах промежутка имеют форму (2_2), то значения y в точках a и b неизвестны и для определения их мы должны составить уравнения, имеющие такую же погрешность, как и (4), и приближенно заменяющие граничные условия (2_2). Возьмем первое из них. В него входит $y'(a)$. Для приближенного выражения его через значения функции в узлах сетки мы, как и для внутренних узлов сетки, возьмем три точки: a, $a+h$, $a+2h$. Разница будет заключаться в том, что для внутренних узлов мы брали две дополнительные точки, одна из которых лежит справа и другая слева от взятого узла. Для точки же a обе дополнительные точки $a+h$ и $a+2h$ будут лежать справа от рассматриваемого узла. Сообразно с этим при приближенном вычислении производных мы должны воспользоваться не формулой Стирлинга, а интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед.

По первой из формул (18) § 1 при $n=2$ имеем:

$$y'(a) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right) + R_0^{(1)*}(a) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + R_0^{(1)*}(a).$$

Остаточный член $R_0^{(1)*}(a)$ в правой части равенства может быть оценен, если исходить из явного выражения для него, даваемого первым из равенств (17) § 1. В прежних обозначениях он имеет вид $R_3'(x)$. Мы должны положить $n=2$, $a_0=a$, $a_1=a+h$, $a_2=a+2h$. Ввиду того, что $\omega(a)=0$, будет:

$$R_0^{(1)*}(a) = \omega'(a)\left[\sum_{k=0}^{2} \frac{f(a_k)-f(x)}{\omega'(a_k)(a_k-x)}\right]_{x=a}.$$

Если, кроме того, воспользоваться равенством (8_2) § 1 для выражения, стоящего в скобках, и обратить внимание на то, что $\omega'(a)=2h^2$, для остаточного члена получим

$$R_0^{(1)*}(a) = 2h^2\frac{f'''(\xi)}{3!} = \frac{h^2}{3}\vartheta M_3;$$

ϑ имеет тот же смысл, что и раньше.

Внесем в граничное условие $y'(a) - h_1 y(a) = \alpha$ вместо производной приближенное значение ее:

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} - h_1 y_0 = y'(a) - h_1 y(a) - R_0^{(1)*}(a) = \alpha - R_0^{(1)*}(a).$$

Наконец, если отбросить здесь остаток $R_0^{(1)*}(a)$, получим нужное нам уравнение в конечных разностях, приближенно заменяющее первое из условий (2_2):

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} - h_1 y_0 = \alpha. \tag{6_1}$$

Погрешность этого уравнения имеет оценку

$$|R_0^{(1)*}(a)| \leqslant \frac{h^2}{3} M_3. \tag{7_1}$$

Совершенно так же, если в граничном условии (2_2) для правого конца заменить производную $y'(b)$ ее приближенным выражением, которое получается из интерполяционной формулы Ньютона для интерполирования назад и дается первым равенством (19) § 1, мы увидим, что оно примет вид

$$\frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + h_2 y_N = y'(b) + h_2 y(b) - R_N^{(1)*}(b) =$$
$$= \beta - R_N^{(1)*}(b),$$
$$R_N^{(1)*}(b) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi) = \frac{h^2}{3} \vartheta M_3.$$

Когда же мы отбросим остаточный член $R_N^{(1)*}(b)$, то получим необходимое нам приближенное уравнение

$$\frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + h_2 y_N = \beta, \tag{6_2}$$

погрешность которого оценивается следующим неравенством:

$$|R_N^{(1)*}(b)| \leqslant \frac{h^2}{3} M_3. \tag{7_2}$$

Итак, для приближенного разыскивания функции y в узлах сетки мы должны будем решить систему, состоящую из уравнений (4), которые должны быть выполнены во всех внутренних узлах сетки ($i = 1, 2, \ldots, N-1$), когда граничные условия имеют вид (2_1). Когда же граничные условия имеют вид (2_2), к ним должны быть присоединены еще уравнения (6_1) и (6_2) для крайних точек сетки.

Построим теперь более точные уравнения в конечных разностях, чем (4) и (6_1), (6_2). Возьмем i-й узел и при вычислении $y''(x)$ в этой точке используем значения y не в трех точках, как это мы сейчас

делали, а в пяти: $a+(i-2)h$, $a+(i-1)h$, $a+ih$, $a+(i+1)h$, $a+(i+2)h$.

По формуле (20_4) § 1

$$\frac{-(y_{i+2}+y_{i-2})+16(y_{i+1}+y_{i-1})-30y_i}{12h^2}=y''+\frac{h^4}{54}\vartheta M_6.$$

Для вычисления первой производной по значениям функции в тех же узлах интерполяции мы воспользуемся равенством (20_2) § 1

$$\frac{-y_{i+2}+8y_{i+1}-8y_{i-1}+y_{i-2}}{12h}=y'+\frac{h^4}{30}M_5\vartheta.$$

Составим выражение

$$l_i^{(2)}(y)=\frac{-(y_{i+2}+y_{i-2})+16(y_{i+1}+y_{i-1})-30y_i}{12h^2}+$$
$$+p_i\frac{-y_{i+2}+8y_{i+1}-8y_{i-1}+y_{i-2}}{12h}+q_iy_i=L(y)+R_i^{(2)*}(y),$$

где

$$R_i^{(2)*}(y)=\frac{h^4}{6}\vartheta\left[\frac{1}{9}M_6+\frac{1}{5}PM_5\right].$$

Когда функция y удовлетворяет заданному уравнению $L(y)=f(x)$, отсюда видно, что она будет удовлетворять следующему уравнению в конечных разностях:

$$l_i^{(2)}(y)=f_i+R_i^{(2)*}(y).$$

Если отбросим здесь остаточный член $R_i^{(2)*}(y)$, мы получим уравнение в конечных разностях, приближенно заменяющее дифференциальное уравнение (1):

$$l_i^{(2)}(y)=\frac{-(y_{i+2}+y_{i-2})+16(y_{i+1}+y_{i-1})-30y_i}{12h^2}+$$
$$+p_i\frac{-y_{i+2}+8y_{i+1}-8y_{i-1}+y_{i-2}}{12h}+q_iy_i=f_i, \qquad (8)$$

погрешность которого оценивается так:

$$|R_i^{(2)*}(y)|\leqslant\frac{h^4}{6}\left(\frac{1}{9}M_6+\frac{1}{5}PM_5\right). \qquad (9)$$

Остаточный член здесь имеет четвертый порядок малости сравнительно с h. В предыдущем же случае, когда мы использовали при приближенном вычислении производных только три точки, погрешность уравнения (4) была второго порядка малости [см. (5)].

Уравнение (8) должно быть выполнено во всех внутренних узлах промежутка, за исключением $a+h$ и $b-h$. В этих точках, так же как и в граничных точках a и b, оно должно быть заменено другими, имеющими погрешность приблизительно такого же порядка.

Рассмотрим точку $a+h$. Присоединим к ней еще 4 ближайших узла a, $a+2h$, $a+3h$, $a+4h$ и найдем выражения первой и второй производных при $x=a+h$ через значения самой функции в этих пяти точках. При вычислениях воспользуемся формулой Ньютона (10) § 1 для интерполирования вперед. Если составим ее для $n=4$, вычислим от нее первую производную и положим там $x=a+h$, то после несложных выкладок найдем:

$$y'(a+h)=\frac{y_4-6y_3+18y_2-10y_1-3y_0}{12h}+R_5'(a+h).$$

Остаточный член в этом равенстве может быть оценен, если исходить из его общего выражения (17) § 1 таким же путем, как это мы делали при оценке остаточных членов в выражениях (20) § 1 для производных, получаемых из формулы Стирлинга. Если в первом из равенств (17) § 1 положить $x=a+h$ и принять во внимание, что при всех значениях x по (8_2) § 1

$$\sum_{k=0}^{4}\frac{f(a_k)-f(x)}{\omega'(a_k)(a_k-x)}=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\qquad (a_k=a+kh)$$

и

$$\omega(a+h)=0;\quad \omega'(a+h)=-6h^4,$$

для $R_5'(a+h)$ получим следующее значение:

$$R_5'(a+h)=-\frac{6h^4}{5!}f^{(5)}(\xi)=\frac{h^4}{20}\vartheta M_5.$$

Порядок остатка в выражении первой производной такой же, как и для точек $a+2h, \ldots$ Ухудшение оценки сказалось лишь в том, что вместо численного коэффициента $\frac{1}{30}$ в прежней оценке мы получим здесь $\frac{1}{20}$.

Немного сложнее вычисляется вторая производная. Если произвести вычисление ее с теми же узлами интерполяции a, $a+h, \ldots,$ $a+4h$, то для нее получится приближенное выражение

$$y''(a+h)=\frac{-y_4+4y_3+6y_2-20y_1+11y_0}{12h^2}+R_5''(a+h),$$

причем остаточный член имеет оценку

$$|R_5''(a+h)|\leqslant\frac{h^3}{360}(30M_5+19hM_6).$$

Он будет, вообще говоря, иметь третий порядок малости относительно h, что хуже, чем оценки всех остатков в приближенных выражениях производных, которые мы вычисляли до сих пор, так как все остатки были четвертого порядка малости. Здесь сказалось

несимметрическое расположение точек интерполирования относительно узла $a+h$, где вычислялась производная. Чтобы сделать одинаковым порядок всех без исключения остаточных членов, мы предпочтем привлечь к вычислению производной $y''(a+h)$ еще один узел $a+5h$ и попытаемся повысить этим порядок малости остатка на единицу.

Составим формулу Ньютона (10) для точек $a, a+h, \ldots, a+5h$, вычислим от обеих частей ее вторую производную и в результате положим $x=a+h$. Тогда получим:

$$y''(a+h)=\frac{y_5-6y_4+14y_3-4y_2-15y_1+10y_0}{12h^2}+R_6''(a+h),$$

где

$$R_6''(a+h)=\frac{481h^4}{900}\vartheta M_6.$$

Рассмотрим $L(y)=y''+p(x)y'+q(x)y$ в точке $a+h$. Из полученных нами приближенных выражений $y''(a+h)$ и $y'(a+h)$ видно, что будет иметь место равенство

$$l_1^{(2)}(y)=\frac{y_5-6y_4+14y_3-4y_2-15y_1+10y_0}{12h^2}+$$
$$+p_1\frac{y_4-6y_3+18y_2-10y_1-3y_0}{12h}+q_1y_1=L(y)+R_1^{(2)*}(y), \quad (10)$$

где

$$R_1^{(2)*}(y)=-R_6''(a+h)-p_1R_5'(a+h)=\frac{h^4}{900}\vartheta(481M_6+45PM_5).$$

Если считать, что y удовлетворяет уравнению $L(y)=f(x)$, и отбросить остаточный член в последнем равенстве, получим нижеследующее равенство, заменяющее приближенно заданное дифференциальное уравнение в точке $a+h$:

$$l_1^{(2)}(y)=\frac{y_5-6y_4+14y_3-4y_2-15y_1+10y_0}{12h^2}+$$
$$+p_1\frac{y_4-6y_3+18y_2-10y_1-3y_0}{12h}+q_1y_1=f_1. \quad (11)$$

Погрешность этого уравнения дается вторым равенством (10).

Совершенно так же проводится построение уравнения, аналогичного (11), для точки $b-h$. Если применить, например, формулу (11) § 1 Ньютона для интерполирования назад и при вычислении $y'(b-h)$ воспользоваться узлами $b, b-h, \ldots, b-4h$, а при вычислении $y''(b-h)$ узлами $b, b-h, \ldots, b-5h$, получим уравнение

$$l_{N-1}^{(2)}(y)=\frac{y_{N-5}-6y_{N-4}+14y_{N-3}-4y_{N-2}-15y_{N-1}-10y_N}{12h^2}+$$
$$+p_{N-1}\frac{-y_{N-4}+6y_{N-3}-18y_{N-2}+10y_{N-1}+3y_N}{12h}+$$
$$+q_{N-1}y_{N-1}=f_{N-1}, \quad (12)$$

приближенно заменяющее дифференциальное уравнение (1) в точке $b-h$. Погрешность его $R_{N-1}^{(2)*}(y)$ имеет то же выражение, что и в точке $a+h$:

$$R_{N-1}^{(2)*}(y)=\frac{h^4}{900}\vartheta(481\,M_6+45\,PM_5). \qquad (13)$$

Перейдем к концам промежутка. Если граничные условия имеют форму (2_1), применение их не может вызвать сомнений или вопросов. Мы займемся только граничными условиями вида (2_2).

Возьмем первое из них, относящееся к левому концу a промежутка. Чтобы получить при замене его приближенным уравнением погрешность четвертого порядка малости относительно h, какую мы допускали везде в уравнениях (8), (11) и (12), для определения приближенного выражения $y'(a)$ мы возьмем пять узлов a, $a+h$, ..., $a+4h$ сетки и воспользуемся первым из равенств (18) § 1 при $n=4$:

$$y'(a)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2y_0+\frac{1}{3}\Delta^3y_0-\frac{1}{4}\Delta^4y_0\right]+R_5'(a)=$$
$$=\frac{-3y_4+16y_3-36y_2+48y_1-25y_0}{12h}+R_5'(a).$$

Остаток $R_5'(a)$ легко оценивается на основании его общего выражения (17) § 1. Здесь $\omega(x)=(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-4h)$; $\omega(a)=0$, $\omega'(a)=4!\,h^4$ и так как

$$\sum_{k=0}^{4}\frac{f(a_k)-f(x)}{\omega'(a_k)(a_k-x)}=\frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi),$$

то

$$R_5'(a)=\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi).$$

Если теперь в $y'(a)-h_1y(a)=\alpha$ заменить $y'(a)$ его найденным значением и отбросить остаток $R_5'(a)$, получим граничное условие в такой приближенной форме:

$$\frac{-3y_4+16y_3-36y_2+48y_1-25y_0}{12h}-h_1y_0=\alpha. \qquad (14)$$

Погрешность его имеет оценку

$$\left|R_5'(a)\right|\leqslant\frac{h^4}{5}M_5. \qquad (15)$$

Так же получается приближенное граничное условие в точке b и с такой же оценкой его погрешности:

$$\frac{3y_{N-4}-16y_{N-3}+36y_{N-2}-48y_{N-1}+25y_N}{12h}+h_2y_N=\beta, \quad (16)$$

$$|R_5'(b)|\leqslant\frac{h^4}{5}M_5.$$

Таким образом, наша задача для дифференциального уравнения при предельных условиях (2_1) сведена к решению системы $N-1$ уравнений (8), (11) и (12). Для случая же предельных условий (2_2) к ним должны быть еще добавлены уравнения (14) и (16).

По существу дела, метод сеток является одним из методов сведения задачи дифференциальных уравнений к решению алгебраической системы. В основании его лежат два факта. Само уравнение рассматривается не во всех точках промежутка интегрирования, а лишь в конечном числе их. Последние, как правило, берутся равноотстоящими, что, разумеется, не является обязательным и делается только для простоты вычислений.

Переход от всего промежутка к конечной сетке точек не влечет за собою погрешностей в уравнении, но он лишает возможности точного подсчета производных, так как они не могут быть без погрешности найдены на основании знания только конечного числа значений функции, и заставляет заменять в уравнении производные теми или иными выражениями их через значения функции. Точность самого метода сеток поэтому в первую очередь определяется точностью интерполирования производных, так как именно она обусловливает прежде всего погрешность замены дифференциального уравнения алгебраической системой.

Выше, при выяснении идеи метода сеток, мы пользовались лишь наиболее простыми приближенными представлениями производных через значения функции. Достаточно полный перечень такого рода формул можно найти, например, в статье Ш. Е. Микеладзе [10]; см. также его книгу [11].

Принципиально говоря, можно безгранично уменьшать погрешность уравнения в конечных разностях, которым заменяется заданное дифференциальное уравнение, если брать вместо производных их выражения через значения функции в узлах сетки для все большего и большего числа узлов. Однако сложность этих уравнений быстро возрастает и, вероятно, в большинстве случаев для уточнения результатов вычислений выгоднее будет идти не по пути усложнения уравнений, а по пути уменьшения шага сетки.

2. Уравнения в частных производных эллиптического типа. Так же как и в предыдущем номере, при изложении мы не будем изучать вопрос во всей его общности и полноте и поставим своей задачей описать главные идеи метода на уравнениях частного типа.

Этого достаточно, чтобы понять, каким образом он применяется как в практических вопросах, так и в теоретических исследованиях. Кроме того, мы будем излагать только основные идеи и не станем входить в исследование упрощений, которые могут представиться при решении уравнений различного частного типа. [1])

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, достаточное для наших целей:

$$L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + qu = f(x, y) \qquad (17)$$

$$(A > 0,\ C > 0).$$

Пусть в некоторой области G надо найти решение этого уравнения, удовлетворяющее на границе Γ ее тем или иным требованиям, природа которых нам сейчас не безразлична.

Проведем на плоскости систему прямых, параллельных координатным осям:

$$\left.\begin{array}{llll} x = x_0, & x = x_1, \ldots, & x = x_n, & x_0 < x_1 < \ldots < x_n, \\ y = y_0, & y = y_1, \ldots, & y = y_m, & y_0 < y_1 < \ldots < y_m. \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Они образуют некоторую прямоугольную сетку, вид которой определяется величинами x_i, y_k. Построим замкнутую ломаную линию C, состоящую из сторон и диагоналей прямоугольников сетки, по возможности хорошо подходящую к Γ. Заметим, что вершины ломаной C не обязательно должны лежать внутри G или на Γ. Они могут лежать и вне G. На рис. 8 дан пример построения C для случая, когда кривая Γ — окружность.

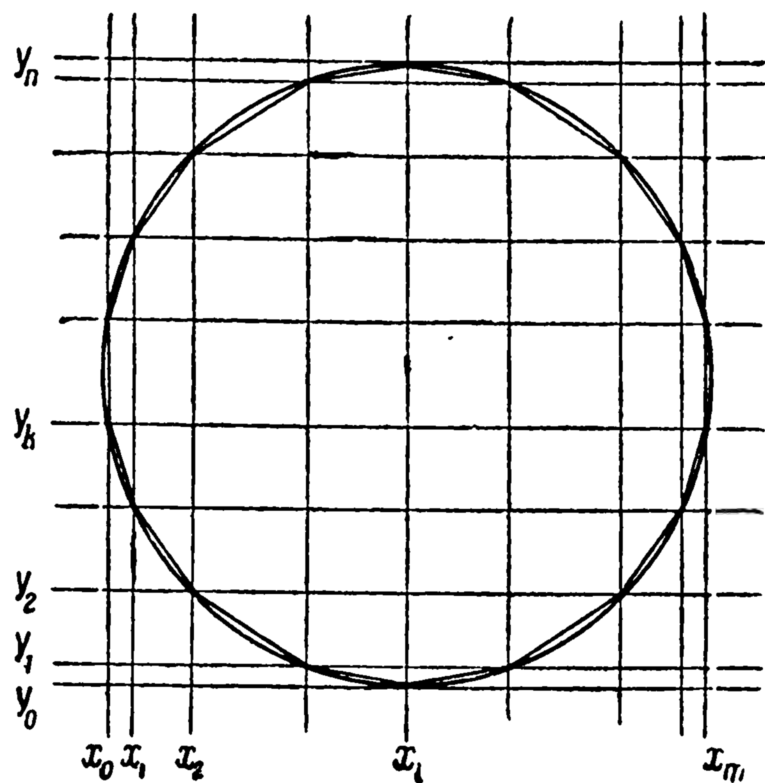


Рис. 8.

Наиболее простой сеткой на плоскости является квадратная, когда узлы делений по обеим осям — равноотстоящие с одним и тем же шагом $x_{i+1} - x_i = h$; $y_{k+1} - y_k = h$.

Уравнение в конечных разностях, которым мы позже будем заменять приближенно дифференциальное уравнение (17), наиболее простую форму будет иметь, вообще говоря, для квадратной сетки. В этом смысле квадратная сетка является предпочтительнее, чем пря-

[1]) Читателей, желающих ознакомиться с некоторыми из упрощений задач для уравнений Лапласа и Пуассона, мы отсылаем к сочинениям Ш. Е. Микеладзе [3] и Шортли и Веллера [1].

моугольная с неравными делениями по осям. Однако применение ее имеет один недостаток, который заставляет нас наряду с квадратной сеткой сохранить и прямоугольную. При замене кривой Г, ограничивающей область G, на ломаную C мы должны будем граничное условие для определяемого решения перенести тем или иным путем с Г на C. Для определенности будем считать, что нам дана наиболее простая из граничных задач — задача Дирихле, когда на Г известны значения самой искомой функции u. При переносе граничных значений u с Г на C, если только не все вершины ломаной C лежат на Г, неизбежна некоторая ошибка. Величина ее будет тем больше, чем дальше C отходит от Г. При этом часто бывает, что порядок малости этой погрешности при сносе бывает ниже порядка малости погрешности, получающейся при замене дифференциального уравнения (17) приближенным уравнением в конечных разностях. Поэтому важно брать такую сетку, чтобы ломаная C, построенная в ней, наилучшим образом подходила бы к Г.

Если контур Г таков, что для него при квадратной сетке можно указать ломаную C, вершины которой либо точно лежат на Г, либо очень близки к Г, то, разумеется, проще всего употреблять квадратную сетку. Если же этого нет, то, для уменьшения погрешности при переносе граничных значений, более выгодным будет, может быть, применение прямоугольной неквадратной сетки, в которой, наверное, можно построить ломаную C, более близкую к Г, чем в квадратной сетке. Это и заставляет нас сохранить в изложении произвольные прямоугольные сетки (18).

Позже, в конце этого номера, мы укажем способ составления уравнений в конечных разностях, который совершенно не требует замены контура Г ломаной C. Если идти тем путем, то, конечно, можно ограничиться применением одних только квадратных сеток. Но к нему мы перейдем несколько позже, а сейчас возвратимся к нашему порядку идей.

Возьмем узел (x_i, y_k) внутри C и четыре ближайших узла, лежащих на прямых $x = x_i$, $y = y_k$. Координаты их есть: (x_{i+1}, y_k), (x_i, y_{k+1}), (x_{i-1}, y_k), (x_i, y_{k-1}). Найдем выражение второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ через значения u во взятых узловых точках.

Воспользуемся выражением производных, получающимся из общей интерполяционной формулы Ньютона, а именно возьмем второе из равенств (15) § 1 и положим там $a_0 = x_i$, $a_1 = x_{i-1}$, $a_2 = x_{i+1}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{\frac{\Delta_x u_{i,k}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} + 2R_3''(x_i) =$$

$$= 2\left[\frac{u_{i+1,k}}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} - \frac{u_{i,k}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} + \frac{u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\right] + 2R_3''(x_i). \tag{19}$$

Определим остаточный член. Применяя к разности $\Delta_x u_{i,k} = u_{i+1,k} - u_{i,k}$ формулу Тэйлора, видим, что разностное отношение $\frac{\Delta_x u_{i,k}}{\Delta x_i}$ имеет, если остановиться на членах с производными до четвертого порядка, следующее выражение:

$$\frac{\Delta_x u_{i,k}}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x_i}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x_i^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x_i^3}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\, i+1;\, k}, \qquad (19_1)$$

где через $\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\, i+1;\, k}$ обозначено значение четвертой производной в некоторой средней точке промежутка (x_i, x_{i+1}). Аналогично для разностного отношения $\frac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}$:

$$\frac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x_{i-1}}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\Delta x_{i-1}^3}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i-1,\, i;\, k}. \qquad (19_2)$$

Если оба написанных выражения для разностных отношений подставить в (19), то для остаточного члена получим:

$$-2R_3''(x_i) = \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{12(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\left[\Delta x_i^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\, i+1;\, k} + \Delta x_{i-1}^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i-1,\, i;\, k}\right].$$

Когда деления по оси OX — равноотстоящие, $\Delta x_i = h$, выражение остаточного члена упрощается, так как в нем тогда пропадает член с третьей производной

$$-2R_3''(x_i) = \frac{h^2}{24}\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,\, i+1;\, k} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i-1,\, i;\, k}\right].$$

Отсюда получается оценка остатка $2R_3''(x_i)$. Если максимальную из величин $|\Delta x_i - \Delta x_{i-1}|$, $|\Delta y_k - \Delta y_{k-1}|$ обозначить ε, а максимальную из величин

$$\frac{\Delta x_i^3}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}, \quad \frac{\Delta x_{i-1}^3}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}, \quad \frac{\Delta y_k^3}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}, \quad \frac{\Delta y_{k-1}^3}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}$$

— через η, то

$$|2R_3''(x_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} M_3 + \frac{\eta}{6} M_4,$$

где M_3 и M_4 — наибольшие значения третьей и четвертой производных от u по x и y в той области, где мы рассматриваем функцию u.

Для случая равноотстоящих делений оценка примет вид:

$$|2R_3''(x_i)| \leqslant \frac{h^2}{12} M_4.$$

Аналогично для второй частной производной по y найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,\frac{\frac{\Delta_y u_{i,k}}{\Delta y_k} - \frac{\Delta_y u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}} + 2R_3''(y_k) =$$

$$= 2\left[\frac{u_{i,k+1}}{\Delta y_k(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} - \frac{u_{i,k}}{\Delta y_k \Delta y_{k-1}} + \frac{u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}\right] + 2R_3''(y_k);$$

$$-2R_3''(y_k) = \frac{\Delta y_k - \Delta y_{k-1}}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{1}{12(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}\left[\Delta y_k^3 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k,\,k+1} + \Delta y_{k-1}^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k-1,\,k}\right]; \qquad (20)$$

$$|2R_3''(y_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} M_3 + \frac{\eta}{6} M_4.$$

В случае же равноотстоящих делений по оси OY, $\Delta y_k = l$,

$$-2R_3''(y_k) = \frac{l^2}{24}\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k,\,k+1} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i;\,k-1,\,k}\right]; \qquad |2R_3''(y_k)| \leqslant \frac{l^2}{12} M_4.$$

Перейдем к составлению приближенных выражений для первых производных. Возьмем первое из равенств (15) § 1 и положим в нем $a_0 = x_i$, $a_1 = x_{i-1}$, $a_2 = x_{i+1}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u(a_0, a_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)\,u(a_0, a_1, a_2) + R_3'(a_0) =$$

$$= \frac{\Delta x_{i-1}\frac{\Delta_x u_{i,k}}{\Delta x_i} + \Delta x_i \frac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} + R_3'(x_i) = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} u_{i+1,k} + \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} u_{i,k} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} u_{i-1,k} + R_3'(x_i). \qquad (21)$$

Для того чтобы получить выражение остаточного члена $R_3'(x_i)$, представим разностные отношения $\frac{\Delta_x u_{i,k}}{\Delta x_i}$ и $\frac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}$ по формуле Тэйлора подобно (19_1) и (19_2), но с тем различием, что остановимся на членах до третьего порядка. Затем подставим в предыдущее равенство вместо разностных отношений их разложения. Простые подсчеты покажут, что

$$R_3'(x_i) = \frac{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}{6(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}\left[\Delta x_i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,\,i+1;\,k} + \Delta x_{i-1}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i-1,\,i;\,k}\right].$$

Отсюда вытекает такая оценка для $R_3'(x_i)$:

$$|R_3(x_i)| \leqslant \frac{\eta}{3} M_3.$$

В случае равных промежутков по оси OX

$$|R_3'(x_i)| \leqslant \frac{h^2}{6} M_3.$$

Для производной в направлении другой координатной оси на тех же основаниях будем иметь следующее значение:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta y_{k-1} \dfrac{\Delta_y u_{i,k}}{\Delta y_k} + \Delta y_k \dfrac{\Delta_y u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}} + R_3'(y_k) = \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta y_k (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} \times$$

$$\times u_{i,k+1} + \frac{\Delta y_k - \Delta y_{k-1}}{\Delta y_k \Delta y_{k-1}} u_{i,k} - \frac{\Delta y_k}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} u_{i,k-1} + R_3'(y_k); \quad (22)$$

$$R_3'(y_k) = \frac{\Delta y_k \Delta y_{k-1}}{6(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} \left[\Delta y_k \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{i;\, k,\, k+1} + \Delta y_{k-1} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{i;\, k-1,\, k} \right];$$

$$|R_3'(y_k)| \leqslant \frac{\eta}{3} M_3.$$

Образуем теперь следующую комбинацию из значений функции u во взятых нами узлах сетки:

$$l_{i,k}(u) = A_{i,k} 2 \frac{\dfrac{\Delta_x u_{i,k}}{\Delta x_i} - \dfrac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} + C_{i,k} 2 \frac{\dfrac{\Delta_y u_{i,k}}{\Delta y_k} - \dfrac{\Delta_y u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}} +$$

$$+ D_{i,k} \frac{\Delta x_{i-1} \dfrac{\Delta_x u_{i,k}}{\Delta x_i} + \Delta x_i \dfrac{\Delta_x u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} +$$

$$+ E_{i,k} \frac{\Delta y_{k-1} \dfrac{\Delta_y u_{i,k}}{\Delta y_k} + \Delta y_k \dfrac{\Delta_y u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}}}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}} + q_{i,k} u_{i,k}. \quad (23)$$

Под $A_{i,k}$, $C_{i,k}$, ... мы понимаем здесь значения коэффициентов A, C, ... уравнения (17) в узле (x_i, y_k) сетки. Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned}
a_{i,k} &= 2\left(\frac{A_{i,k}}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} + \frac{C_{i,k}}{\Delta y_{k-1} \Delta y_k} \right) - \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} D_{i,k} - \\
&\qquad - \frac{\Delta y_k - \Delta y_{k-1}}{\Delta y_k \Delta y_{k-1}} E_{i,k} - q_{i,k}, \\
b_{i,k}^{(1)} &= 2 \frac{A_{i,k}}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} D_{i,k}, \\
b_{i,k}^{(2)} &= 2 \frac{C_{i,k}}{\Delta y_k (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} + \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta y_k (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} E_{i,k}, \\
b_{i,k}^{(3)} &= 2 \frac{A_{i,k}}{\Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} D_{i,k}, \\
b_{i,k}^{(4)} &= 2 \frac{C_{i,k}}{\Delta y_{k-1} (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} - \frac{\Delta y_k}{\Delta y_{k-1} (\Delta y_k + \Delta y_{k-1})} E_{i,k},
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$l_{i,k}(u)$ можно представить в форме:

$$l_{i,k} = b_{i,k}^{(1)} u_{i+1,k} + b_{i,k}^{(2)} u_{i,k+1} + b_{i,k}^{(3)} u_{i-1,k} + b_{i,k}^{(4)} u_{i,k-1} - a_{i,k} u_{i,k}. \qquad (23_1)$$

Множителями при $A_{i,k}$, $C_{i,k}$, $D_{i,k}$ стоят выражения из конечных разностей, которые входили в равенства (19), (20), (21), (22). Если в $l_{i,k}(u)$ вместо них подставить их значения, найденные оттуда, получим

$$l_{i,k}(u) = L(u) + R_{i,k}(u).$$

При этом

$$R_{i,k}(u) = -A_{i,k} 2R_3''(x_i) - C_{i,k} 2R_3''(y_k) - D_{i,k} R_3'(x_i) - \\ - E_{i,k} R_3'(y_k). \qquad (25)$$

Полученное нами соотношение между дифференциальной операцией $L(u)$ и разностной операцией $l_{i,k}(u)$ и служит для построения разностного уравнения, приближенно заменяющего рассматриваемое дифференциальное уравнение. Допустим, что u удовлетворяет уравнению $L(u) = f$. Тогда она будет удовлетворять и уравнению

$$l_{i,k}(u) = f_{i,k} + R_{i,k}(u). \qquad (26)$$

При малых Δx_i, Δy_k остаточный член $R_{i,k}(u)$ будет, вообще говоря, малой величиной. Отбросив его, получим уравнение в конечных разностях

$$l_{i,k}(u) = f_{i,k}, \qquad (26_1)$$

приближенно заменяющее дифференциальное уравнение (17).

При такой замене мы совершаем погрешность в самом уравнении, равную $R_{i,k}(u)$. Можно ожидать, что малая погрешность в уравнении вызовет малую же погрешность в его решении. Поэтому естественно думать, что решения уравнений (26) и (26_1), удовлетворяющие одному и тому же граничному условию, будут мало отличаться между собой. Насколько верны эти ожидания, мы увидим ниже, когда будем заниматься исследованием сходимости приближений, построенных по методу сеток.

Оценка погрешности $R_{i,k}(u)$ уравнения получается из известных оценок погрешностей $R_3''(x_i)$, $R_3''(y_k)$, входящих в (25), и имеет вид:

$$|R_{i,k}(u)| \leqslant \left[\left(\frac{\varepsilon}{3} M_3 + \frac{\eta}{6} M_4\right)(A_{i,k} + C_{i,k}) + \\ + \frac{\eta}{3} M_3 (|D_{i,k}| + |E_{i,k}|)\right]_{\max}. \qquad (26_2)$$

Уравнение (26_1) значительно упрощается, когда сетка будет квадратной: $\Delta x_i = \Delta y_k = h$. Коэффициенты его будут иметь следующие выражения:

$$a_{i,k} = \frac{2}{h^2}(A_{i,k} + C_{i,k}) - q_{i,k},$$

$$b^{(1)}_{i,k} = \frac{A_{i,k}}{h^2} + \frac{D_{i,k}}{2h}, \quad b^{(2)}_{i,k} = \frac{C_{i,k}}{h^2} + \frac{E_{i,k}}{2h},$$

$$b^{(3)}_{i,k} = \frac{A_{i,k}}{h^2} - \frac{D_{i,k}}{2h}, \quad b^{(4)}_{i,k} = \frac{C_{i,k}}{h^2} - \frac{E_{i,k}}{2h},$$

и уравнение (26_1) примет форму:

$$\left(A_{i,k} + \frac{h}{2}D_{i,k}\right)u_{i+1,k} + \left(C_{i,k} + \frac{h}{2}E_{i,k}\right)u_{i,k+1} + \\ + \left(A_{i,k} - \frac{h}{2}D_{i,k}\right)u_{i-1,k} + \left(C_{i,k} - \frac{h}{2}E_{i,k}\right)u_{i,k-1} - \\ - 2\left(A_{i,k} + C_{i,k} - \frac{h^2}{2}q_{i,k}\right)u_{i,k} = h^2 f_{i,k}. \qquad (26_3)$$

Много бóльшая простота этого уравнения сравнительно с общей формой (26_1) заставляет в практических расчетах отдавать предпочтение квадратным сеткам сравнительно с прямоугольными, даже если их приходится брать с меньшим шагом для того, чтобы столь же точно приблизить ломаную линию C к контуру Γ области G, как и в случае прямоугольной сетки.

Пример. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Здесь $A = C = 1$, $D = E = q = 0$, $a_{i,k} = \frac{2}{\Delta x_{i-1}\,\Delta x_i} + \frac{2}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k}$,

$$b^{(1)}_{i,k} = \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}, \qquad b^{(2)}_{i,k} = \frac{2}{\Delta y_k(\Delta y_{k-1} + \Delta y_k)},$$

$$b^{(3)}_{i,k} = \frac{2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}, \qquad b^{(4)}_{i,k} = \frac{2}{\Delta y_{k-1}(\Delta y_{k-1} + \Delta y_k)}.$$

Уравнение (26) будет иметь форму

$$\frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1,k}}{\Delta x_i} + \frac{u_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}}\right) + \frac{2}{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}\left(\frac{u_{i,k+1}}{\Delta y_k} + \frac{u_{i,k-1}}{\Delta y_{k-1}}\right) - \\ - 2\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}\,\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta y_{k-1}\,\Delta y_k}\right)u_{i,k} = f_{i,k}. \qquad (27)$$

В случае квадратной сетки получим:

$$u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1} - 4u_{i,k} = h^2 f_{i,k}. \qquad (28)$$

Оценка погрешности этого уравнения получится из (26_2), если туда вместо A, C, D, E внести их значения и вместо ε и η — те значения, которые они принимают для квадратной сетки: $\varepsilon=0$, $\eta=\frac{h^2}{2}$;

$$|R_{i,k}(u)|\leqslant\frac{h^2}{6}M_4. \qquad (29)$$

Напомним, что прямоугольные сетки нами рассматривались исключительно из того соображения, что выбором их можно распорядиться так, чтобы ломаная линия C, которой мы заменяем контур Γ, подходила бы к Γ лучше, нежели при квадратной сетке.

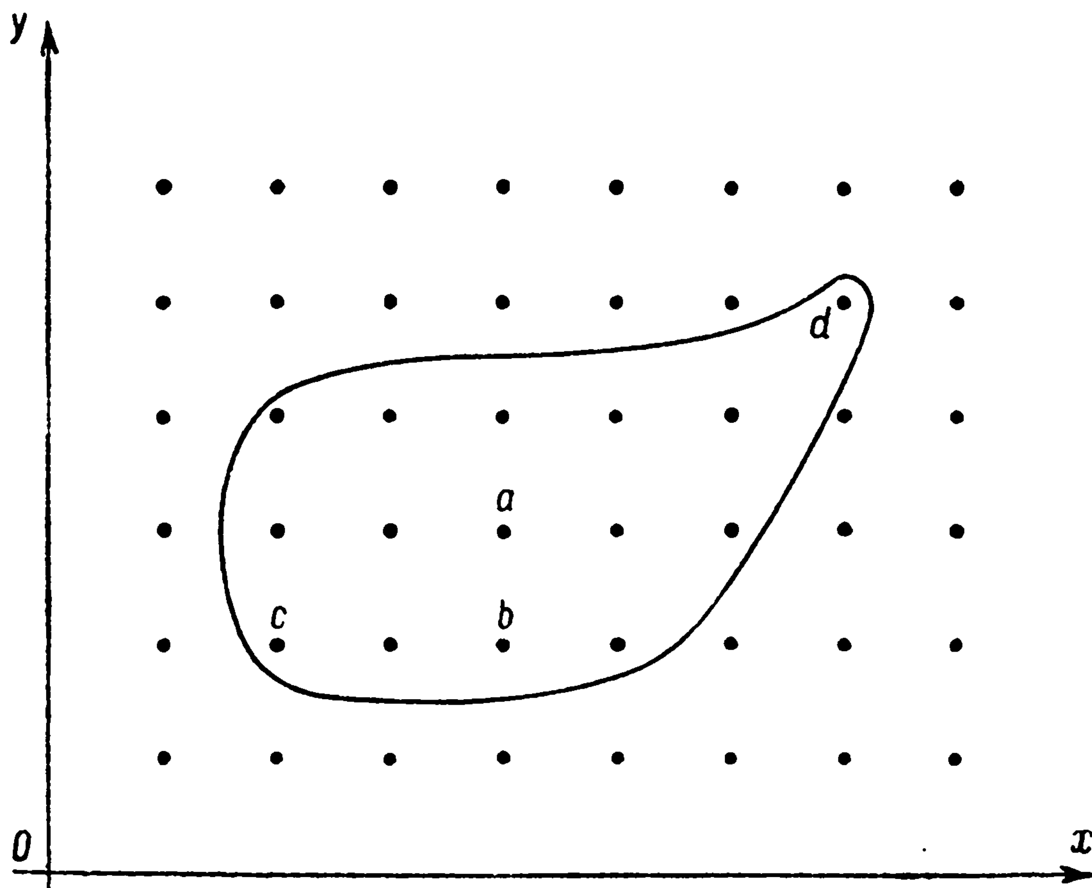


Рис. 9.

Можно совершенно избежать рассмотрения прямоугольных сеток и ограничиться только квадратными сетками, если прибегнуть к следующему приему. Идею его мы выясним на примере простейшей задачи. Возьмем уравнение Лапласа $\Delta u=0$ и рассмотрим проблему Дирихле для него в области G. Построим в плоскости xy квадратную сетку

$$x_i=x_0+ih,\quad y_k=y_0+kh.$$

Отберем узлы сетки, лежащие либо внутри G, либо на границе Γ ее. Значения u в узлах, лежащих на Γ, известны. Значения же ее в узлах сетки, принадлежащих внутренности G, подлежат определению. Для нахождения их мы будем составлять, как выше, уравнение в конечных разностях, приближенно заменяющее уравнение Лапласа, причем для составления приближенного значения производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\left(\text{или } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ в узле (i, k) сетки мы будем привлекать значения u в самом узле (i, k) и двух точках, лежащих на прямой $x=x_i$ (или $y=y_k$),

являющихся либо узлами нашей сетки, либо точками границы Г и соседних с узлом (i, k). Это приведет нас к уравнению либо типа (27), либо типа (28), в зависимости от того, какую внутреннюю точку мы берем. В обоих случаях $f_{i,k}=0$. Рассмотрим составление уравнений более подробно.

Узлы сетки, лежащие внутри Г, мы разделим на две группы. К первой из них отнесем те узлы, для которых все четыре ближайших к ним узла сетки будут лежать либо в G, либо на границе Г. Таким будет, например, узел a на рис. 9. Во всех таких точках мы заменим уравнение Лапласа следующим уравнением между значениями u в узлах:

$$u_{i+1,k}+u_{i,k+1}+u_{i-1,k}+u_{i,k-1}-4u_{i,k}=0. \qquad (30)$$

Ко второй группе мы отнесем все узлы, для которых по крайней мере один из четырех ближайших к нему узлов сетки будет находиться вне Г. Таковы на чертеже точки b, c, d.

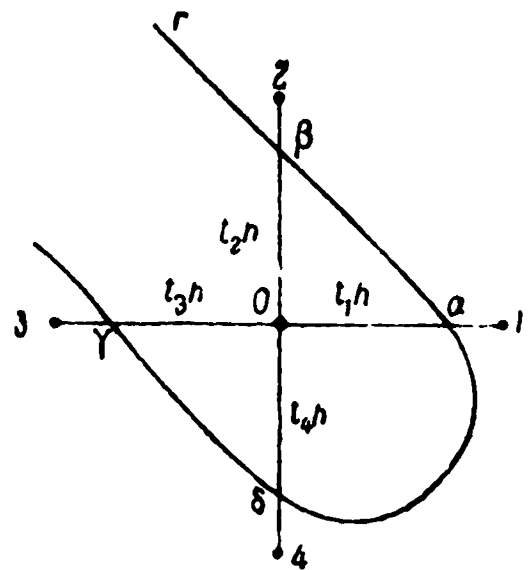


Рис. 10.

Возьмем одну из точек второй группы и обозначим ее номером *0* (рис. 10). Четыре соседние точки сетки обозначим номерами *1*, *2*, *3*, *4*. Часть из них будет лежать вне G. Мы рассмотрим случай, когда все четыре соседние точки лежат вне G. Пусть контур Г пересекает прямые, соединяющие *0* с *1*, *2*, *3*, *4* в точках α, β, γ, δ, расстояния которых до *0* есть соответственно t_1h, t_2h, t_3h, t_4h. Числа t_i положительны и не превосходят единицы.

Рассматриваемый нами случай расположения точек *1*, *2*, *3*, *4* является общим в следующем смысле. Если окажется, что одна из точек, например *1*, будет лежать на Г или внутри G, то этот новый случай получится из рассматриваемого нами при $t_1=1$. То же можно сказать и об остальных точках.

Уравнение в конечных разностях для любого расположения точек *1*, *2*, *3*, *4* может быть получено из построенного нами ниже уравнения (31) при надлежащем выборе значений t_1, t_2, t_3, t_4.

Рассуждения при составлении уравнения в конечных разностях для точки *0* такие же, какие мы проделали при выводе уравнений (26) и (27), а именно для нашего случая $A=C=1$, $D=E=q=$ $=f=0$:

$$\Delta x_i=t_1h, \quad \Delta x_{i-1}=t_3h,$$
$$\Delta y_k=t_2h, \quad \Delta y_{k-1}=t_4h.$$
$$u_{i,k}=u_0; \; u_{i+1,k}=u_1; \; u_{i,k+1}=u_2;$$
$$u_{i-1,k}=u_3; \; u_{i,k-1}=u_4.$$

Поэтому для точки O мы получим уравнение следующего вида, вытекающее из (27), если туда вместо $u_{i,k}, \ldots$ и $\Delta x_i, \ldots$ подставить их значения, выписанные выше, и затем все умножить на $\frac{1}{2}h^2$:

$$\frac{1}{t_1+t_3}\left(\frac{u_1}{t_1}+\frac{u_3}{t_3}\right)+\frac{1}{t_2+t_4}\left(\frac{u_2}{t_2}+\frac{u_4}{t_4}\right)-\left(\frac{1}{t_1 t_3}+\frac{1}{t_2 t_4}\right)u_0=0. \qquad (31)$$

Составляя уравнения типа (30) и (31) для всех узлов внутри G, мы получим систему стольких уравнений, сколько есть неизвестных значений u в этих узлах.

Уравнение (31), конечно, более сложно, чем (30), но пользование им имеет то преимущество, что оно освобождает нас от сноса граничных значений u с Γ на узлы сетки, принадлежащие вспомогательной линии C, заменяющей контур Γ, которую мы должны были бы построить, если бы хотели ограничиться только уравнениями типа (30).

Сейчас мы перейдем к более подробному рассмотрению „конечных уравнений“ для уравнений Пуассона и Лапласа. Наиболее простое из них может быть получено из соотношения (28) § 1.

Образуем в плоскости xy квадратную сетку шага h и построим ломаную линию C, состоящую из сторон и диагоналей квадратов, по возможности близкую к контуру Γ. Возьмем любой узел (i, k), лежащий внутри C. Когда u удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = f(x, y)$, из (28) § 1 следует, что u будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{1}{h^2} \diamond u_{i,k}=\frac{1}{h^2}(u_{i+1,k}+u_{i,k+1}+u_{i-1,k}+u_{i,k-1}-4u_{i,k})=f_{i,k}+R_{i,k}(u).$$

Если отбросить здесь остаточный член, получим уже известное нам уравнение в конечных разностях (28) § 1, приближенно заменяющее уравнение Пуассона $\Delta u = f(x, y)$. Погрешность его имеет оценку (29) § 1.

Более точное уравнение может быть получено на основании соотношения (32) § 1. Если его составить для некоторого узла (i, k) сетки, то в него войдут, кроме значения $u_{i,k}$ функции в самой точке (i, k), также значения и во всех вершинах квадратов, сходящихся в узле (i, k). Поэтому какой-либо узел сеточной „области“ мы будем считать внутренним узлом, если наряду с ним будут принадлежать сеточной „области“ или ее границе также восемь узлов, являющихся вершинами квадратов, сходящихся в рассматриваемом узле. Сообразно с этим мы должны изменить построение кривой C, ограничивающей ту сеточную область, которой мы заменяем G. На сетке мы наметим контур C, идущий только по сторонам квадратов и как можно лучше подходящий к Γ. Возьмем любую точку (i, k) сетки, лежащую вну-

три C. Когда u удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = f$, она будет, как видно из (32) § 1, удовлетворять также уравнению:

$$\frac{1}{6h^2}(4 \diamond u_{i,k} + \square u_{i,k}) = f_{i,k} + \frac{2k^2}{4!}\Delta f_{i,k} + \\ + \frac{2h^4}{6!}\left[\Delta f_{i,k} + 2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{i,k}\right] + R_{i,k}(u).$$

Отбросив здесь остаточный член $R_{i,k}(u)$, получим приближенное уравнение в конечных разностях:

$$\frac{1}{6h^2}(4 \diamond u_{i,k} + \square u_{i,k}) = \frac{u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1}}{6h^2} + \\ + \frac{4(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}) - 20u_{i,k}}{6h^2} = \\ = f_{i,k} + \frac{2h^2}{4!}\Delta f_{i,k} + \frac{2h^4}{6!}\left[\Delta^2 f_{i,k} + 2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{i,k}\right], \quad (32)$$

погрешность которого имеет оценку [см. § 1, (33)]

$$|R_{i,k}(u)| \leqslant \frac{520}{3 \cdot 8!} h^6 M_8.$$

Особенно просто выглядит это приближенное уравнение в случае уравнения Лапласа, когда $f = 0$. Тогда, после умножения (32) на $6h^2$, будем иметь:

$$4 \diamond u_{i,k} + \square u_{i,k} = u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + \\ + 4(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}) - 20u_{i,k} = 0. \quad (33)$$

Уравнение (32) по своему строению немногим сложнее, чем (28), но обладает значительно большей точностью, так как остаточный член его будет малой величиной шестого порядка относительно h, тогда как остаточный член (28) имеет всего второй порядок малости.

В том случае, когда свободный член $f(x, y)$ уравнения Пуассона задан таблично или вычисление производных от него представляет по какой-либо причине затруднения, уравнение (32) становится неудобным и вместо него можно пользоваться уравнением (34) § 1, которое менее точно, чем (32), так как погрешность его четвертого порядка малости относительно h, а не шестого, как у (32), но имеет по сравнению с (32) то преимущество, что оно не содержит производных от $f(x, y)$ и требует знания f только в узлах сетки. Разумеется, можно построить уравнение, требующее, как и (34) § 1, знания только самой функции f в узлах сетки, погрешность которых будет того же порядка, что и (32). Мы не останавливаемся на этом, так как не преследуем цели построения всех типов уравнений, которые могут встретиться в практических приложениях.

Обратимся сейчас к другим правильным сеткам на плоскости. Допустим, что в плоскости построена треугольная сетка шага h.

В § 1 мы установили, что для всякой функции u, имеющей непрерывные производные до шестого порядка, имеет место соотношение (35) § 1 между значениями u в узлах сетки и операцией Лапласа от нее.

В частности, когда u удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = f$, для нее будет выполняться равенство:

$$\frac{2}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{6} u_i - 6u_0\right) = f_0 + \frac{1}{16}h^2\Delta f_0 + R_0(u). \qquad (34)$$

Остаток $R_0(u)$, являющийся погрешностью уравнения, получающегося из (34), если в нем отбросить $R_0(u)$, имеет следующую оценку [см. (36) § 1]:

$$|R_0(u)| \leqslant \frac{7h^4}{270} M_6.$$

Для гармонических функций, ввиду $f(x, y) = 0$, (34) упрощается и принимает вид

$$\sum_{i=1}^{6} u_i - 6u_0 = 0. \qquad (35)$$

Наконец, когда сетка образована правильными шестиугольниками, для всякой функции, имеющей непрерывные производные до третьего порядка, выполняется равенство (37) § 1. Для функций же, удовлетворяющих уравнению Пуассона $\Delta u = f$, оно дает

$$\frac{4}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i - 3u_0\right) = f_0 + R_0(u),$$

причем остаточный член, напомним, оценивается следующим образом:

$$|R_0(u)| \leqslant 1{,}36hM_3.$$

Отбросив остаток, получим „конечное уравнение“ вида:

$$\frac{4}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i - 3u_0\right) = f_0. \qquad (36)$$

Погрешность этого уравнения первого порядка малости сравнительно с h. Ввиду малой точности уравнения, оно вряд ли будет иметь большое практическое значение.

3. Граничные условия для уравнений в конечных разностях. Наиболее простым случаем будет тот, когда на Γ заданы граничные значения функции $u(x, y)$:

$$u|_\Gamma = \varphi(x, y).$$

Эти значения должны быть тем или иным способом снесены на контур C и приняты за предельные значения для u_{ik}. Наиболее естественным будет сносить предельные значения с Γ на граничные узлы сетки по кратчайшему расстоянию. Часто снос производят вдоль прямых, параллельных координатным осям. Полученные в результате такого сноса граничные значения для u_{ik} вообще не будут совпадать с действительными значениями, которые принимает функция $u(x, y)$ в граничных узлах.

Вычислитель, имеющий навык в решении такого рода задач, часто может приближенно указать, судя по граничным значениям, те поправки, которые нужно придать к сносимым величинам, чтобы в результате получить величины, более близкие к действительным значениям искомой функции в граничных узлах.

Грубый способ определения той части погрешности, которая происходит от ошибки в предельных условиях, дан нами ниже, в § 4.

Исправления ошибок r_{ik} можно производить, например, следующим способом. После нахождения u_{ik} во всех узлах сетки экстраполируют u_{ik} в те точки контура Γ, из которых были снесены значения на C, и по величине отклонения полученных значений от φ судят о величине погрешности.

Если полученные результаты неудовлетворительны по своей точности, то составляют обычным путем уравнение для погрешности r_{ik}. Граничные значения ее мы приближенно знаем. Из уравнения находят поправки, которые необходимо внести в прежний результат.

За уравнения, из которых должны быть найдены эти поправки r_{ik}, можно, очевидно, принять однородные уравнения, отвечающие изучаемым уравнениям в конечных разностях (26), (28), (32), (34) и (36), получающиеся из них путем отбрасывания свободных членов.

Более сложным является тот случай, когда мы имеем дело с задачей Неймана, т. е. когда заданы на границе предельные значения не самой функции, а нормальной производной от нее:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi,$$

или с более общей предельной задачей с предельными условиями вида:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \psi u \,|_{\Gamma} = \varphi.$$

В этом случае снесены должны быть с Γ на C не только значения u, но и значения нормальной производной.

Рассмотрим одну из граничных точек, отмеченную на рис. 11 номером 0, и две соседние с ней точки сетки 1 и 2. Будут ли последние граничными, или нет — для нас безразлично; мы будем требовать лишь, чтобы направления (l_1) и (l_2) не были параллельными. Обозначим углы, которые образуют (l_1), (l_2) и (n) с осью x, через φ_1,

φ_2, φ и направляющие косинусы их будем обозначать соответственно через α_1, β_1; α_2, β_2; α, β, так что

$$\alpha_1 = \cos\varphi_1,\ \beta_1 = \sin\varphi_1,\ \ldots$$

Обозначим l_1 и l_2 расстояния от точки 0 до точек соответственно 1 и 2. Пользуясь формулой Тэйлора, можем написать:

$$\frac{\Delta_1 u}{l_1} = \frac{u_1 - u_0}{l_1} = \frac{u(x + l_1\alpha_1,\ y + l_1\beta_1) - u(x,\ y)}{l_1} = \alpha_1 u_x + \beta_1 u_y + R_1,$$
$$\frac{\Delta_2 u}{l_2} = \frac{u_2 - u_0}{l_2} = \frac{u(x + l_2\alpha_2,\ y + l_2\beta_2) - u(x,\ y)}{l_2} = \alpha_2 u_x + \beta_2 u_y + R_2,$$

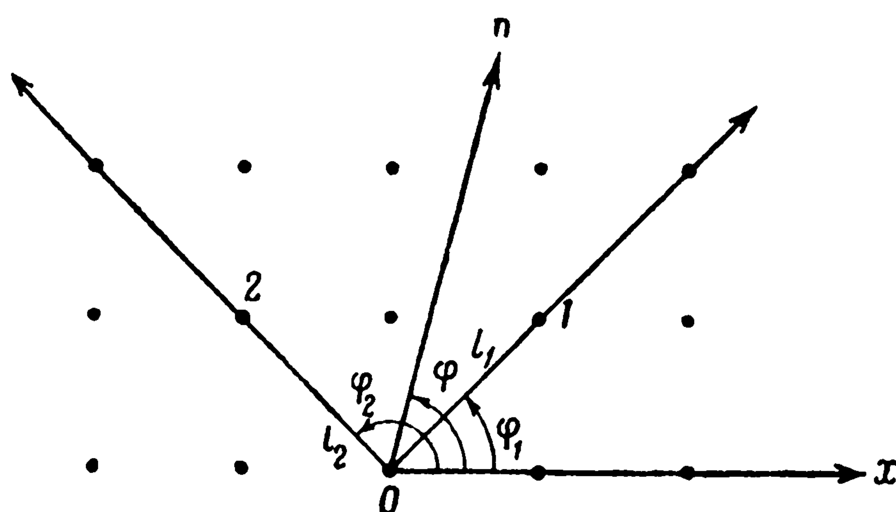


Рис. 11.

где R_1 и R_2 будут бесконечно малые вместе с l_1 и l_2 по крайней мере первого порядка. Отсюда находим u_x и u_y:

$$u_x = \frac{\dfrac{\Delta_1 u - R_1 l_1}{l_1}\beta_2 - \dfrac{\Delta_2 u - R_2 l_2}{l_2}\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1},$$

$$u_y = \frac{\dfrac{\Delta_2 u - R_2 l_2}{l_2}\alpha_1 - \dfrac{\Delta_1 u - R_1 l_1}{l_1}\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}.$$

Поэтому для $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \alpha u_x + \beta u_y$, если заметить, что

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin(l_1,\ l_2),$$
$$\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta = \sin\varphi_2\cos\varphi - \cos\varphi_2\sin\varphi = \sin(\varphi_2 - \varphi) = \sin(n,\ l_2),$$
$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \sin\varphi_1\cos\varphi - \cos\varphi_1\sin\varphi = -\sin(\varphi - \varphi_1) = -\sin(l_1, n),$$

находим:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\sin(l_1,\ l_2)}\left[\frac{\Delta_1 u - R_1 l_1}{l_1}\sin(n,\ l_2) + \frac{\Delta_2 u - R_2 l_2}{l_2}\sin(l_1,\ n)\right].$$

Если отбросить в этом равенстве R_1 и R_2, получим следующее приближенное выражение для $\frac{\partial u}{\partial n}$:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\sin(l_1, l_2)}\left[\frac{u_1 - u_0}{l_1}\sin(n, l_2) + \frac{u_2 - u_0}{l_2}\sin(l_1, n)\right].$$

Отметим некоторые частные случаи.

1. Нормаль n совпадает с одним из избранных нами направлений, например (l_1). Здесь $(l_1, n) = 0$, $(l_1, l_2) = (n, l_2)$, и поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{u_1 - u_0}{l_1}.$$

2. Нормаль n является биссектрисой угла между l_1 и l_2. Тогда $(l_1, n) = (n, l_2) = \frac{(l_1, l_2)}{2}$, и поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{2\cos\frac{(l_1, l_2)}{2}}\left[\frac{u_1 - u_0}{l_1} + \frac{u_2 - u_0}{l_2}\right].$$

3. Если угол (l_1, l_2) прямой, то $(n, l_2) = \frac{\pi}{2} - (l_1, n)$, и поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{u_1 - u_0}{l_1}\cos(l_1, n) + \frac{u_2 - u_0}{l_2}\sin(l_1, n).$$

4. Уравнение $\Delta^2 u = f(x, y)$. [1]) Мы остановим еще внимание читателя на приложении метода сеток к решению уравнения в частных производных четвертого порядка:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y). \tag{37}$$

Пусть нужно будет найти в области G решение этого уравнения, удовлетворяющее на границе области некоторым условиям. Для наших рассуждений сейчас вид этих условий не имеет значения, и мы поэтому не будем делать о них никаких предположений.

При построении уравнения в конечных разностях, заменяющего приближенное заданное уравнение, мы ограничимся наиболее простым случаем. Рассмотрим в плоскости xy квадратную сетку шага h, образованную прямыми, параллельными осям координат.

В § 1 мы видели, что если функция $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до шестого порядка, для нее в каждом узле сетки выполняется равенство (39) § 1. Оттуда вытекает, что если u

---

[1]) См. Д. Ю. Панов [4].

удовлетворяет уравнению (37), то

$$\frac{20u_{0,0}-8(u_{1,0}+u_{0,1}+u_{-1,0}+u_{0,-1})+2(u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}+u_{1,-1})}{h^4}+$$
$$+\frac{u_{2,0}+u_{0,2}+u_{-2,0}+u_{0,-2}}{h^4}=f_{0,0}+R_{0,0}(u),$$

причем $R_{0,0}(u)$ имеет оценку (40) § 1.

Отбросив остаточный член $R_{0,0}(u)$, получим уравнение в конечных разностях, приближенно заменяющее дифференциальное уравнение (37):

$$\frac{20u_{0,0}-8(u_{0,0}+u_{0,1}+u_{-1,0}+u_{0,-1})+2(u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1})}{h^4}+$$
$$+\frac{u_{2,0}+u_{0,2}+u_{-2,0}+u_{0,-2}}{h^4}=f_{0,0}. \qquad (38)$$

В это уравнение, наряду с значением $u_{0,0}$ функции в рассматриваемом узле $(0, 0)$, входят также значения ее в двенадцати узлах, отстоящих от $(0, 0)$ не дальше чем на $2h$. Совокупность таких узлов мы кратко назовем $2h$-окрестностью узла $(0, 0)$.

Рис. 12.

Выясним основания приложения (38) к приближенному решению граничных задач для уравнения (37). Построим линию C, по возможности близко подходящую к контуру Γ области G и идущую по сторонам и диагоналям квадратов нашей сетки (рис. 12).

Возьмем все точки сетки, лежащие на C, и присоединим к ним точки сетки, лежащие внутри C и отстоящие от какого-либо из узлов на C не дальше чем на шаг сетки h. На чертеже эти узлы помечены жирными точками. Все они образуют некоторое множество узлов, которое мы назовем граничной полосой. Точки сетки, лежащие внутри C и не принадлежащие граничной полосе, обладают тем свойством, что узлы $2h$-окрестности любой из них будут лежать либо внутри, либо на C. Во всех такого рода точках должно быть выполнено уравнение (38).

Что же касается узлов сетки, принадлежащих граничной полосе, то значения функции u в них либо задаются, либо для них пишутся уравнения, отличные от (38), составляемые на основании граничных условий. Например, пусть на границе Γ области G будут даны значения самой искомой функции u и нормальной производной от нее по внутренней нормали:

$$u|_{\Gamma}=\varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\psi.$$

Мы преобразуем эти граничные условия к удобной для нас форме. Обозначим через s длину дуги Г, отсчитываемую от произвольной начальной точки в каком-либо определенном направлении. По известным значениям u на Г мы найдем значение производной от нее по длине дуги $\frac{\partial u}{\partial s}$. Затем по $\frac{\partial u}{\partial s}$ и $\frac{\partial u}{\partial n}$ определим производные от u по осям координат $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Заданные граничные условия мы можем заменить следующими им равносильными:

$$u|_\Gamma = \varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\Gamma = \alpha, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_\Gamma = \beta,$$

где φ, α и β есть известные функции положения точки на Г. Снесем по какому-либо способу значения φ, α и β с Г на узлы, лежащие на C, и составим аналогичные граничные условия для узлов, принадлежащих C.

Возьмем теперь один из узлов, лежащих внутри C и принадлежащих граничной полосе. Рассмотрим все граничные узлы, отстоящие от него на расстоянии h. Допустим сначала для простоты, что таких узлов только один и он вместе с взятым нами узлом расположен, как *1* и *2* на чертеже. Значение u в *1* известно и равно φ_1. Граничное же условие $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \alpha_1$ мы заменяем приближенным условием $\frac{u_2 - u_1}{h} = \alpha_1$, откуда найдем значение u в узле *2*:

$$u_2 = u_1 + h\alpha_1.$$

Когда же окажется, что на расстоянии h от взятого узла будет лежать несколько граничных узлов, значение в этом узле может быть вычислено несколькими способами.

Найденные значения, ввиду приближенного характера равенств, из которых они находятся, не обязаны совпадать. Тогда за значение u в рассматриваемом узле обычно принимают среднее арифметическое всех найденных значений. Таким, например, будет узел *5* на нашем чертеже.

Рассматривая пару точек *3* и *5*, мы для u_5 найдем значение $u_5 = u_3 - h\beta_3$. Если же мы возьмем пару точек *4* и *5*, то для u_5 найдем $u_5 = u_4 - h\alpha_4$, За u_5 примем среднее арифметическое обоих найденных значений и положим

$$u_5 = \frac{u_3 + u_4 - h(\beta_3 + \alpha_4)}{2}.$$

Идя таким путем, мы найдем значения u во всех точках граничной полосы.

§ 3. Решение уравнений в конечных разностях

1. Существование и единственность решения. В предыдущем параграфе мы построили уравнения в конечных разностях, приближенно заменяющие дифференциальные уравнения и граничные условия. Задачей настоящего параграфа является исследование разрешимости самой системы и изложение некоторых наиболее употребительных способов ее решения.

Существование и единственность решения системы по известной теореме из теории определителей будут установлены, если мы покажем, что соответствующая ей однородная система, получающаяся из рассматриваемой путем отбрасывания в ней всех свободных членов, имеет только нулевое решение. Обычно для этого прибегают к следующему плодотворному приему, являющемуся аналогом использования формул Грина для доказательства единственности решения граничных задач дифференциальных уравнений. По однородной системе составляют квадратичную форму от искомых значений y_i или $u_{i,k}$ функций y и u в узлах сетки, такую, чтобы уравнения системы были условиями экстремума этой квадратичной формы. Затем по квадратичной форме судят о том, при каких значениях y_i или $u_{i,k}$ она будет иметь экстремум. Часто оказывается, что квадратичная форма является определенной положительной или отрицательной и будет иметь, следовательно, единственный экстремум, достигаемый в том случае, когда все аргументы ее равны нулю. Отсюда сразу же следует, что рассматриваемая однородная система имеет только нулевое решение.

Такой порядок идей не всегда применим при наших рассуждениях. Для построения квадратичной формы существенной является симметричность матрицы коэффициентов системы уравнений. Для найденных же нами уравнений, к сожалению, это не всегда будет иметь место. При построении их мы руководствовались не соображениями симметрии коэффициентов, а исходили из более естественного для метода сеток требования о том, чтобы погрешности всех уравнений имели один и тот же порядок малости относительно h.

Чтобы сохранить единообразие метода, мы будем поэтому исходить всюду в исследованиях из самих уравнений, не прибегая к составлению квадратичных форм. [1])

Рассмотрим сначала обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - q(x)y = f(x) \tag{1}$$

при граничных условиях либо

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta, \tag{2$_1$}$$

---

[1]) Для знакомства с аналогами формул Грина см., например, Курант, Фридрихс и Леви [2].

либо

$$y'(a) - h_1 y(a) = \alpha, \quad y'(b) + h_2 y(b) = \beta.^{1)} \tag{2_2}$$

Уравнение в конечных разностях первого приближения (4) § 2 для нашего случая имеет вид:

$$l_i^{(1)}(y) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Граничные условия будут либо

$$y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta,$$

либо, согласно (6_1) и (6_2) § 2,

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} - h_1 y_0 = \alpha, \quad \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + h_2 y_N = \beta.$$

Отбросим свободные члены f_i, α, β и возьмем соответствующую однородную систему:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{3}$$

при граничных условиях

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0 \tag{4_1}$$

или

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} - h_1 y_0 = 0, \quad \frac{3y_N - 4y_N + y_{N-2}}{2h} + h_2 y_N = 0. \tag{4_2}$$

---

[1]) Рассматриваемое нами уравнение (1) есть частный случай более общего уравнения (1) § 2. Однако это общее уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ может быть путем простых преобразований приведено к виду (1). Действительно, произведем в нем замену неизвестной функции y, положив ее равной $y = e^{-\int p(x)\,dx} u$. Тогда уравнение примет форму

$$(P(x)u')' - Q(x)u = f(x),$$

причем

$$P(x) = e^{-\int p(x)\,dx}; \quad Q(x) = [p'(x) - q(x)]\, e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Заменим затем аргумент x, полагая

$$t = \int_a^x \frac{dx}{P(x)}.$$

Предыдущее уравнение преобразуется в следующее:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - Q_1(t)\,u = F(t),$$

где

$$Q_1(t) = Q(x)\,P(x); \quad F(t) = f(x)\,P(x),$$

а это и есть уравнение нужного нам вида.

Покажем сейчас, что если $q_i \geqslant 0$, то системы (3) и (4_1) имеют только нулевое решение.

Построим в плоскости xy ломаную линию с вершинами в точках (a, y_0), $(a+h, y_1)$, ..., $(a+ih, y_i)$, ..., (b, y_N) и выясним геометрический смысл уравнения (3). Для этого возьмем три последовательные вершины ломаной (рис. 13) $P_{i-1}(a+(i-1)h, y_{i-1})$, $P_i(a+ih, y_i)$, $P_{i+1}(a+(i+1)h, y_{i+1})$, построим хорду $P_{i-1}P_{i+1}$ и отметим на ней середину P'_i. Ордината ее есть

$$\frac{y_{i+1}+y_{i-1}}{2} = Q_iP'_i.$$

Представим уравнение (3) в форме

$$y_i = \frac{1}{1+\frac{1}{2}q_ih^2} \cdot \frac{y_{i+1}+y_{i-1}}{2}.$$

Отсюда видно, что ордината y_i точки P_i отличается от ординаты $Q_iP'_i$ положительным множителем $\frac{1}{1+\frac{1}{2}q_ih^2}$, по величине не превосходящим единицу. Уравнение (3) имеет, следовательно, тот геометрический смысл, что каждая вершина P_i ломаной лежит либо на хорде, соединяющей две соседние вершины P_{i-1} и P_{i+1}, либо ближе к оси OX. Часть ломаной, лежащая над OX, обращена вогнутостью в сторону положительных ординат, а часть ее, лежащая под OX, обращена вогнутостью в сторону отрицательных ординат.

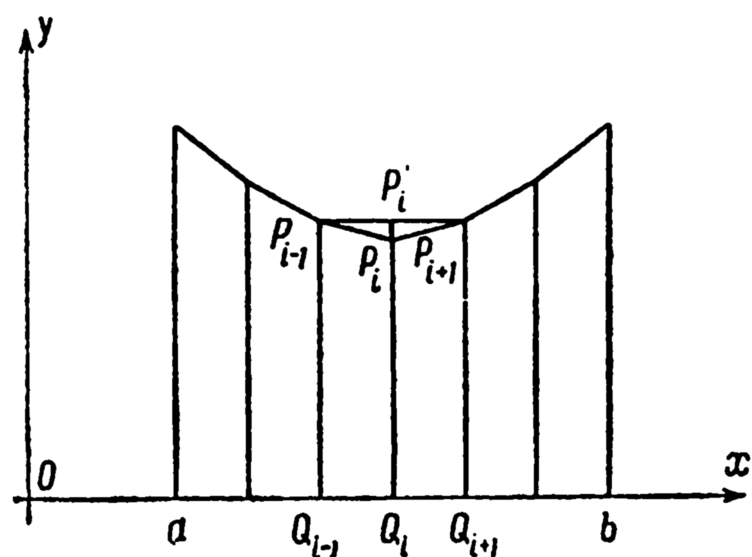


Рис. 13.

Отсюда ясно, что:

1. Ордината ломаной линии может достигать наибольшего положительного значения и наименьшего отрицательного значения только на концах промежутка.

2. Ломаная линия может пересекать ось абсцисс только в одной точке.

Допустим теперь, что наряду с (3) выполняются также уравнения (4_1). Если бы среди чисел $y_1, y_2, \ldots, y_N$ были отличные от нуля, то тогда ордината ломаной линии должна была бы иметь внутри промежутка либо положительный максимум, либо отрицательный минимум, чего не может быть ввиду первого из указанных свойств ломаной. Поэтому должно быть $y_0 = y_1 = \ldots = y_N = 0$.

Перейдем сейчас к граничным условиям (4_2) и докажем, что если $q_i \geqslant 0$, $h_1 \geqslant 0$, $h_2 \geqslant 0$, причем среди этих чисел хоть одно отлично от нуля, то системы (3) и (4_2) имеют только нулевое решение.

Возьмем уравнение для $i=1$ и граничное условие для левого конца промежутка (a, b):

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}-q_1y_1=0; \qquad \frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}-h_1y_0=0.$$

Если отсюда исключить y_2, найдем следующую зависимость между y_0 и y_1:

$$y_1=\frac{1+h_1h}{1-\frac{1}{2}q_1h^2}y_0. \tag{5}$$

Совершенно так же для правого конца промежутка получим

$$y_{N-1}=\frac{1+h_2h}{1-\frac{1}{2}q_{N-1}h^2}y_N. \tag{6}$$

Допустим теперь, что не все числа $y_0, y_1, \ldots, y_N$ равны нулю. Тогда среди них должно быть либо положительное наибольшее, либо отрицательное наименьшее, причем каждое из них может совпадать только либо с y_0, либо с y_N. Предположим, например, что y_0 будет положительным и наибольшим из чисел y_i.

Сличим неравенство $y_1 \leqslant y_0$ с (5). Ввиду $h_1 \geqslant 0$, $q_1 \geqslant 0$, совместными они могут быть только в двух случаях: а) либо когда $h_1=q_1=0$ и, следовательно, $y_1=y_0$; б) либо когда $\frac{1}{2}q_1h^2>1$ и, следовательно, y_0 и y_1 разных знаков.

Случай а) геометрически означает, что первое звено ломаной идет параллельно оси OX. Выше мы говорили о том, что над осью OX ломаная должна быть обращена вогнутостью в сторону положительных ординат. Значит, после первого звена она может идти либо параллельно оси OX, либо подниматься вверх от OX. Так как $y_0 \geqslant y_i$, вторая возможность исключена, и поэтому должно быть $y_0=y_1=\ldots=y_N$. Но тогда из уравнений (3) и (4_2) следует, что должно быть $h_1=0$, $q_i=0$, $h_2=0$. Если же хоть одно из этих чисел отлично от нуля, то должны быть равны нулю все y_i, и однородная система, стало быть, имеет только нулевое решение.

Случай б) практически менее интересен, ибо он имеет место только при h достаточно больших. Так как y_1 здесь отрицательно, а $y_0>0$, то ломаная линия между a и $a+h$ пересекает ось OX. Ввиду второго свойства, справа от точки $a+h$ она должна лежать целиком под осью OX: $y_i<0$ $(i=1, 2, \ldots, N)$. В частности, отсюда вытекает, что числа y_{N-1} и y_N отрицательны. Кроме того, y_N должно

быть меньшим из них. Но это, как сразу же видно, несовместимо с (6). Предположение $y_0 > 0$ приводит здесь к противоречию. Среди y_i не может быть положительного наибольшего. По совершенно такой же причине среди них не может быть и отрицательного наименьшего. Отсюда следует, что все y_i должны быть равны нулю.

Рассмотрим теперь уравнение в частных производных (17) § 2 и для определенности будем считать, что для него решается задача Дирихле при граничном условии

$$u|_\Gamma = \varphi(x, y).$$

В n° 2 § 2 мы построили для него уравнение в конечных разностях (26_1) первого приближения.

Граничные значения u заданы на Г. Снеся их каким-либо способом с Г на узлы контура C сеточной области, мы получим для $u_{i,k}$ граничные значения:

$$u_{i,k}|_C = \varphi|_C.$$

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (26_1) § 2 при этом граничном условии нам нужно показать, что соответствующая однородная система

$$\begin{aligned} l_{i,k}(u) = b_{i,k}^{(1)} u_{i+1,k} + b_{i,k}^{(2)} u_{i,k+1} + b_{i,k}^{(3)} u_{i-1,k} + \\ + b_{i,k}^{(4)} u_{i,k-1} - a_{i,k} u_{i,k} = 0, \\ u_{i,k}|_C = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

имеет только нулевое решение. Значения коэффициентов $b_{i,k}^{(s)}$ и $a_{i,k}$ даются равенствами (24) § 2.

Выведем сначала одно следствие из уравнения $l_{i,k}(u) = 0$ для величин $u_{i,k}$. Оно будет верным для любых граничных условий и является полезным при исследовании единственности решения не только в задаче Дирихле, но и в задачах с другими граничными условиями.

Если $q_{i,k} \leqslant 0$, а числа Δx_i, Δy_i, равные расстояниям между параллельными прямыми сетки, настолько малы, что для всяких i и k выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} |\Delta x_i D_{i,k}| \leqslant 2A_{i,k}, \quad |\Delta x_{i-1} D_{i,k}| \leqslant 2A_{i,k}, \\ |\Delta y_k E_{i,k}| \leqslant 2C_{i,k}, \quad |\Delta y_{k-1} E_{i,k}| \leqslant 2C_{i,k}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

то решение $l_{i,k}(u) = 0$ не может иметь внутри сеточной области ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Исключением является тривиальный случай, когда $u_{i,k}$ равны постоянной.

Случай отрицательного минимума сводится к случаю положительного максимума, если обе части уравнения $l_{i,k}(u)=0$ умножить на -1, и мы его отдельно рассматривать не будем.

Пусть $u_{i,k}$ не постоянны и достигают положительного максимума внутри области. Назовем его M. Можно указать внутреннюю точку сетки, для которой $u_{i,k}=M$, тогда как по крайней мере в одной из соседних точек значение $u_{i,k}$ будет меньше, чем M. Покажем, что в такой точке уравнение $l_{i,k}(u)=0$ не может выполняться.

При предположениях (8) все коэффициенты $b_{i,k}^{(j)}$ будут неотрицательны, что видно из их выражений (24) § 2. Путем сложения этих равенств можно проверить, что $b_{i,k}^{(1)}+b_{i,k}^{(2)}+b_{i,k}^{(3)}+b_{i,k}^{(4)}=a_{i,k}+q_{i,k}$.

Заменим в выражении $b_{i,k}^{(1)}u_{i+1,k}+b_{i,k}^{(2)}u_{i,k+1}+b_{i,k}^{(3)}u_{i-1,k}+$ $+b_{i,k}^{(4)}u_{i,k-1}$ значения $u_{i+1,k}$, $u_{i,k+1}$, $u_{i-1,k}$, $u_{i,k-1}$ на M. Так как хоть одно из этих значений меньше, чем M, в результате замены мы получим выражение $M(b_{i,k}^{(1)}+b_{i,k}^{(2)}+b_{i,k}^{(3)}+b_{i,k}^{(4)})=M(a_{i,k}+q_{i,k})$, большее исходного. Отсюда, ввиду $q_{i,k}\leqslant 0$, следует:

$$b_{i,k}^{(1)}u_{i+1,k}+b_{i,k}^{(2)}u_{i,k+1}+b_{i,k}^{(3)}u_{i-1,k}+$$
$$+b_{i,k}^{(4)}u_{i,k-1}<M(a_{i,k}+q_{i,k})\leqslant Ma_{i,k},$$

а это противоречит уравнению $l_{i,k}(u)=0$.

После того как этот результат установлен, наличие у системы (7) одного только нулевого решения доказывается без затруднений. В самом деле, если бы среди $u_{i,k}$ хоть одно было отлично от нуля, то $u_{i,k}$ достигала бы на границе C области либо положительного наибольшего, либо отрицательного наименьшего значения, чего не может быть, так как значения $u_{i,k}$ на границе C равны нулю.

Такими же рассуждениями можно доказать существование и единственность решения задачи с заданными граничными значениями u для уравнений (30), (32), (34), (36) § 2.

2. Два метода решения уравнений в конечных разностях. Примеры. К решению уравнений в конечных разностях, которыми мы заменяли приближенно дифференциальные уравнения, может быть применен любой из известных способов решения систем линейных уравнений. Мы остановимся только на двух из них, наиболее часто применяемых.[1])

А. *Метод последовательного исключения.*[2]) Идея его вполне может быть выяснена на следующем частном случае, которым мы ограничимся для простоты. Возьмем уравнение (26_1) § 2; допустим,

---

[1]) В случае уравнения Лапласа для ряда конкретных областей решение в сетке точек внутри области можно получить с помощью специально предназначенных для этого таблиц Л. В. Канторовича, В. И. Крылова и К. Е. Чернина [1].

[2]) См., например, Рунге [1].

что заданы значения u на границе C сеточной области и C есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (рис. 14). Внутри него при помощи прямых $x=x_i$, $i=0, 1, 2, \ldots, 6$, $y=y_k$, $k=0, 1, \ldots, 4$ построена сетка. Возьмем крайние слева внутренние точки сетки, лежащие в нашем случае на прямой $x=x_1$; это будут точки (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3). Соответствующие этим точкам значения $u_{i,k}$ оставим неопределенными и попытаемся через них выразить все остальные неизвестные значения u.

Ближайшие к ним справа значения могут быть выражены через них весьма просто. Рассмотрим уравнения, которые должны быть соблюдены в этих точках:

$$b_{1,k}^{(1)}u_{2,k}+b_{1,k}^{(2)}u_{1,k+1}+b_{1,k}^{(3)}u_{0,k}+ \\ +b_{1,k}^{(4)}u_{1,k-1}-a_{1,k}u_{1,k}=f_{1,k} \quad (k=1, 2, 3).$$

Из них могут быть найдены все $u_{2,k}$ через $u_{1,k}$ и известные значения $u_{0,k}$:

$$u_{2,k}=\frac{1}{b_{1,k}^{(1)}}\left[f_{1,k}+a_{1,k}u_{1,k}-b_{1,k}^{(2)}u_{1,k+1}-b_{1,k}^{(3)}u_{0,k}-b_{1,k}^{(4)}u_{1,k-1}\right].$$

Пишем затем уравнения, которые должны быть выполнены для узлов, лежащих на прямой $x=x_2$, из них находим выражения $u_{3,k}$ через $u_{1,k}$ и заданные величины и т. д. Идя таким путем, мы последовательно можем выразить через $u_{1,k}$ все $u_{i,k}$ для $i\geqslant 2$. Значения $u_{5,k}$, отвечающие последней прямой $x=x_5$ области, будут нами найдены из уравнений, относящихся к ближайшим узлам слева для прямой $x=x_4$. Нам осталось еще удовлетворить уравнениям для узлов, лежащих на последней прямой $x=x_5$ области. Число их будет, очевидно, равно числу оставшихся неизвестными $u_{1,k}$. Решив их относительно $u_{1,k}$, мы сможем по ним разыскать все остальные значения $u_{i,k}$.

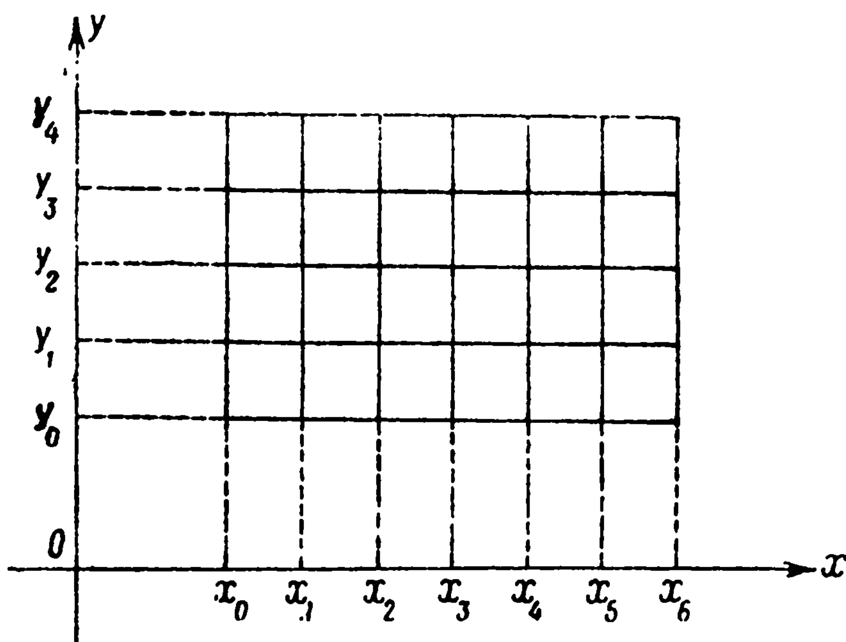


Рис. 14.

Чтобы упростить все необходимые выкладки, можно прибегнуть к следующему приему, позволяющему свести описанный здесь процесс к ряду более простых процессов, каждый из которых проводится численным образом. Искомые величины $u_{5,k}$ линейно выражаются через $u_{1,k}$. Будем порознь искать свободные члены и коэффициенты при $u_{1,k}$ в этих выражениях. Сначала проведем все вычисления

для $u_{1,1}=0$; $u_{1,2}=0$; $u_{1,3}=0$. Результат, к которому мы придем в узлах прямой $x=x_5$, даст член в $u_{5,k}$, не зависящий от $u_{1,k}$. Так же вычисляют и коэффициенты при $u_{1,k}$. Например, если нужно найти коэффициент при $u_{1,1}$, мы полагаем $u_{1,1}=1$, $u_{1,2}=u_{1,3}=0$, затем отбрасываем все свободные члены уравнения (25_1) § 2 и полагаем все значения $u_{i,k}$ на контуре равными нулю. В нашем примере уравнения для узлов, относящихся к прямой $x=x_i$, после этого примут вид:

$$b_{i,1}^{(1)}u_{i+1,1}+b_{i,1}^{(2)}u_{i,2}+b_{i,1}^{(3)}u_{i-1,1}+0-a_{i,1}u_{i,1}=0,$$
$$b_{i,2}^{(1)}u_{i+1,2}+b_{i,2}^{(2)}u_{i,3}+b_{i,2}^{(3)}u_{i-1,2}+b_{i,2}^{(4)}u_{i,1}-a_{i,2}u_{i,2}=0,$$
$$b_{i,3}^{(1)}u_{i+1,3}+0+b_{i,3}^{(3)}u_{i-1,3}+b_{i,3}^{(4)}u_{i,2}-a_{i,3}u_{i,3}=0.$$

После этого проводим вычисления уже указанным способом.

Проиллюстрируем эти рассуждения на примере, который мы заимствуем из работы Рунге [1].

Пример. Кручение однородного цилиндрического стержня сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C$$

при условии обращения функции u в нуль на границе сечения стержня, Пусть сечение стержня имеет форму креста, образованного из пяти равных квадратов со сторонами длины l (рис. 15). По соображениям симметрии нам достаточно найти функцию для восьмой части креста, отмеченной на чертеже. В нашем примере наиболее удобной сеткой будет квадратная. Уравнение (26_1) § 2 в этом случае принимает форму (28) § 2, или, если вместо неизвестных $u_{i,k}$ ввести новые неизвестные $u_{i,k}=-Ch^2v_{i,k}$, то

$$v_{i+1,k}+v_{i,k+1}+v_{i-1,k}+v_{i,k-1}-4v_{i,k}=-1.$$

Разделим, например, стороны квадратов на восемь частей, полагая $h=\frac{l}{8}$. Соответствующая сетка для восьмой части фигуры изображена на рис. 16. Внутри креста будет расположено всего 273 узла, из них в рассматриваемой нами части — 42 узла. Таким образом, нам необходимо будет решить систему 42 уравнений.

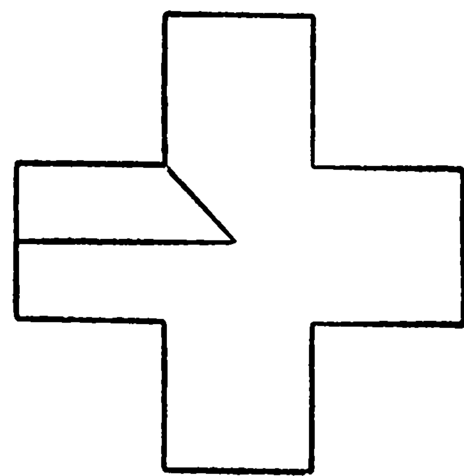


Рис. 15.

Оставляя произвольными значения $v_{11}=\alpha$; $v_{12}=\beta$; $v_{13}=\gamma$; $v_{14}=\delta$ соответственно в точках A, B, C, D на чертеже, обозначим через α', β', γ', δ' значения v в узлах соседнего правого вертикального столбца и запишем уравнения, которые должны быть соблюдены в точках A, B, C, D. В уравнение для точки A должно войти значение v в точке сетки, лежащей

непосредственно под точкой A по вертикали. Ввиду симметрии оно будет совпадать с β, и мы поэтому получим

$$\begin{aligned}
&\text{в точке } A \quad \alpha'+\beta+0+\beta-4\alpha=-1,\\
&\text{в точке } B \quad \beta'+\gamma+0+\alpha-4\beta=-1,\\
&\text{в точке } C \quad \gamma'+\delta+0+\beta-4\gamma=-1,\\
&\text{в точке } D \quad \delta'+0+0+\gamma-4\delta=-1.
\end{aligned}$$

Найдем отсюда выражения α', β', γ', δ' через α, β, γ, δ. Аналогично для следующего столбца и т. д. до тех пор, пока не будут найдены α''', β''', γ''', δ''' для крайних точек справа; они будут определены из уравнений в точках A'', B'', C'', D''. Нам осталось записать уравнения для величин v в самих крайних точках. Пользуясь условиями симметрии, мы можем эти уравнения записать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}
4\alpha''-4\alpha'''&=-1,\\
2\beta''+2\alpha''-4\beta'''&=-1,\\
2\gamma''+2\beta''-4\gamma'''&=-1,\\
2\delta''+2\gamma''-4\delta'''&=-1;
\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

из этих равенств и должны быть определены α, β, γ, δ.

Сообразно сказанному выше, мы будем определять не сразу сами уравнения, а порознь свободные члены и коэффициенты при неизвестных в выражениях α'', α''', ...

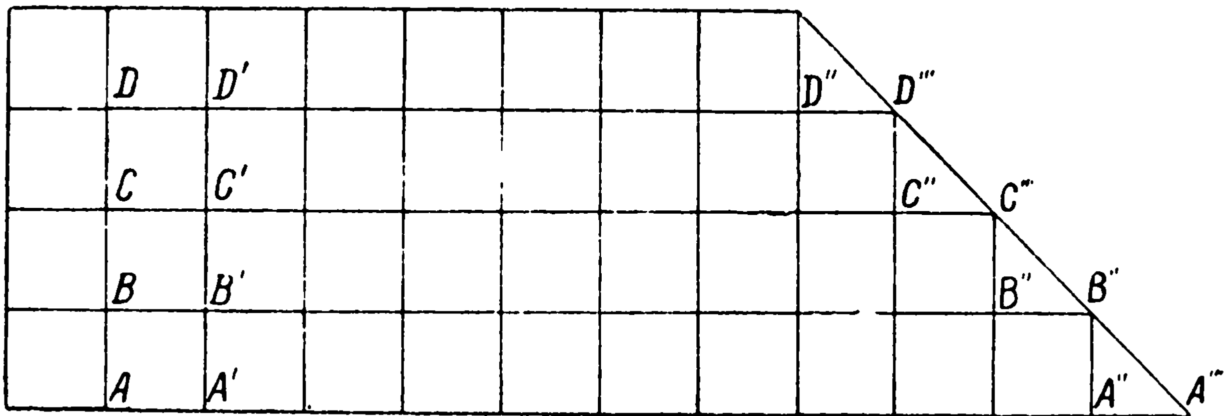


Рис. 16.

Для определения свободного члена полагаем $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ и проводим все необходимые вычисления. В результате получаем следующую таблицу, приводимую нами с точностью до 5 знаков:[1])

0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	0	−1	−4	−13	−44	−165	−680	−3 001	−13 881			
0	0	−1	−3	−5	1	63	445	2 556	13 852	73 821		
0	0	−1	−3	−6	−11	−30	−160	−1 073	−7 089	−44 864	$27\,488^{1}$	
0	0	−1	−3	−6	−10	−13	17	400	3 728	28 689	$20\,076^{1}$	$20\,076^{1}$

[1]) Часть чисел таблицы представляет собой произведение пятизначного числа на некоторую степень десяти; показатель степени десяти мы приписывали к числу сверху, так что $13\,241^{2}=13\,241\cdot 10^{2}$.

Для определения коэффициентов при α полагаем $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$ и отбрасываем свободные члены. Получаем после вычисления таблицу

0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	0	0	0	−1	−16	−160	−1 296	−9 344	−62 736			
0	0	0	1	12	97	672	4 320	26 656	$16\,048^{1}$	$95\,094^{1}$		
0	0	−1	−8	−49	−280	−1 569	−8 752	−48 832	$-27\,294^{1}$	$-15\,289^{2}$	$-85\,814^{2}$	
0	1	4	17	80	401	2 084	11 073	59 712	$32\,544^{1}$	$17\,879^{2}$	$98\,840^{2}$	$54\,911^{3}$

Таким же способом или несколько более простым, который был предложен Рунге в указанной нами статье и останавливаться на пояснении которого мы здесь не будем, могут быть найдены и коэффициенты при остальных неизвестных. Таблицы вычислений приведены ниже.

Коэффициент при β

0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	0	0	1	12	97	672	4 320	26 656	$16\,048^{1}$			
0	0	−1	−8	−50	−296	−1 729	−10 048	−58 176	$-33\,568^{1}$	$-19\,309^{2}$		
0	1	4	18	92	498	2 756	15 393	86 368	$48\,592^{1}$	$27\,389^{2}$	$15\,458^{3}$	
0	0	−2	−16	−98	−560	−3 138	−17 504	−97 664	$-54\,589^{1}$	$-30\,577^{2}$	$-17\,163^{3}$	$-96\,510^{3}$

Коэффициент при γ

0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	0	−1	−8	−48	−264	−1 409	−7 456	−39 488	$-21\,021^{1}$			
0	1	4	17	80	401	2 084	11 073	59 712	$32\,544^{1}$	$17\,879^{2}$		
0	0	−1	−8	−50	−296	−1 729	−10 048	−58 176	$-33\,568^{1}$	$-19\,309^{2}$	$-11\,078^{3}$	
0	0	0	2	24	194	1 344	8 640	53 312	$32\,096^{1}$	$19\,019^{2}$	$11\,148^{3}$	$64\,848^{3}$

Коэффициент при δ

0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	1	4	16	68	304	1 412	6 753	33 056	$16\,496^{1}$			
0	0	−1	−8	−48	−264	−1 409	−7 456	−39 488	$-21\,021^{1}$	$-11\,268^{2}$		
0	0	0	1	12	97	672	4 320	26 656	$16\,048^{1}$	$95\,094^{1}$	$55\,742^{2}$	
0	0	0	0	−2	−32	−320	−2 592	−18 688	$-12\,547^{1}$	$-80\,416^{1}$	$-49\,931^{2}$	$-30\,317^{3}$

Пользуясь этими таблицами, мы можем составить все величины α'', β'', ..., входящие в систему (*), например

$$\delta'' = -3\,001 - 9\,344\alpha + 26\,656\beta - 39\,488\gamma + 33\,056\delta.$$

После решения системы, если сохранить два знака после запятой, получим:

$$\alpha = 2{,}63; \quad \beta = 2{,}50; \quad \gamma = 2{,}07; \quad \delta = 1{,}30.$$

Составленная при помощи найденных значений таблица $v_{i,k}$ имеет вид:

0	0	0	0	0	0	0	0	0			
0	1,30	2,12	2,70	3,14	3,53	3,95	4,55	5,65	8,29		
0	2,07	3,50	4,53	5,32	6,02	6,73	7,59	8,78	10,42	11,89	
0	2,50	4,28	5,59	6,61	7,49	8,36	9,32	10,45	11,72	12,86	13,63
0	2,63	4,53	5,93	7,03	7,98	8,89	9,88	10,98	12,15	13,19	13,90	14,15

Изложенный способ последовательного исключения имеет существенный недостаток, который делает его пригодным только в том случае, когда значения $u_{i,k}$ находятся в „небольшом" числе точек.

Возвратимся к граничной задаче, рассмотренной в начале n° 2 настоящего параграфа. Пусть, как описано выше, мы оставили произвольными значения $u_{i,k}$ в узлах сетки, лежащих на прямой $x=x_1$ и, находя последовательно значения $u_{2,k}$, $u_{3,k}$, ... $(k=1, 2, 3)$, дошли до точек сетки на прямой $x=x_i$ и нашли значения $u_{i,k}$. При этом $u_{i,k}$ будут выражены линейно через известные значения u в граничных точках сетки и через оставшиеся произвольными $u_{1,k}$:

$$u_{i,k}=\sum_j p_{i,k}^{(j)} u_{1,j}+q_{i,k}.$$

При росте i коэффициенты $p_{i,k}^{(j)}$, так же как и $q_{i,k}$, будут, как показывают примеры вычислений, быстро возрастать и не будут иметь одинаковых знаков. В изложенном выше примере Рунге это наглядно видно по таблицам коэффициентов при α, β, γ, δ. Из тех же таблиц видно, что рост $p_{i,k}^{(j)}$ и $q_{i,k}$ может быть весьма быстрым и уже после небольшого числа шагов они могут достигнуть больших значений. Это повлечет за собой быстрый рост погрешностей, происходящих от неточностей в граничных значениях u и округлений, которые делаются при вычислениях. Результаты вычислений могут быть связаны с большой потерей точности.

Если процесс вычислений обладает такой особенностью, то его обычно называют неустойчивым относительно погрешностей.

Рассмотренный процесс исключения равносилен приближенному решению при помощи разностного уравнения (26_1) смешанной задачи для эллиптического уравнения (17) § 2 в полуполосе $[x\geqslant x_0, y_0\leqslant y\leqslant y_6]$, когда на вертикальной части границы $x=x_0$ заданы значения u и $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial n}$, а на горизонтальных частях границы $y=y_0$ и $y=y_6$ заданы значения функции u. Такая задача является некорректной, и неустойчивость изучаемого метода исключения тесно связана с этой особенностью смешанной задачи.

Чтобы избежать неустойчивости, С. Л. Соболев предложил другой способ исключения, который аналогичен решению задачи Дирихле, а не задачи с начальными условиями. Идею его мы выясним на примере простейшего уравнения. Пусть для прямоугольника, изображенного на рис. 14, нужно найти решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, принимающее на границе области заданные значения.

Предположим, что дифференциальное уравнение в точках сетки заменено разностным уравнением $u_{i+1,k}+u_{i,k+1}+u_{i-1,k}+u_{i,k-1}-4u_{i,k}=0$. Рассмотрим это уравнение в точках сетки на прямой

$x=x_1$ и найдем из него значения $u_{1,k}$ $(k=1, 2, 3)$. Мы выразим их при этом через значения $u_{i,k}$ в граничных точках прямоугольника $[x_0 \leqslant x \leqslant x_2;\ y_0 \leqslant y \leqslant y_4]$.

Составим теперь уравнения в точках прямой $x=x_2$. В них будут входить $u_{1,k}$, $u_{2,k}$, $u_{3,k}$. Подставим сюда найденные значения $u_{1,k}$ и из полученных после этого уравнений найдем величины $u_{2,k}$. Мы выразим их через значения $u_{i,k}$ в точках границы прямоугольника $[x_0 \leqslant x \leqslant x_3;\ y_0 \leqslant y \leqslant y_4]$. И так далее до тех пор, когда найдем выражения $u_{5,k}$ через известные значения u в точках границы прямоугольника, указанного на рис. 14. После этого мы можем последовательно вычислить $u_{4,k}$, $u_{3,k}$, ...

Каждый шаг процесса здесь состоит в построении выражений для значений решения во внутренних точках некоторой прямоугольной сеточной области в форме линейных комбинаций значений $u_{i,k}$ на границе области. Коэффициенты таких комбинаций будут положительными и сумма их равна единице в каждой комбинации. Погрешность, которую мы допустим на каком-либо шаге, не будет увеличиваться при дальнейших вычислениях, и описанный сейчас процесс исключения будет устойчивым относительно роста погрешности.

Б. *Метод итерации*. В общем случае он имеет следующий вид. Пусть дана система n уравнений в форме

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1,\\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n.
\end{aligned}$$

Выберем каким-либо способом первые приближения $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, ..., $x_n^{(1)}$ для неизвестных x_i и подставим их в правые части уравнений. Полученные значения примем за вторые приближения к x_i:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(1)} + b_1,\\
x_2^{(2)} &= a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(1)} + b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(2)} &= a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(1)} + b_n.
\end{aligned}$$

Их подставляем вновь в правые части системы, результаты принимаем за третье приближение к x_i и т. д. Приближение номера $k+1$ вычисляется по предшествующему согласно равенствам:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1,\\
x_2^{(k+1)} &= a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} + b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(k+1)} &= a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k)} + b_n.
\end{aligned}$$

Вычисления повторяют до тех пор, пока в пределах принятой точности последующее приближение совпадает с предыдущим.

При практических вычислениях, разумеется, нет необходимости находить сами приближения $x_i^{(k)}$, а достаточно лишь найти поправки, которые нужно добавить к значениям $x_i^{(k)}$ в k-м приближении, чтобы получить их в $(k+1)$-м приближении. Если обозначить эти поправки через

$$\delta_1^{(k)} = x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}, \ldots, \delta_n^{(k)} = x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)},$$

для последовательного вычисления их будем иметь систему:

$$\begin{gathered} \delta_1^{(k+1)} = a_{11}\delta_1^{(k)} + a_{12}\delta_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}\delta_n^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_n^{(k+1)} = a_{n1}\delta_1^{(k)} + a_{n2}\delta_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}\delta_n^{(k)}. \end{gathered}$$

При этом

$$\begin{gathered} x_1^{(k+1)} = x_1^{(1)} + \delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)} + \ldots + \delta_1^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(1)} + \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)} + \ldots + \delta_n^{(k)}. \end{gathered}$$

Сделаем еще одно замечание по поводу вычислений. При разыскании $(k+1)$-го приближения $x_i^{(k+1)}$ мы пользовались k-м приближением $x_i^{(k)}$. Можно ожидать, что каждое следующее приближение будет ближе к истинному значению, чем предыдущее. Поэтому для ускорения сходимости можно при разыскании x_i в $(k+1)$-м приближении найденные значения немедленно использовать, располагая вычисления по схеме

$$\begin{gathered} x_1^{(k+1)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

В результате вычислений для каждого x_i получают последовательность приближений

$$x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \ldots \tag{9}$$

Для знакомства с исследованием сходимости этих последовательностей мы отсылаем к специальным работам [1]) и приведем без доказательства два следующих простейших признака.

---

[1]) Мизес и Поллячек-Гейрингер [1]. См. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева [1].

1. *Если коэффициенты системы*

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k + b_i$$

удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то при любых первых приближениях $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ *последовательности* (9) *сходятся, и предельные значения* $x_i = \lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(k)}$ *удовлетворяют заданной системе.*

Отметим также, что сходимость будет тем более быстрой, чем меньшее численное значение будут иметь суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|$. Поэтому бывает выгодно перед решением преобразовать систему так, чтобы сделать в ней по возможности малыми коэффициенты $a_{i,k}$.

Теорема, сформулированная нами, есть частный случай аналогичной теоремы для вполне регулярных бесконечных систем, доказанной в n° 2 § 2 главы I.

Признак сходимости, доставляемый этой теоремой, весьма прост, но относится к сравнительно узкому классу. Более широкий класс уравнений, встречающихся в математической физике и технике, охватывает второй признак, хотя он и не содержит в себе первого.

2. *Если матрица системы уравнений*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

симметрична, т. е. $a_{i,k} = a_{k,i}$, *и квадратичная форма*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} x_i x_k$$

определенная и положительная, то последовательности (9), *построенные по методу итерации, при которой i-е уравнение употребляется для исправления i-го неизвестного, будут сходиться при любых исходных значениях.*

Этот второй признак гарантирует, например, сходимость метода итерации для уравнений (28), (32), (34) и (36) § 2 при решении задач с известными граничными значениями искомых функций.

Пример. Будем искать в промежутке $0 \leqslant x < 1$ решение уравнения

$$y'' - xy = -1$$

при граничных условиях $y(0)=0$, $y(1)=0$. Разделим промежуток (0, 1) на десять равных частей точками 0; 0,1; 0,2; ... ; 1; $h=0{,}1$. Заменив в уравнении вторую производную y'' ее выражением через вторую разность

$$y''(ih) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0{,}01},$$

получим следующую систему уравнений для определения $y_1, y_2, \ldots, y_9$:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0{,}01} - i \cdot 0{,}1 y_i = -1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9),$$

$$y_0 = 0, \quad y_{10} = 0,$$

или

$$y_1 = \frac{y_2 + 0{,}01}{2{,}001},$$

$$y_2 = \frac{y_1 + y_3 + 0{,}01}{2{,}002},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} + 0{,}01}{2 + 0{,}001i}, \qquad (**)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_9 = \frac{y_8 + 0{,}01}{2{,}009}.$$

Для решения мы применим метод итерации. Чтобы определить первое приближение к y_i, мы решим сначала задачу с вдвое большим интервалом $h=0{,}2$. Разделим промежуток на 5 частей точками 0; 0,2; 0,4; ... ; 1. Чтобы не производить перенумерацию неизвестных, значения y в этих точках назовем $y_0, y_2, y_4, y_6, y_8, y_{10}$. Заменяем в уравнении вторую производную ее приближенным выражением

$$y''(ih) = \frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}}{0{,}04} \qquad (i = 2, 4, \ldots, 8)$$

и получаем систему

$$\frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}}{0{,}04} - i \cdot 0{,}1\, y_i = -1 \qquad (i = 2, 4, 6, 8),$$

$$y_0 = 0, \quad y_{10} = 0,$$

или

$$y_2 = \frac{y_4 + 0{,}04}{2{,}008},$$

$$y_4 = \frac{y_2 + y_6 + 0{,}04}{2{,}016},$$

$$y_6 = \frac{y_4 + y_8 + 0{,}04}{2{,}024},$$

$$y_8 = \frac{y_6 + 0{,}04}{2{,}032}.$$

Исключим y_2 и y_8, определив их из первого и последнего уравнений и подставив во второе и третье. Тогда система приведется к следующей:

$$2{,}016y_4 = y_6 + \frac{y_4 + 0{,}04}{2{,}008} + 0{,}04; \quad 2{,}024y_6 = y_4 + \frac{y_6 + 0{,}04}{2{,}032} + 0{,}04.$$

Отсюда находим такие значения:

$$y_2 = 0{,}0768, \quad y_4 = 0{,}1143; \quad y_6 = 0{,}1136; \quad y_8 = 0{,}0756.$$

Их мы примем за начальные значения для этих неизвестных. Для нахождения же начальных значений y_1, y_3, y_7, y_9 мы произведем интерполирование по формуле Бесселя (14) § 1 (для y_3, y_5, y_7) и по формуле Ньютона (10) § 1 (для y_1 и y_9). Это приведет нас к следующим величинам:

$$y_1 = 0{,}0434; \quad y_3 = 0{,}1004; \quad y_5 = 0{,}1186; \quad y_7 = 0{,}0993; \quad y_9 = 0{,}0425.$$

Итерация для системы (**) сведена нами в следующую таблицу:

		Приближения		
		первое	второе	третье
0,1	y_1	0,0434	0,0434	0,0434
0,2	y_2	0,0768	0,0768	0,0768
0,3	y_3	0,1004	0,1004	0,1004
0,4	y_4	0,1143	0,1143	0,1143
0,5	y_5	0,1186	0,1187	0,1187
0,6	y_6	0,1136	0,1137	0,1137
0,7	y_7	0,0993	0,0993	0,0994
0,8	y_8	0,0756	0,0756	0,0756
0,9	y_9	0,0425	0,0426	0,0426

Из нее видно, что для исправления исходных значений до нужной точности потребовалось всего два цикла вычислений.

Точное решение уравнения может быть найдено при помощи степенного ряда

$$y = 0{,}48408\left(x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \ldots\right) - \left(\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^8}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8} + \frac{x^{11}}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot 11} + \ldots\right).$$

Значения y, вычисленные отсюда, будут:

$$y(0{,}1) = 0{,}0434, \quad y(0{,}6) = 0{,}1138,$$
$$y(0{,}2) = 0{,}0768, \quad y(0{,}7) = 0{,}0994,$$
$$y(0{,}3) = 0{,}1004, \quad y(0{,}8) = 0{,}0757,$$
$$y(0{,}4) = 0{,}1144, \quad y(0{,}9) = 0{,}0426.$$
$$y(0{,}5) = 0{,}1188,$$

Приближенные значения, найденные нами, отличаются от них только на единицу четвертого знака после запятой.

3. Оценка погрешности. Сходимость процесса. Погрешность, происходящая при применении метода сеток к решению дифференциальных уравнений, обусловливается двумя обстоятельствами: во-первых, тем, что при сносе граничных условий, которые должны быть выполнены на контуре Γ заданной области G, на контур C сеточной области мы допускаем некоторую погрешность; во-вторых, обусловливается заменой дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях.

В связи с применением метода сеток возникают два следующих основных вопроса. Нужно определить условия сходимости метода. Иначе говоря, нужно определить, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты дифференциального уравнения и область G для того, чтобы при $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_k \to 0$ решение уравнения в конечных разностях сходилось к функции, решающей поставленную задачу для дифференциального уравнения. Вторая основная задача состоит в оценке погрешности метода сеток, т. е. в оценке отклонения решения уравнения в конечных разностях от соответствующего решения дифференциального уравнения.

Сходимость метода сеток была подвергнута для уравнений в частных производных исследованиям в работах Л. А. Люстерника [1], И. Г. Петровского [3],[1] Куранта, Фридрихса и Леви [1].[2] Преследуя принципиальную цель выяснения наиболее широких условий, при которых последовательность функций, определенных на сетке, будет сходиться к решению дифференциального уравнения, они рассмотрели разностное уравнение простейшего вида и сами исследования провели для задачи Дирихле применительно к уравнению Лапласа. Ими была установлена сходимость при весьма общих предположениях о форме области. Наиболее сильный результат в этом направлении принадлежит И. Г. Петровскому, показавшему, что если во всех точках границы области существует супергармонический барьер, то последовательность „сеточных функций“ равномерно сходится к решению задачи Дирихле.

Вторая из двух основных задач является более глубокой и, как правило, решение ее позволяет не только установить факт сходимости, но и сделать заключение о ее характере. Разумеется, эта вторая задача решается при более ограничительных предположениях, чем первая.

Мы остановимся на этой второй задаче и будем рассматривать ее при простейших предположениях, достаточных, однако, для многих практических приложений. Кроме того, мы ограничимся рассмотрением

---

[1] См. также И. Г. Петровский [1].

[2] Кроме работ, цитированных на стр. 179, оценке погрешности и сходимости метода сеток для эллиптических уравнений за последние годы были посвящены также следующие работы: Е. А. Волков [1, 2], Гиз [1], Лаасонен [1], Уолш и Янг [1].

задач с известными граничными значениями искомых функций и не будем затрагивать граничных условий другого типа. Начнем вновь с обыкновенного дифференциального уравнения $y'' - q(x)y = f(x)$ при граничных требованиях $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Выше [см. § 2, (3) и (4)] мы показали, что функция, удовлетворяющая нашему дифференциальному уравнению и имеющая непрерывные производные до четвертого порядка, будет удовлетворять также уравнению

$$l_i^{(1)}(y) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - q_i y(x_i) = f_i + R_i^{(1)*}(y), \tag{10}$$

причем $R_i^{(1)*}(y)$ здесь имеет оценку:

$$|R_i^{(1)*}(y)| \leqslant \frac{h^2}{12} M_4. \tag{11}$$

Отбрасывая $R_i^{(1)*}(y)$, мы получали уравнение в конечных разностях, приближенно заменяющее дифференциальное уравнение (10):

$$l_i^{(1)}(y) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{12}$$

с граничными требованиями

$$y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta.$$

Нам нужно оценить в узлах сетки разность $y(x_i) - y_i$ между решениями уравнений (10) и (12), имеющими одинаковые граничные значения.

В основание оценки мы положим следующие простые соображения. Возьмем в узлах сетки произвольную систему значений y_0, y_1, $y_2, \ldots, y_N$ и покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема I. *Если $q_i \geqslant 0$ и $l_i^{(1)}(y) \leqslant 0$, то y_i не может иметь во внутренних точках сетки отрицательный минимум. Исключение представляет случай, когда y_i постоянно.*

В самом деле, допустим, что y_i не постоянно и достигает наименьшего отрицательного значения $-m$ в некоторой внутренней точке i сетки. Мы можем считать, что этот минимум является собственным в том смысле, что между значениями y_{i+1} и y_{i-1} в соседних точках есть хоть одно, большее чем $-m$. Заменим в $l_i^{(1)}(y)$ y_{i+1} и y_{i-1} меньшей величиной $-m$, отчего $l_i^{(1)}(y)$ уменьшится:

$$l_i^{(1)}(y) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i > \frac{-m + 2m - m}{h^2} + q_i m = q_i m \geqslant 0. \tag{13}$$

Последнее же несовместимо с неравенством $l_i^{(1)}(y) \leqslant 0$. Как простые следствия отсюда вытекают нижеследующие теоремы.

Теорема II. *Если* $q_i \geqslant 0$, $l_i^{(1)}(y) \leqslant 0$, *а в граничных точках* $y_0 \geqslant 0$ *и* $y_N \geqslant 0$, *то во всех внутренних точках* $y_i \geqslant 0$.

Если бы мы допустили, что хоть в одном из узлов $y_i < 0$, то, так как на границе промежутка значения y_i неотрицательны, мы должны были бы допустить, что во внутренней точке сетки y_i имеет отрицательный минимум, чего не может быть по теореме I.

Теорема III. *Если* $q_i \geqslant 0$ *и в узлах сетки даны две системы значений* $y_0, y_1, \ldots$ и $Y_0, Y_1, \ldots$ *такие, что* $l_i^{(1)}(Y) \leqslant -|l_i^{(1)}(y)|$, *а на границах промежутка* $Y_0 \geqslant |y_0|$, $Y_N \geqslant |y_N|$, *то во всех точках промежутка*

$$Y_i \geqslant |y_i|.$$

Действительно, неравенство $l_i^{(1)}(Y) \leqslant -|l_i^{(1)}(y)|$ равносильно следующим двум:

$$l_i^{(1)}(Y) \leqslant l_i^{(1)}(y), \quad l_i^{(1)}(Y) \leqslant -l_i^{(1)}(y),$$

или, что то же,

$$l_i^{(1)}(Y-y) \leqslant 0, \quad l_i^{(1)}(Y+y) \leqslant 0.$$

По предположению, в граничных точках $Y_0 - y_0 \geqslant 0$, $Y_N - y_N \geqslant 0$ и $Y_0 + y_0 \geqslant 0$, $Y_N + y_N \geqslant 0$. В силу второй теоремы, отсюда и из предыдущих неравенств следует, что во всех внутренних точках сетки

$$Y_i - y_i \geqslant 0 \quad \text{и} \quad Y_i + y_i \geqslant 0,$$

и значит

$$Y_i \geqslant |y_i|.$$

Перейдем теперь к задаче оценки погрешности способа сеток. Мы вновь считаем $q \geqslant 0$. Выше мы видели, что если $y(x)$ удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению, то для нее выполняется равенство (10). Вычтем отсюда почленно уравнение (12) в конечных разностях. Для искомой погрешности $r_i = y(x_i) - y_i$ получим следующее уравнение в конечных разностях:

$$l_i^{(1)}(r) = \frac{r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1}}{h^2} - q_i r_i = R_i^{(1)*}(y). \tag{14}$$

Кроме того, так как $y(x)$ и y_i на концах промежутка принимают одинаковые значения, для r_i должны выполняться следующие граничные условия:

$$r_0 = 0, \quad r_N = 0. \tag{15}$$

Погрешность r_i описанного способа сеток должна удовлетворять уравнению такого же вида, что и y_i, но с другим свободным членом. А именно, свободный член уравнения для r_i равен погрешности $R_i^{(1)*}(y)$,

происходящей от замены дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях. Это относится к любым граничным условиям. Если же мы решаем задачу с известными граничными значениями, то для погрешности r_i значения на концах промежутка равны нулю.

$R_i^{(1)*}(y)$ зависит от выбора решения $y(x)$ дифференциального уравнения и является, по существу дела, неизвестной величиной, так как нам не известно $y(x)$. Произвести оценку $R_i^{(1)*}(y)$, а следовательно, и r_i можно поэтому лишь в смысле порядка малости относительно шага сетки h.

Оценка $R_i^{(1)*}(y)$ нами была установлена раньше и дается неравенством (11). Пользуясь ею, мы построим уравнение в конечных разностях, которое является мажорантным для (14) в том смысле, что решение его, обращающееся в нуль на концах промежутка, будет мажорировать погрешность r_i. Рассмотрим, в самом деле, уравнение

$$l_i^{(1)}(\rho') = \frac{\rho'_{i+1} - 2\rho'_i + \rho'_{i-1}}{h^2} - q_i\rho'_i = -\frac{h^2}{12} M_4 \tag{16}$$

при условиях $\rho'_0 = 0$, $\rho'_N = 0$.

Если r_i и ρ'_i удовлетворяют уравнениям (14) и (16) (соответственно), то $l_i^{(1)}(\rho') \leqslant -|l_i^{(1)}(r)|$, и, так как ρ'_i и r_i обращаются в нуль на границе промежутка, для r_0, r_1, ... и ρ'_0, ρ'_1, ... выполняются условия теоремы III. Поэтому

$$|r_i| \leqslant \rho'_i. \tag{17}$$

Для упрощения этой оценки мы рассмотрим новое уравнение

$$\lambda_i(\rho) = \frac{\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}}{h^2} = -\frac{h^2}{12} M_4, \tag{18}$$

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_N = 0,$$

получающееся из (16), если там положить $q_i = 0$. Для разности $\rho_i - \rho$ путем вычитания (18) и (16) получаются следующие соотношения:

$$\lambda_i(\rho - \rho') = -q_i\rho'_i \leqslant 0, \quad \rho_0 - \rho'_0 = 0, \quad \rho_N - \rho'_N = 0,$$

из которого, ввиду теоремы II, вытекает, что во всех точках сетки должно быть $\rho_i - \rho'_i \geqslant 0$ и, стало быть,

$$|r_i| \leqslant \rho_i.$$

Решение же (18) находится просто и равно значениям, которые принимает в узлах сетки функция

$$\rho = \frac{h^2}{12} M_4 \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Своего максимального значения эта функция достигает в середине промежутка при $x=\frac{a+b}{2}$; $\max\rho=\frac{h^2(b-a)^2}{96}M_4$;

$$|r_i|\leqslant\frac{h^2(b-a)^2}{96}M_4. \qquad (19)$$

Допустим, что искомое решение дифференциального уравнения имеет ограниченную четвертую производную. Так наверное будет в том случае, когда $q(x)$ и свободный член $f(x)$ имеют ограниченные вторые производные. Из оценки (19) тогда следует, что погрешность r_i в методе сеток будет стремиться к нулю при $h\to 0$. Это устанавливает сходимость последовательных приближений, построенных по методу сеток, к решению дифференциального уравнения в случае конечного M_4.

Более сложно получается оценка для уравнений с частными производными. Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение (17) § 2 и произведем оценку погрешности для задачи Дирихле. Построим, как это мы делали в начале n° 2 § 2, произвольную прямоугольную сетку с узлами (x_i, y_k), образуем замкнутую ломаную C из сторон и диагоналей прямоугольников сетки, по возможности близкую к контуру Γ заданной области G, снесем с Γ на C заданные значения и заменим в узлах сетки, лежащих внутри C, дифференциальное уравнение уравнением (26_1) § 2. Напомним, что погрешность в уравнении, получающаяся при такой замене, имеет оценку (26_2) § 2. Будем считать ниже Δx_i, Δy_k настолько малыми, чтобы коэффициенты $b_{i,k}^{(j)}$ в уравнении (26_1) § 2 были положительными. Для этого достаточно выполнить неравенства (8).

Для выражения $l_{i,k}(u)=b_{i,k}^{(1)}u_{i+1,k}+b_{i,k}^{(2)}u_{i,k+1}+b_{i,k}^{(3)}u_{i-1,k}+b_{i,k}^{(4)}u_{i,k-1}-a_{i,k}u_{i,k}$, стоящего в левой части (26_1) § 2, могут быть доказаны теоремы, аналогичные теоремам I—III. Рассуждения при доказательстве этих теорем являлись бы простым повторением уже проделанных нами для теорем I—III и поэтому мы только формулируем теоремы и оставляем их без доказательства.

Допустим, что в узлах сетки задана некоторая система значений $u_{i,k}$.

Теорема IV. *Если $q_{i,k}\leqslant 0$ и $l_{i,k}(u)\leqslant 0$, то $u_{i,k}$ не может иметь отрицательного минимума во внутренних узлах сетки. Исключение представляет лишь тот случай, когда $u_{i,k}$ постоянно.*

Теорема V. *Если $q_{i,k}\leqslant 0$, $l_{i,k}(u)\leqslant 0$, а в точках сетки на границе C сеточной области $u_{i,k}\geqslant 0$, то во всех узлах сетки внутри C также $u_{i,k}\geqslant 0$.*

Теорема VI. *Если $q_{i,k}\leqslant 0$ и в узлах сетки даны две системы величин $u_{i,k}$ и $U_{i,k}$ такие, что $l_{i,k}(U)\leqslant -|l_{i,k}(u)|$, причем в граничных узлах $U_{i,k}\geqslant|u_{i,k}|$, тогда утверждается, что всюду в сеточной области*

$$U_{i,k}\geqslant|u_{i,k}|.$$

Обозначим через $\varphi_{i,k}$ значения $u_{i,k}$ на C. Они, вообще говоря, не будут совпадать, как мы говорили выше, с действительными значениями $u(x_i, y_k)$, которые принимает искомая функция u в соответствующих точках.

Разницу между ними назовем $\bar{r}_{i,k} = u(x_i, y_k) - \varphi_{i,k}$. Можно легко дать оценку этой погрешности. Если условиться переносить на C значения u из ближайшей точки контура Γ, то $|\bar{r}_{i,k}| \leqslant M_1 \frac{\delta}{2}$, где δ — наибольшее из чисел Δx_i, Δy_k и M_1 — максимальное значение частных производных от u по x и y в некоторой области, содержащей в себе и G и сеточную область.

Функция $u(x, y)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, удовлетворит и уравнению (26) § 2. Если вычесть оттуда почленно уравнение $l_{i,k}(u) = f_{i,k}$ для $u_{i,k}$, увидим, что погрешность $r_{i,k} = u(x_i, y_k) - u_{i,k}$, которую мы получаем при замене искомой функции решением уравнения в конечных разностях, удовлетворяет уравнению:

$$l_{i,k}(r) = R_{i,k}(u). \tag{20}$$

Кроме того, в узлах границы C сеточной области она принимает значения

$$r_{i,k} = \bar{r}_{i,k}. \tag{21}$$

Разделим влияние контурных погрешностей $\bar{r}_{i,k}$ и ошибок $R_{i,k}$ в удовлетворении дифференциального уравнения на величину общей погрешности $r_{i,k}$. Будем искать решение уравнения (20) в виде суммы $r_{i,k} = v_{i,k} + w_{i,k}$ двух систем величин, одна из которых удовлетворяет однородному уравнению

$$l_{i,k}(v) = 0$$

и принимает на контуре области заданные значения $v_{i,k} = \bar{r}_{i,k}$, вторая же принимает на контуре нулевые значения и внутри C удовлетворяет уравнению:

$$l_{i,k}(w) = R_{i,k}.$$

Оценить величины первой системы величин не представляет никакого труда. В самом деле, в n° 1 мы видели, что наибольшего значения своего $v_{i,k}$ достигает на контуре C, и поэтому всюду должно быть:

$$|v_{i,k}| \leqslant \max |v_{i,k}| \leqslant \frac{\delta}{2} M_1.$$

Отсюда видно, что $v_{i,k}$ будет, вообще говоря, малой величиной первого порядка вместе с Δx_i и Δy_k.

Несколько более сложно оценивается $w_{i,k}$. Будем считать $q \leqslant 0$. Согласно теореме VI настоящего параграфа для ее оценки достаточно найти такую функцию, которая принимала бы на границе неотрицательные значения, внутри же контура оператор $l_{i,k}$, примененный к ней, имел бы значение, не большее чем $-|R_{i,k}|$. Такая функция может быть построена многими способами. Мы воспользуемся здесь идеей, развитой С. А. Гершгориным.[1]

Будем искать необходимую нам функцию в форме произведения постоянной α на функцию W, удовлетворяющую уравнению

$$L(W) = -1.$$

Легко видеть, что W не может принимать отрицательных значений, так как в противном случае W имела бы внутри C отрицательный минимум, в котором должны быть выполнены соотношения

$$W < 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \geqslant 0,$$

и поэтому должно было бы быть $L(W) \geqslant 0$, что противоречит уравнению для W.

Подставляя αW в равенство (26) § 2 вместо u, получим:

$$l_{i,k}(\alpha W) = [-1 + R_{i,k}(W)]\,\alpha.$$

При этом $R_{i,k}(W)$ имеет оценку вида (26) § 2 с той разницей что в ней вместо максимальных значений M_3 и M_4 третьих и четвертых частных производных от u должны быть подставлены N_3 и N_4, являющиеся максимальными значениями соответствующих производных от W. Чтобы правая часть предыдущего равенства была меньше, чем $-|R_{i,k}(w)|$, достаточно число α подобрать так, чтобы

$$\left\{-1 + \left[\left(\frac{\varepsilon}{3} N_3 + \frac{\eta}{6} N_4\right)(A_{i,k} + C_{i,k}) + \frac{\eta}{3} N_3 (|D_{i,k}| + |E_{i,k}|)\right]\right\} \alpha \leqslant$$
$$\leqslant -\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} M_3 + \frac{\eta}{6} M_4\right)(A_{i,k} + C_{i,k}) + \frac{\eta}{3} M_3 (|D_{i,k}| + |E_{i,k}|)\right].$$

Выбором Δx_i, Δy_k мы всегда можем достигнуть того, чтобы выражение в фигурных скобках, стоящее множителем при α в левой части неравенства, было отрицательно. После этого достаточно положить:

$$\alpha = \frac{\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} M_3 + \frac{\eta}{6} M_4\right)(A + C) + \frac{\eta}{3} M_3 (|D| + |E|)\right]_{\max}}{1 - \left[\left(\frac{\varepsilon}{3} N_3 + \frac{\eta}{6} N_4\right)(A + C) + \frac{\eta}{3} N_3 (|D| + |E|)\right]_{\max}}.$$

---

[1]) С. А. Гершгорин [2].

Величина $w_{i,k}$ будет иметь оценку

$$|w_{i,k}| \leqslant \alpha N, \quad N = \max W.$$

Для $r_{i,k}$ мы, следовательно, получим:

$$|r_{i,k}| \leqslant \frac{\delta}{2} M_1 + \alpha N.$$

Когда промежутки по каждой из осей координат одинаковы: $\Delta x_i = h$, $\Delta y_k = l$, оценка примет вид:

$$|r_{i,k}| \leqslant \frac{\delta}{2} M_1 + N \frac{[M_4(h^2A + l^2C) + 2M_3(h^2|D| + l^2|E|)]_{\max}}{12 - [N_4(h^2A + l^2C) + 2N_3(h^2|D| + l^2|E|)]_{\max}}.$$

Отсюда видно, что при $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_k \to 0$ будет стремиться к нулю и правая часть, и поэтому $r_{i,k} \to 0$.

Более простую мажоранту для $w_{i,k}$ можно пытаться строить, используя для этой цели полином, коэффициенты которого подбирают так, чтобы этот полином для точек внутри C имел бы положительные значения и оператор $l_{i,k}(u)$, примененный к нему, имел бы значение не большее, нежели $-|R_{i,k}|$. Мы остановимся только на простейшем случае полинома второй степени. Опишем около области, ограниченной кривой C, эллипс с осями, параллельными осям координат; полуоси его назовем s, t и координаты центра x_c, y_c. Допустим, что коэффициенты заданного дифференциального уравнения удовлетворяют неравенству:

$$\frac{A}{s^2} + \frac{C}{t^2} - \frac{|D|}{s} - \frac{|E|}{t} + \frac{q}{2} > 0.$$

Будем искать мажоранту в форме:

$$W = \alpha\left[1 - \frac{(x - x_c)^2}{s^2} - \frac{(y - y_c)^2}{t^2}\right].$$

Подставим W в оператор $l_{i,k}$. Ввиду того, что $R_{i,k}$ зависит только от производных порядка, высшего, чем второй, из равенства (26) § 2 следует, что

$$l_{i,k}(W) = L(W) =$$
$$= 2\alpha\left\{-\frac{A_{i,k}}{s^2} - \frac{C_{i,k}}{t^2} - \frac{D_{i,k}}{s^2}(x - x_c) - \frac{E_{i,k}}{t^2}(y - y_c) + \right.$$
$$\left. + \frac{q}{2}\left[1 - \frac{(x - x_c)^2}{s^2} - \frac{(y - y_c)^2}{t^2}\right]\right\}.$$

Так как $|x - x_c| \leqslant s$, $|y - y_c| \leqslant t$ и скобка, стоящая множителем при q, не больше единицы, для $l_{i,k}(W)$ имеет место неравенство:

$$l_{i,k}(W) \leqslant -2\alpha\left(\frac{A_{i,k}}{s^2} + \frac{C_{i,k}}{t^2} - \frac{|D_{i,k}|}{s} - \frac{|E_{i,k}|}{t} + \frac{q}{2}\right),$$

и чтобы было $l_{i,k}(W) \leqslant -|R_{i,k}|$, достаточно положить

$$\alpha = \frac{\left[\left(\frac{\varepsilon}{3}M_3 + \frac{\eta}{6}M_4\right)(A+C) + \frac{\eta}{3}M_4(|D|+|E|)\right]_{\max}}{2\left(\frac{A}{s^2}+\frac{C}{t^2}-\frac{|D|}{s}-\frac{|E|}{t}+\frac{q}{2}\right)_{\min}}.$$

Поэтому для $r_{i,k}$ получим оценку:

$$|r_{i,k}| \leqslant \frac{\delta}{2}M_1 + \alpha\left[1 - \frac{(x-x_c)^2}{s^2} - \frac{(y-y_c)^2}{t^2}\right].$$

Для равных промежутков по координатным осям:

$$|r_{i,k}| \leqslant \frac{\delta}{2}M_1 + \frac{[M_4(h^2A + l^2C) + 2M_3(h^2|D| + l^2|E|)]_{\max}}{24\left(\frac{A}{s^2}+\frac{C}{t^2}-\frac{|D|}{s}-\frac{|E|}{t}+\frac{q}{2}\right)_{\min}} \times$$
$$\times\left[1 - \frac{(x-x_c)^2}{s^2} - \frac{(y-y_c)^2}{t^2}\right].$$

Например, для случая уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

так как $D = E = q = 0$, $A = C = 1$, получим следующую оценку:

$$|r_{i,k}| \leqslant \frac{\delta}{2}M_1 + \frac{(\eta M_4 + 2\varepsilon M_3)s^2t^2}{6(s^2+t^2)},$$

или для $\Delta x_i = h$, $\Delta y_k = l$

$$|r_{i,k}| \leqslant \frac{\delta}{2}M_1 + \frac{M_4(h^2+l^2)s^2t^2}{24(s^2+t^2)}.$$

Подобным же способом могут быть оценены погрешности, которые получатся, если уравнение Пуассона приближенно заменить уравнениями (32), (34) или (36) § 2.

Все полученные нами оценки погрешности хотя и доказывают сходимость последовательных приближений в методе сеток при некоторых предположениях об искомом решении, но являются недостаточными в том отношении, что в них входят максимальные значения модулей производных некоторого порядка от разыскиваемого решения. Эти значения должны быть определены из дополнительных соображений или же вычислены приближенно по найденным приближенным значениям функции, путем замены этих производных их выражениями через разности или разностные отношения.

ГЛАВА IV

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Предметом настоящей главы является изложение методов приближенного решения дифференциальных уравнений, связанных с вариационным исчислением. Известно, что основные проблемы механики наряду с дифференциальными уравнениями управляются так называемыми минимальными принципами. Так, например, положение равновесия механической системы есть положение, отвечающее минимуму ее потенциальной энергии. Ввиду этого проблема решения граничной задачи для дифференциального уравнения данной механической системы оказывается, в общем, эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум интеграла, которым выражается потенциальная энергия системы. Математически проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения эквивалентна задаче вариационного исчисления — о минимуме интеграла, для которого данное дифференциальное уравнение служит уравнением Эйлера — Лагранжа. Для решения задач вариационного исчисления наряду с уравнением Эйлера могут применяться непосредственные, прямые методы; благодаря указанной эквивалентности, эти методы являются одновременно и методами решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Изложение такого рода методов, наиболее известными среди которых являются методы Ритца и Б. Г. Галеркина, и будет предметом настоящей главы. При этом мы рассмотрим применение этих методов не только для приближенного решения уравнений в частных производных, но и для обыкновенных уравнений по той причине, что для этого случая теория метода проще и служит хорошей пропедевтикой по отношению к более сложному случаю уравнений в частных производных, считать же ее общеизвестной нельзя. Наконец, приближенное решение обыкновенных уравнений вариационными методами (нахождение собственных чисел и функций) используется часто при решении уравнений в частных производных (метод Фурье).

Прежде чем перейти к изложению вариационных методов, мы в ближайшем параграфе напомним некоторые понятия вариационного исчисления и приведем для важнейших случаев формулы, устанавливающие связь между вариационными задачами и уравнениями.

§ 1. Вариационные проблемы, связанные с важнейшими дифференциальными уравнениями

Здесь мы хотим прежде всего рассмотреть вариационные задачи, связанные с простейшими наиболее важными дифференциальными уравнениями. На этих примерах можно получить достаточно ясное представление об основных фактах и методах вариационного исчисления. В конце каждого номера указываются без подробного рассмотрения вариационные проблемы, связанные с некоторыми другими краевыми задачами для дифференциальных уравнений.

Таким образом, этот параграф имеет целью ознакомить с теми идеями вариационного исчисления, которые особенно важны для пользования прямыми методами, а также дать формулы, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем или которые могут встретиться читателю при самостоятельном применении прямых методов, для решения конкретных задач. [1])

1. Задачи, приводящие к обыкновенному уравнению. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y]\,dx. \tag{1}$$

Он получает для всякой функции (кривой) $y=y(x)$, заданной для $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, определенное значение. Таким образом, величина интеграла I зависит от выбранной кривой, или, как часто говорят, представляет функционал.

Поставим следующую задачу: найти кривую $y=y(x)$, проходящую через заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) и дающую минимальное значение интегралу I. [2])

Для решения этой задачи рассуждаем следующим образом. Предположим, что $y(x)$ есть функция, дающая интегралу I минимальное значение. Пусть теперь $\eta(x)$ — любая функция, непрерывная с своей производной и обращающаяся в нуль на концах: $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$. Тогда функция $y(x)+\alpha\eta(x)$ удовлетворяет на концах тем же граничным условиям, что и $y(x)$, и при α достаточно малых сколь угодно близка к функции $y(x)$. Поэтому, так как $y(x)$ дает минимум инте-

---

[1]) Для более подробного ознакомления с вариационным исчислением рекомендуем читателю обратиться к следующим книгам: Д. Ф. Егоров [1], В. И. Смирнов, Л. В. Канторович и В. И. Крылов [1], Курант и Гильберт [1], т. 1, гл. 4, М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник [1], Н. М. Гюнтер [1], В. И. Смирнов [1], т. IV.

[2]) Здесь мы имеем в виду относительный минимум интеграла, т. е. требуем, чтобы интеграл I имел для кривой $y(x)$ значение меньшее, чем для соседних кривых, а не для всех.

гралу I, при $\alpha \neq 0$ (и малых) он должен получать бо́льшие значения, т. е.

$$I(y+\alpha\eta) \geqslant I(y).$$

Таким образом, интеграл $I(y+\alpha\eta)$, как функция от α, при $\alpha=0$ имеет минимум, а потому

$$\left.\frac{dI(y+\alpha\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0. \tag{2}$$

Вычисляя последнее выражение, получаем:

$$\left[\frac{d}{d\alpha} I(y+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}=$$

$$=\left[\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1}[p(y'+\alpha\eta')^2+q(y+\alpha\eta)^2+2f(y+\alpha\eta)]\,dx\right]_{\alpha=0}=$$

$$=\left[\int_{x_0}^{x_1}[2p(y'+\alpha\eta')\eta'+2q(y+\alpha\eta)\eta+2f\eta]\,dx\right]_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(2py'\eta'+2qy\eta+2f\eta)\,dx.$$

Мы получаем, таким образом, что если $y(x)$ дает минимум интегралу, то полученное сейчас выражение должно равняться нулю, какова бы ни была функция $\eta(x)$, удовлетворяющая поставленным выше условиям. Этому условию часто придают другую формулировку. Выражение $\left[\frac{d}{d\alpha} I(y+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}\cdot\alpha$, которое можно рассматривать и в том случае, когда y не есть функция, дающая интегралу экстремум, при малых α дает главную часть приращения интеграла I при переходе от кривой y к кривой $y+\alpha\eta$; если второй множитель α заменен на 1, то выражение это называют вариацией интеграла I и обозначают δI. Мы нашли выше, что

$$\delta I=\left[\frac{d}{d\alpha} I(y+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}\cdot 1=\int_{x_0}^{x_1}(2py'\eta'+2qy\eta+2f\eta)\,dx. \tag{3}$$

Теперь полученное нами выше условие можем высказать в такой форме: для того чтобы функция y давала минимум интегралу I, необходимо, чтобы вариация его равнялась нулю: $\delta I=0$, какова бы ни была $\eta(x)$.

Для того чтобы извлечь дальнейшие следствия, преобразуем выражение δI. С этой целью проинтегрируем по частям первое слагаемое интеграла (3):

$$\int_{x_0}^{x_1} 2py'\eta' dx = [2py'\eta]_{x=x_0}^{x=x_1} - 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(py')\eta(x)\,dx = $$

$$= -2\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(py')\eta(x)\,dx.$$

Тогда δI принимает вид:

$$\delta I = -2\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{d}{dx}(p(x)y') - qy - f\right]\eta(x)\,dx. \qquad (4)$$

Это выражение должно быть равно нулю, какова бы ни была функция $\eta(x)$, удовлетворяющая указанным выше условиям. Это возможно только в том случае, если функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}(py') - qy - f = 0. \qquad (5)$$

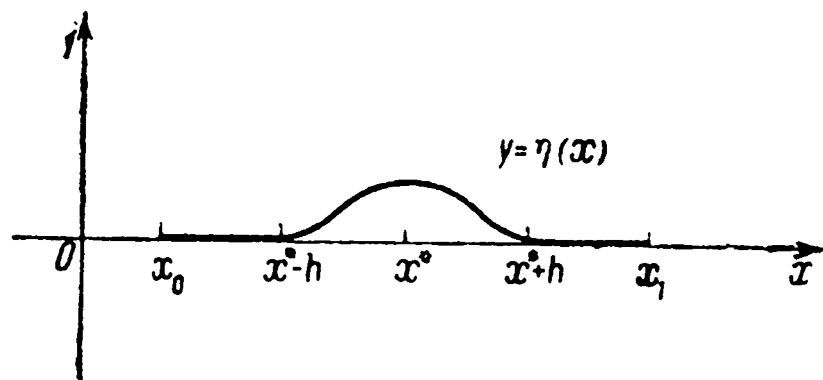


Рис. 17.

В самом деле, если левая часть уравнения (5) отлична от нуля при некотором значении $x = x^*$, то, так как все нужные функции предполагаются непрерывными, она будет сохранять знак в некоторой окрестности этой точки $(x^* - h,\ x^* + h)$. Тогда, построив функцию $\eta(x)$, положительную в этом промежутке и равную нулю вне его, и притом непрерывную вместе с производной (рис. 17), мы получили бы, очевидно, что для нее $\delta I \neq 0$, что противоречит полученному выше необходимому условию.

Итак, мы установили, что функция $y(x)$, дающая минимум интегралу I, необходимо должна удовлетворять уравнению (5).[1])

Уравнение, которому удовлетворяют экстремальные кривые, называется уравнением Эйлера для данной вариационной проблемы. В данном случае — для задачи о минимуме интеграла (1) — уравнением Эйлера служит уравнение (5), т. е. так называемое самосопряженное дифференциальное уравнение второго порядка.

Общее решение уравнения (5) содержит в своем составе две произвольные постоянные; таким образом, через заданные две точки (x_0, y_0)

---

[1]) Наше рассуждение требовало, чтобы функция $y(x)$ имела вторую производную. Некоторым видоизменением его можно установить, что то же заключение верно и если $y(x)$ предполагать просто дифференцируемой.

и (x_1, y_1) можно, вообще говоря, провести одну кривую, удовлетворяющую уравнению. Следует ожидать, что эта кривая и представляет решение данной экстремальной проблемы. Однако без дальнейших ограничений последние утверждения не могут быть доказаны и даже не всегда справедливы.

Рассмотрим теперь частный случай, когда известно, что в данном промежутке функция $p(x)$ положительна, а $q(x)$ неотрицательна:

$$p(x) > 0; \quad q(x) \geqslant 0 \text{ для } x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \tag{6}$$

В этом случае можно утверждать, что решение уравнения (5), проходящее через данные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), непременно дает абсолютный экстремум интегралу (1). В самом деле, пусть $y(x)$ есть это решение и $\bar{y}(x)$ — другая функция, удовлетворяющая условиям $\bar{y}(x_0) = y_0$; $\bar{y}(x_1) = y_1$. Тогда, полагая $\bar{y}(x) - y(x) = \eta(x)$, получаем $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$.

Имеем теперь

$$\Delta I = I(\bar{y}) - I(y) = I(y+\eta) - I(y) = \int_{x_0}^{x_1} [p(y'+\eta')^2 + q(y+\eta)^2 + 2f(y+\eta)]\,dx - \int_{x_0}^{x_1} [py'^2 + qy^2 + 2fy]\,dx =$$

$$= 2\int_{x_0}^{x_1} [py'\eta' + qy\eta + f\eta]\,dx + \int_{x_0}^{x_1} [p\eta'^2 + q\eta^2]\,dx. \tag{7}$$

В полученном выражении первый член есть не что иное, как δI [ср. (3)], и так как $y(x)$ удовлетворяет уравнению (5), а $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, то он равен нулю. Второй член наверное положителен благодаря условиям (6). Итак, в этом случае непременно $\Delta I > 0$, т. е. функция $y(x)$ дает интегралу (1) абсолютный экстремум.

Пользуясь проведенным сейчас рассуждением, можно установить для данного случая и другое важное обстоятельство — через каждые две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) может быть проведено одно и только одно решение уравнения (5). Тот факт, что не может быть двух решений, ясен сразу, ибо если бы $\bar{y}$ было другое решение, проходящее через те же самые точки, что и y, мы на основании (7) получили бы одновременно $I(\bar{y}) - I(y) > 0$ и $I(y) - I(\bar{y}) > 0$, что нелепо.

Покажем, что решение всегда имеется. Действительно, общее решение линейного уравнения (5) имеет вид:

$$y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \varphi(x).$$

Постоянные C_1 и C_2 должны быть определены на основании начальных условий из уравнений

$$C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) + \varphi(x_0) = y_0,$$
$$C_1 u_1(x_1) + C_2 u_2(x_1) + \varphi(x_1) = y_1.$$

Так как, по доказанному, эта система не может никогда иметь двух решений, то при любых свободных членах она имеет решение. Окончательно приходим к заключению, что если условие (6) выполнено, то задача о минимуме интеграла (1) имеет при любых y_0 и y_1 единственное решение, которое дается интегральной кривой уравнения (5), проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Кроме того, из сказанного явствует, что задачи: 1) нахождения функции $y(x)$, дающей минимум интегралу (1) и удовлетворяющей условиям $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$, и 2) отыскания решения уравнения (5), удовлетворяющего тем же условиям, совершенно эквивалентны.

Так, например, потенциальная энергия струны, находящейся под действием внешней нагрузки интенсивности $f(x)$, определяется формулой

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\mu}{2} y'^2 - fy\right) dx, \tag{8}$$

где $\mu > 0$ — постоянная. Таким образом, задача о нахождении положения равновесия такой струны с закрепленными концами состоит в определении минимума интеграла, стоящего справа, при условиях $y(0) = y(l) = 0$. Другой, по сказанному выше, эквивалентный путь решения задачи есть решение уравнения струны [уравнения Эйлера для интеграла (8)]:

$$\mu y'' + f(x) = 0. \tag{9}$$

Полезно отметить, что всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка является уравнением Эйлера для некоторого интеграла типа (1). Для этого достаточно показать, что такое уравнение можно всегда привести к виду (5). Чтобы установить это, нужно данное уравнение

$$py'' + ry' - qy = f \tag{10}$$

домножить на $e^{\int \frac{r-p'}{p} dx}$; оно примет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(pe^{\int \frac{r-p'}{p} dx} y'\right) - qe^{\int \frac{r-p'}{p} dx} y = fe^{\int \frac{r-p'}{p} dx}, \tag{11}$$

т. е. окажется приведенным к виду (5).

Метод, с помощью которого мы получили уравнение Эйлера для интеграла (1), является общим и с незначительными изменениями применим к различным другим задачам. Так, для так называемой

общей (простейшей) задачи вариационного исчисления о минимуме интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{1a}$$

мы получаем уравнение Эйлера в виде

$$\frac{d}{dx} F'_{y'} - F'_y = 0. \tag{5a}$$

В случае, если под знак интеграла входят производные до порядка n, т. е. речь идет о минимуме интеграла вида

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx \tag{1b}$$

при условиях

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y'_0; \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)};$$
$$y(x_1) = y_1;\ y'(x_1) = y'_1; \ldots;\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

то уравнение Эйлера будет порядка $2n$ и имеет вид:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d}{dx^2} F'_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d}{dx^n} F'_{y^{(n)}} = 0. \tag{5b}$$

Если под знаком интеграла стоит несколько неизвестных функций, т. е. речь идет о минимуме интеграла вида

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_m;\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)\,dx, \tag{1c}$$

то уравнение Эйлера заменяется на систему уравнений вида

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d}{dx} F'_{y'_1} - F'_{y_1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{d}{dx} F'_{y'_m} - F'_{y_m} = 0. \end{array}\right\} \tag{5c}$$

Выводы этих уравнений читатель может попытаться воспроизвести сам или познакомиться с ними по курсам вариационного исчисления.

Полезно отметить также, что для задач, возникающих из конкретных проблем механики, нам обычно известна и вариационная проблема, связанная с данной задачей — на основании вариационных принципов механики (минимум потенциальной энергии, минимум интеграла действия и пр.), — и дифференциальное уравнение ее; это уравнение и является уравнением Эйлера для данной вариационной

проблемы. В таких случаях, собственно, нет надобности составлять уравнение Эйлера для вариационной проблемы, однако все же, так как это весьма просто, полезно для контроля, пользуясь общими формулами, такое уравнение составить.

2. Вариационные задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона. Как характерный пример вариационной проблемы относительно функции двух переменных мы рассмотрим задачу, которая дает в качестве уравнений Эйлера известные уравнения Лапласа и Пуассона.

Рассмотрим именно задачу о минимуме интеграла

$$I=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2f(x, y)\,u\right]dx\,dy, \tag{12}$$

где интеграл распространен на плоскую область D, ограниченную контуром Γ. Точнее говоря, задача ставится так: найти функцию $u(x, y)$, непрерывную в области D вместе с частными производными первого и второго порядка, принимающую на контуре Γ заданные значения:

$$u=\varphi(s) \text{ на } \Gamma \tag{13}$$

и дающую интегралу I(12) минимальное значение.

Найдем опять необходимые условия. Пусть $u(x, y)$ дает минимум интегралу; рассмотрим значение интеграла для функции $u(x, y)+ +\alpha\eta(x, y)$, где $\eta(x, y)$ также функция, непрерывная вместе с производными 1-го и 2-го порядка и равная нулю на Γ. Как и в n° 1, убеждаемся, что в таком случае вариация интеграла должна быть равна нулю:

$$\delta I=\left[\frac{d}{d\alpha}I(u+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}=0$$

или же

$$\delta I=\iint\limits_D\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+2f\eta\right]dx\,dy=0. \tag{14}$$

В выражении δI преобразуем первые два члена с помощью формулы Грина:

$$\iint\limits_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dx\,dy=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy-\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\eta\,dx\,dy=$$
$$=\int\limits_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\eta\,dy-\frac{\partial u}{\partial y}\eta\,dx\right)-\iint\limits_D\Delta u\eta\,dx\,dy. \tag{15}$$

В полученном выражении первый криволинейный интеграл равен нулю, так как по предположению $\eta(x, y)=0$ на Γ, и остается только второй интеграл. Заменяя им первые два члена в выражении δI(14),

получаем новое выражение вариации:

$$\delta I = -2 \iint_D (\Delta u - f)\,\eta\, dx\, dy. \tag{16}$$

Так как δI должно равняться нулю, какова бы ни была функция η, то непременно должно быть удовлетворено уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{17}$$

Таким образом, уравнением Эйлера оказалось в данном случае уравнение Пуассона. Если мы обратим еще внимание на условие (13), то увидим, что решение задачи о минимуме интеграла I (12) [при условии (13)] представляет решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Если $f = 0$, уравнение (17) превращается в уравнение Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{17'}$$

Интеграл (12), который для данного случая принимает вид:

$$I(u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy, \tag{12'}$$

носит название интеграла Дирихле. Задача о минимуме его связана с задачей Дирихле для уравнения Лапласа.

В данном случае, так же как и в n° 1, можно показать, что полученные условия и достаточны. Именно, если функция $u(x, y)$ представляет решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона (17), при условии (13), и интеграл (12) имеет для нее конечное значение, то она доставляет этому интегралу абсолютный минимум, точнее, для всякой функции, удовлетворяющей условию (13) и непрерывной вместе с производными 1-го порядка,[1] интеграл (12) непременно имеет бо́льшее значение. В самом деле, пусть $\bar{u}(x, y)$ — другая функция, удовлетворяющая условию (13). Тогда $\bar{u}(x, y) = u(x, y) + \eta(x, y)$, где $\eta(x, y) = 0$ на Γ. Поэтому имеем

$$\Delta I = I(\bar{u}) - I(u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2f(u+\eta)\right] dx\, dy - \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2fu\right] dx\, dy =$$
$$= 2 \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + f\eta\right] dx\, dy +$$
$$+ \iint_D \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy. \tag{18}$$

[1]) Можно допустить даже, чтобы эти производные не существовали или терпели разрыв на некоторых линиях.

Первое слагаемое ничем не отличается от вариации δI и, так как u—решение, оно равно нулю [ср. (14) и (16)]; второе же слагаемое, очевидно, положительно. Итак, $\Delta I > 0$ и действительно u дает абсолютный минимум.

Примером механической задачи, приводящей к интегралу (12), является задача о равновесии растянутой упругой мембраны. Потенциальная энергия такой мембраны (при малых прогибах) при интенсивности нагрузки, определяемой функцией $f(x, y)$, есть

$$U = \iint_D \left\{ \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + f(x, y) u \right\} dx\, dy,$$

где μ в случае однородной мембраны — величина постоянная. Полученный интеграл несущественно отличается от интеграла (12) и уравнение Эйлера для него есть уравнение Пуассона:

$$\Delta u = \frac{1}{\mu} f(x, y),$$

а так как положение равновесия мембраны отвечает минимуму потенциальной энергии, это уравнение и есть уравнение поверхности мембраны.

Соображения, которыми мы пользовались при выводе необходимых условий (уравнения Эйлера) для интеграла (12), пригодны и для ряда других задач. Например, для общей задачи о минимуме двойного интеграла

$$I = \iint_D F(x, y, u, u'_x, u'_y)\, dx\, dy \tag{12a}$$

получаем уравнения Эйлера в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} = 0. \tag{17a}$$

Задача о минимуме интеграла

$$I = \iint_D \left[a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + cu^2 + 2fu \right] dx\, dy \tag{12b}$$

имеет уравнением Эйлера самосопряженное уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) - cu = f, \tag{17b}$$

содержащее как частный случай уравнение Пуассона.

В задаче о минимуме тройного интеграла уравнение Эйлера оказывается уравнением в частных производных с тремя переменными. Если в интеграле участвуют производные порядка выше первого, то и уравнение Эйлера оказывается порядка четвертого и выше.

Важнейшим примером интеграла этого типа является интеграл, дающий потенциальную энергию изогнутой пластинки, который мы рассмотрим ниже, в n° 4.

3. Другие виды граничных условий. Мы рассматривали задачу о минимуме интеграла (1) в предположении, что функция $y(x)$ удовлетворяет условиям: $y(x_0)=y_0$; $y(x_1)=y_1$. Эта задача привелась к граничной задаче для дифференциального уравнения (5) с теми же условиями. Однако часто оказываются интересными для дифференциальных уравнений граничные задачи с условиями других типов. Поставим вопрос о том, какие вариационные проблемы приводят к ним. Для этой цели рассмотрим прежде всего задачу о минимуме интеграла (1), не налагая никаких условий на функцию $y(x)$ или при так называемых естественных условиях. В этом случае ход рассуждений остается прежний, только для $\eta(x)$ уже нельзя пользоваться условиями $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$. Выражение (3) для δI здесь сохраняет силу, но, выполняя интегрирование по частям для первого слагаемого, мы уже не можем отбросить внеинтегральный член и потому получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} 2py'\eta'\,dx=[2py'\eta]_{x_0}^{x_1}-2\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}(py')\,\eta(x)\,dx=$$

$$=2py'\eta\,|_{x=x_1}-2py'\eta\,|_{x=x_0}-2\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}(py')\,\eta(x)\,dx.$$

Вследствие этого, выражение вариации вместо (4) принимает вид

$$\delta I=-2\left\{\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{d}{dx}(py')-qy-f\right]\eta\,dx+py'\eta\,|_{x=x_0}-py'\eta\,|_{x=x_1}\right\}. \quad (19)$$

Так как δI должно быть равно нулю для всякой функции $\eta(x)$, то, беря, в частности, $\eta(x)$ равной нулю на концах, убеждаемся, что для любой такой функции интегральный член должен равняться нулю, а следовательно, как выше, для $y(x)$ должно быть удовлетворено уравнение (5). Раз это так, то и в случае любой $\eta(x)$ интегральный член в (19) может быть отброшен. Выбирая теперь $\eta(x)$ сначала так, что $\eta(x_0)=1$, $\eta(x_1)=0$, затем так, что $\eta(x_0)=0$, $\eta(x_1)=1$, убеждаемся, что py' на концах должно быть нулем, и так как мы предполагаем $p(x)\neq 0$, то приходим к условиям

$$y'\,|_{x_0}=0, \quad y'\,|_{x_1}=0. \quad (20)$$

Таким образом, решение задачи об экстремуме интеграла (1) при естественных граничных условиях представляет решение уравнения (5) при краевых условиях (20). Чтобы получить другие виды граничных условий, нам нужно будет несколько усложнить функционал I. К интегралу (1) добавим дополнительные слагаемые, связанные с начальной

и конечной точками, и рассмотрим задачу о минимуме получившегося таким образом функционала:

$$I=\int_{x_0}^{x_1}[py'^2+qy^2+2fy]\,dx+[h_1y^2]_{x=x_1}-[h_0y^2]_{x=x_0}. \quad (21)$$

При вычислении вариации δI в данном случае мы должны будем к выражению (19) присоединить слагаемые, отвечающие дополнительным членам. Эти слагаемые, очевидно, будут:

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{[h_1(y+\alpha\eta)^2]_{x=x_1}-[h_0(y+\alpha\eta)^2]_{x=x_0}\right\}\Big|_{\alpha=0}=$$
$$=2h_1y\eta\,|_{x=x_1}-2h_0y\eta\,|_{x=x_0},$$

и окончательно выражение для δI примет вид:

$$\delta I=-2\left\{\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{d}{dx}(py')-qy-f\right]\eta\,dx+[py'\eta+h_0y\eta]_{x=x_0}-\right.$$
$$\left.-[py'\eta+h_1y\eta]_{x=x_1}\right\}. \quad (22)$$

Рассуждая, как выше, убеждаемся, что экстремаль должна быть решением уравнения (5) при условиях:

$$\left.\begin{aligned}p(x_0)y'(x_0)+h_0y(x_0)=0,\\ p(x_1)y'(x_1)+h_1y(x_1)=0.\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Полученный результат показывает, что для любых линейных однородных краевых условий можно указать соответствующую им вариационную проблему, в частности, если $h_1=h_0=0$, условия (23) обращаются в естественные условия (20).

Аналогичные результаты могут быть получены и по отношению к уравнениям с частными производными. В соответствии с тем, что мы имели для обыкновенных уравнений, к двойному интегралу (12) добавляем дополнительное слагаемое в виде криволинейного интеграла и рассматриваем вопрос о минимуме полученного функционала:

$$I=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2fu\right]dx\,dy+\int_\Gamma[\sigma(s)u^2-2\varphi(s)u]\,ds, \quad (24)$$

когда функция $u(x, y)$ не связана никаким граничным условием. При вычислении вариации δI для первого слагаемого можем воспользоваться равенствами (14) и (15), только в (15) криволинейный интеграл справа уже не может быть отброшен, так как η не обязательно равна

нулю на Г. Слагаемое, соответствующее второй части, находится без труда:

$$\left\{\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{\Gamma}[\sigma(s)(u+\alpha\eta)^2-2(u+\alpha\eta)\varphi(s)]\,ds\right\}_{\alpha=0}=$$

$$=2\int\limits_{\Gamma}[\sigma(s)\,u-\varphi(s)]\,\eta\,ds,$$

и окончательно получаем следующее значение для вариации:

$$\delta I=-2\Big\{\iint\limits_{D}(\Delta u-f)\,\eta\,dx\,dy+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\left[-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}-\sigma u+\varphi(s)\right]\eta\,ds\Big\}. \qquad (25)$$

С помощью уже использованных выше рассуждений можем убедиться в том, что множители при η как в двойном, так и в криволинейном интегралах должны быть нулями, т. е. функция u должна удовлетворять уравнению (17) и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}+\sigma u-\varphi(s)=0.$$

Этому условию, замечая, что

$$\frac{dy}{ds}=\cos(s,\ y)=\cos(n,\ x)$$

и

$$\frac{dx}{ds}=\cos(s,\ x)=-\cos(n,\ y),$$

можно придать вид

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)\,u=\varphi(s). \qquad (26)$$

В частности, если $\sigma=0$, получаем, что естественное условие для первоначального интеграла (12) есть $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

Сделаем следующее замечание, которое нами будет использовано впоследствии. Задача о минимуме интеграла (24) нами рассматривалась в предположении, что в качестве допустимых к сравнению могут быть взяты любые функции, не удовлетворяющие никаким граничным условиям. Однако, после того как установлено, что для искомой экстремали выполнено условие (26), можно при нахождении экстремали интеграла (24) заранее подчинить все допускаемые к рассмотрению функции условию (26); очевидно, минимум будет прежний.

Мы говорили выше, что интеграл (12), с точностью до множителя, представляет потенциальную энергию растянутой мембраны;

криволинейный интеграл, добавлением которого мы от интеграла (12) перешли к интегралу (24), также имеет определенное механическое значение. Именно это слагаемое добавляется к потенциальной энергии мембраны, если контур ее подвижен и на него действует внешняя сила с линейной плотностью $\varphi(s)$ и упругие силы, стремящиеся удержать границу в положении равновесия, модуль упругости которых, рассчитанный на единицу длины, равен $\sigma(s)$.

Заметим, наконец, что аналогично тому, как мы построили здесь по отношению к уравнениям (5) и (17) вариационные проблемы, приводящие к иным граничным условиям, и для других уравнений вариационные проблемы могут быть видоизменены так, чтобы получить другие, могущие оказаться интересными, граничные условия.

4. Вариационные задачи, связанные с бигармоническим уравнением. Ряд вопросов теории упругости (изгиб пластинок, плоская задача) приводят к различным граничным задачам для бигармонического уравнения[1])

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y). \tag{27}$$

С этим уравнением связана задача о минимуме интеграла

$$U = \iint\limits_D \left[(\Delta u)^2 - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right) - 2fu\right] dx\,dy - {} \\ - 2\int\limits_\Gamma p(s)\,u\,ds + 2\int\limits_\Gamma m(s)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds. \tag{28}$$

Для получения необходимого условия мы опять должны подставить $u + \alpha\eta$ вместо u и приравнять нулю производную по α (при $\alpha = 0$), впрочем, то же самое получится, если в (28) u заменить на $u + \eta$ и сохранить члены первой степени относительно η и ее производных (η — произвольная дважды дифференцируемая функция). Таким образом, получим:

$$\iint\limits_D \left[2\Delta u \Delta\eta - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y}\right) - {} \\ - 2f\eta\right] dx\,dy - 2\int\limits_\Gamma p(s)\,\eta\,ds + 2\int\limits_\Gamma m(s)\frac{\partial \eta}{\partial n}\,ds = 0. \tag{29}$$

---

[1]) Заметим, что бигармоническим называют обычно только однородное уравнение $\Delta\Delta u = 0$.

Выражения, стоящие под знаком двойного интеграла, преобразуем с помощью формулы Грина; получим:

$$\iint_D \Delta u \Delta \eta \, dx \, dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta u \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right] dx \, dy -$$

$$- \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial}{\partial x} \Delta u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial}{\partial y} \Delta u\right)\right] dx \, dy +$$

$$+ \iint_D \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta u\right) dx \, dy =$$

$$= \iint_D (\Delta \Delta u) \eta \, dx \, dy + \int_\Gamma \Delta u \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} dy - \frac{\partial \eta}{\partial y} dx\right) -$$

$$- \int_\Gamma \eta \left(\frac{\partial (\Delta u)}{\partial x} dy - \frac{\partial (\Delta u)}{\partial y} dx\right) =$$

$$= \iint_D \Delta \Delta u \eta \, dx \, dy + \int_\Gamma \Delta u \frac{\partial \eta}{\partial n} ds - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} \Delta u \eta \, ds. \tag{30}$$

Производя аналогичные преобразования и для второй половины интеграла и подставляя результаты преобразования в (29), приведем его к виду:

$$\iint_D (\Delta \Delta u - f) \eta \, dx \, dy + \int_\Gamma \left[M(u) + m(s)\right] \frac{\partial \eta}{\partial n} ds -$$

$$- \int_\Gamma (P(u) + p) \eta \, ds = 0; \tag{31}$$

для краткости мы ввели обозначения:

$$\left.\begin{aligned} M(u) &= \nu \Delta u + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} x_n^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} x_n y_n + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} y_n^2\right), \\ P(u) &= \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} x_n x_s + \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}(x_n y_s + x_s y_n) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} y_n y_s\right], \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

где x_n, y_n и x_s, y_s обозначают направляющие косинусы нормали и касательной. Так как функция η произвольна внутри, то из (31), обратив внимание на двойной интеграл, заключаем, что для функции u должно выполняться уравнение (27). Далее, так как η, так же как и $\frac{\partial \eta}{\partial n}$, на контуре произвольна, то для u должны выполняться следующие граничные условия:

$$M(u) + m = 0; \quad P(u) + p = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{33}$$

которые и являются для данной задачи естественными условиями.

Отметим, прежде всего, случай граничных условий, соответствующих закрепленной пластинке, являющийся наиболее простым:

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{34}$$

В этом случае и η должна быть взята удовлетворяющей тем же условиям, поэтому криволинейные интегралы в условии (31) исчезают, остается только двойной интеграл, и поэтому вновь получается, что для u должно выполняться уравнение (27). Сам функционал (28), подлежащий минимизации, может быть для этого случая значительно упрощен. Во-первых, очевидным образом исчезают криволинейные интегралы, во-вторых, так как ν не отразилось на уравнении, а только на граничных условиях (33), вместо которых мы пользуемся сейчас условиями (34), то можно придать ν любое значение. Беря $\nu = 1$, получаем, что задаче решения уравнения (27) при условиях (34) отвечает задача о минимуме интеграла

$$I = \iint\limits_D [(\Delta u)^2 - 2fu]\, dx\, dy. \tag{35}$$

Можно было бы также принять $\nu = 0$, тогда мы пришли бы к интегралу

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - 2fu\right] dx\, dy. \tag{35'}$$

Отметим также случай, когда пластинка подперта, т. е. дано, что $u = 0$ на контуре. Тогда можно допускать только η, которые равны нулю на контуре, так что остается только первое из условий (33), к которому присоединяется условие $u = 0$. Таким образом, для этого случая граничные условия имеют вид:

$$u = 0; \quad M(u) + m = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{36}$$

Отметим, что условия (33) значительно упрощаются, если часть контура есть прямая линия; так, на прямой вида $x = a$ они принимают вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + m = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} + p = 0. \tag{33'}$$

5. Вариационные проблемы, связанные с нахождением собственных чисел и собственных функций. Для определенности мы рассмотрим этот вопрос для уравнения Лапласа в случае нулевых граничных условий. Собственным числом здесь будет такое число λ, что уравнение

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{37}$$

при условии

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{38}$$

допускает решение, не равное тождественно нулю в D; это решение и будет собственной функцией. Покажем, что задача нахождения собственных чисел и функций связана с вариационной проблемой о минимуме интеграла Дирихле:

$$I=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \tag{12'}$$

при условии

$$H=\iint\limits_D u^2\,dx\,dy=1. \tag{39}$$

Именно, этот минимум I, при условиях (38) и (39), равен λ_1 — первому (наименьшему) собственному числу, а функция $u_1(x, y)$ доставляющая этот минимум, есть соответствующая λ_1 собственная функция $u_1(x, y)$. Пусть, действительно, λ_1 — этот минимум, а u_1 — функция, реализующая его. Очевидно, что для любой функции $u(x, y)\neq 0$ можно подобрать такой множитель c, что $H(cu)=1$, а тогда

$$\frac{I(u)}{H(u)}=\frac{I(cu)}{H(cu)}\geqslant\lambda_1;$$

$$I(u)-\lambda_1 H(u)\geqslant 0,\quad \text{т. е.}\quad \iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\lambda_1 u^2\right]dx\,dy\geqslant 0.$$

Заменим в этом неравенстве u на $u_1+\alpha\eta$, где $\eta=0$ на Γ. Тогда при $\alpha\neq 0$ левая часть будет неотрицательна, при $\alpha=0$ она обращается в нуль и достигает минимума. Поэтому производная от нее по α при $\alpha=0$ должна быть нулем:

$$\left\{\frac{d}{d\alpha}\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\alpha\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2-\lambda_1(u_1+\alpha\eta)^2\right]dx\,dy\right\}_{\alpha=0}=$$

$$=2\iint\limits_D\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\lambda_1 u_1\eta\right]dx\,dy=0. \tag{40}$$

Преобразуя первые два члена с помощью формулы (15), придадим последнему равенству вид:

$$\iint\limits_D(\Delta u_1+\lambda_1 u_1)\,\eta\,dx\,dy=0.$$

Так как это равенство должно выполняться для любой функции η (равной 0 на Γ), то

$$\Delta u_1+\lambda_1 u_1=0,$$

т. е. действительно λ_1 есть собственное число, а u_1 — собственная функция. В том, что λ_1 есть наименьшее собственное число, убеждаемся непосредственно, так как если λ_2 есть другое собственное число и

u_2 — соответствующая собственная функция ($\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0$; $u_2 = 0$ на Г), нормированная так, что $\iint\limits_D u_2^2 dx = 1$, то для нее, пользуясь (15) при $u = \eta = u_2$, находим:

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\iint\limits_D \Delta u_2 u_2\, dx\, dy = \lambda_2 \iint\limits_D u_2^2\, dx = \lambda_2,$$

и так как λ_1 есть минимум интеграла (12′), то $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. Последнее равенство, так как левая часть его положительна, показывает, между прочим, что уравнение (37) не имеет отрицательных собственных значений.

Второе собственное значение и функция получаются рассмотрением задачи о минимуме того же интеграла (12′), если функцию u кроме прежних условий ($u = 0$ на Г, $\iint\limits_D u^2 dx\, dy = 1$) подчинить еще условию ортогональности к u_1: $\iint\limits_D u u_1\, dx\, dy = 0$. В самом деле, пусть u_2 есть функция, дающая минимум интегралу (12′) при этих условиях, а λ_2 — значение этого минимума. Как и в предыдущем случае, имеем, что интеграл

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \lambda_2 u^2\right] dx\, dy \tag{41}$$

имеет значение $\geqslant 0$ для всех функций u, удовлетворяющих условиям: $u = 0$ на Г и $\iint\limits_D u u_1\, dx\, dy = 0$; при этом 0 достигается при $u = u_2$.

Пусть теперь $\eta(x, y)$ любая функция, равная 0 на Г; положим $\zeta = \eta + k u_1$, где k подобрано так, что ζ ортогональна к u_1. Заменим в (41) u на $u_2 + \alpha\zeta$: полученная функция α будет, согласно сказанному выше, достигать минимума, равного нулю при $\alpha = 0$. Приравнивая нулю производную по α при $\alpha = 0$, получим, как в (40):

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \lambda_2 u_2 \zeta\right] dx\, dy = 0,$$

или, заменяя ζ на $\eta + k u_1$,

$$k \iint\limits_D \left[\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial y} - \lambda_2 u_2 u_1\right] dx\, dy + \\ + \iint\limits_D \left[\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \lambda_2 u_2 \eta\right] dx\, dy = 0.$$

Первый член в левой части равен нулю, так как, добавляя к нему $k \iint\limits_D (\lambda_2 - \lambda_1) u_2 u_1\, dx\, dy = 0$ (вследствие ортогональности u_2 к u_1),

можем придать ему вид (40), где только η заменена на u_2; преобразуя второй член так, как мы преобразовали интеграл (40), можно предыдущее равенство привести к виду

$$\iint_D [\Delta u_2 + \lambda_2 u_2] \eta \, dx \, dy = 0.$$

Из того, что полученное выражение равно нулю для любой функции (равной 0 на Г), заключаем, что

$$\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0,$$

т. е. действительно λ_2 есть собственное число, а u_2 — соответствующая собственная функция. Рассуждая как при доказательстве того, что λ_1 есть наименьшее из собственных значений, можно убедиться в том, что λ_2 — второе по величине собственное значение. Аналогичным образом можно установить, что следующие собственные числа представляют значения минимума интеграла (12′), при условии, что функция u кроме условий (38) и (39) подчинена условию ортогональности к предыдущим собственным функциям.

Подобно тому как к собственным значениям уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ приводят вариационные задачи, связанные с интегралом Дирихле, могут быть указаны и вариационные проблемы, приводящие к собственным значениям и собственным функциям для других уравнений.

§ 2. Метод Ритца и метод Б. Г. Галеркина

В предыдущем параграфе мы видели, что решение граничных задач для различных типов уравнений обыкновенных и в частных производных будет найдено, если будет решена задача о минимуме того или иного интеграла. Для приближенного решения этой последней задачи простой и эффективный метод был предложен в 1908 г. Ритцем.[1]) Этот метод получил особенно широкое распространение в технике благодаря деятельности ряда русских ученых, работавших в области теории упругости. Его теоретическое исследование проведено в основном в работах советских математиков, в особенности Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

В 1915 г. Б. Г. Галеркиным[2]) был предложен еще более простой в применении и в то же время более общий и универсальный метод

---

[1]) Ритц [1], [3].

[2]) Б. Г. Галеркин [2], Я. И. Перельман [1]; в этой статье указана и дальнейшая библиография. Многочисленные применения обоих методов даны в книге Л. С. Лейбензона [1].

решения граничных задач, который за последнее время получил еще большее применение и распространение, чем метод Ритца. Проблема его сходимости получила разрешение в работе М. В. Келдыша [1].

Хотя метод Б. Г. Галеркина относится не только к задачам, связанным с вариационными проблемами, мы даем его изложение именно в этой главе, ввиду его тесной связи с вариационными методами и, в частности, с методом Ритца.

1. Основная идея метода Ритца и метода Б. Г. Галеркина. Изложим основную идею метода Ритца.

Рассмотрим пока общую задачу о минимуме двойного интеграла [см. § 1 (12а)]:

$$I(u)=\iint_D F(x,\ y,\ u,\ u'_x,\ u'_y)\,dx\,dy \tag{1}$$

при условии

$$u=\varphi(s) \text{ на } \Gamma, \tag{2}$$

где Γ — контур, ограничивающий область D.

Пусть $u^*(x,y)$ есть точное решение этой задачи, а $I(u^*)=m$ — значение минимума. Ясно, что если нам удастся построить функцию $\bar{u}(x,\ y)$, которая удовлетворяет условию (2) и для которой значение интеграла $I(u)$ весьма близко к m, то следует ожидать, что $\bar{u}(x,\ y)$ будет хорошим приближением к истинному решению задачи. Если же нам удастся найти минимизирующую последовательность $\bar{u}_n$, т. е. последовательность функций, удовлетворяющих условиям (2), для которой $I(\bar{u}_n)\to m$, то есть основание ожидать, что такая последовательность будет в том или ином смысле сходиться к решению.

Для фактического нахождения функции $\bar{u}(x,\ y)$, дающей значение интеграла I, близкое к минимальному, Ритцем был предложен такой прием. Рассмотрим семейство функций, зависящее от нескольких параметров

$$u=\Phi(x,\ y,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \tag{3}$$

и такое, что при всех значениях параметров удовлетворено условие (2). Ограничим теперь класс допустимых функций функциями семейства (3) и найдем среди них ту, которая дает интегралу (1) наименьшее значение. Эта задача представляется уже несравненно более легкой, чем первоначальная. Действительно, подставив в интеграл (1) вместо u выражение (3) и выполнив необходимые дифференцирования и интегрирования, мы увидим, что I превратится в функцию n переменных $a_1,\ a_2,\ldots,a_n: I=I\ (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Так как мы желаем получить минимум этой функции, то числа a_i должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Решив эту систему, мы получим, вообще говоря, определенные значения параметров $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, дающие функции $I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ абсолютный минимум; выбрав в семействе (3) функцию, отвечающую именно этим значениям параметров, мы и получим требуемое приближенное решение

$$\bar{u}(x, y) = \Phi(x, y, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n). \qquad (5)$$

Следует заметить еще, что в конкретных случаях фактический процесс нахождения этого приближенного решения, как мы увидим ниже, оказывается весьма простым. Дело в том, что в практически наиболее важных случаях в интеграле I подынтегральное выражение представляет многочлен второй степени относительно u, u'_x, u'_y, а семейство (3) берется зависящим линейным образом от параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, вследствие чего уравнения (4) оказываются первой степени, число же их весьма невелико — практически, достаточное приближение получается при $n = 2, 3, 4, 5$, а часто даже и при $n = 1$.

Остановимся теперь на вопросе о том, в каком случае можно ожидать, что таким путем получится сколь угодно близкое приближение к действительному минимуму. С помощью метода Ритца можно получать ряд последовательно все более точных приближений. Для этой цели нужно рассмотреть ряд семейств функций

$$u(x, y) = \Phi_n(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (6)$$

каждое из которых шире предыдущего в результате добавления дополнительного параметра. Пусть $\bar{u}_n$ есть n-е приближение — функция, дающая наименьшее значение интегралу I по сравнению со всеми функциями n-го семейства. Так как каждое следующее семейство включает в себя все функции предыдущего, т. е. при каждой следующей задаче класс допустимых функций шире, то ясно, что последовательные минимумы идут не возрастая:

$$I(\bar{u}_1) \geqslant I(\bar{u}_2) \geqslant \ldots \qquad (7)$$

Поставим теперь вопрос о том, в каком случае можно утверждать что последовательность функций $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots$ минимальная, т. е. последовательность интегралов $I(\bar{u}_1)$, $I(\bar{u}_2), \ldots$ стремится к истинному минимуму:

$$\lim_{n\to\infty} I(\bar{u}_n) = I(u^*) = m. \qquad (8)$$

Покажем, что достаточным условием для этого является так называемая относительная полнота системы семейств (6), которая состоит в следующем: каковы бы ни были функция u, непрерывная вместе с $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ и удовлетворяющая граничному условию (2), и

положительное число $\varepsilon>0$, можно будет указать такое n и такую функцию среди n-го семейства (6)

$$u_n^*(x, y)=\Phi_n(x, y, a_1^*, \ldots, a_n^*),$$

что повсюду в области D будут справедливы неравенства

$$|u_n^*-u|<\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial u_n^*}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial u_n^*}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\right|<\varepsilon, \tag{8'}$$

т. е., короче говоря, любая допустимая функция может быть сколь угодно точно апроксимирована вместе с частными производными посредством функций из данных семейств.

Докажем, что это условие является достаточным для того, чтобы последовательность была минимальной. Действительно, если условие полноты выполнено, то, применяя его к решению нашей задачи u^*, мы сможем подобрать такую функцию $u_n^*(x, y)$ из некоторого n-го семейства

$$u_n^*(x, y)=\Phi_n(x, y, a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*),$$

что будут выполняться неравенства

$$|u_n^*-u^*|<\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial u_n^*}{\partial x}-\frac{\partial u^*}{\partial x}\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial u_n^*}{\partial y}-\frac{\partial u^*}{\partial y}\right|<\varepsilon.$$

Тогда, вследствие непрерывности F, разность

$$F\left(x, y, u_n^*, \frac{\partial u_n^*}{\partial x}, \frac{\partial u_n^*}{\partial y}\right)-F\left(x, y, u^*, \frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial u^*}{\partial y}\right)$$

будет сколь угодно мала в области D, а тогда и разность интегралов этих функций будет сколь угодно мала, т. е.

$$I(u_n^*)-I(u^*)=\iint_D\left[F\left(x, y, u_n^*, \frac{\partial u_n^*}{\partial x}, \frac{\partial u_n^*}{\partial y}\right)-\right.$$
$$\left.-F\left(x, y, u^*, \frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial u^*}{\partial y}\right)\right]dx, dy<\varepsilon',$$

где ε' — сколь угодно малое положительное число. Далее, u_n^* есть одна из функций n-го семейства (6), функция же $\bar{u}_n$ дает наименьшее значение интегралу по сравнению со всеми функциями этого семейства, поэтому мы должны иметь $I(\bar{u}_n)\leqslant I(u_n^*)$, или

$$I(u^*)\leqslant I(\bar{u}_n)\leqslant I(u_n^*)<I(u^*)+\varepsilon',$$

и так как ε' — сколь угодно мало, соотношение (8) установлено.

В случае, если рассматривается вопрос о минимуме интеграла при свободных граничных условиях, то формулированное выше требование

полноты изменяется в том отношении, что должна существовать возможность апроксимировать с помощью функций семейств (6) любые функции, непрерывные с частными производными. Впрочем, если принять во внимание то обстоятельство, что искомая функция, как нам известно, заведомо удовлетворяет определенным граничным условиям (естественным), то приходим к заключению, что достаточной является возможность апроксимации именно таких функций.

Мы остановились сразу на вопросе о полноте, так как он имеет принципиальное значение — нарушение требования полноты может привести к грубой ошибке: сколь угодно далекие приближения по методу Ритца будут сильно отличаться от результата.

Дальнейшие общие рассмотрения, связанные с методом Ритца: вопрос о том, в каком случае минимальная последовательность будет сходиться к решению задачи, каков порядок приближения, погрешность в n-м приближении и пр. — мы откладываем до § 4.

Дадим теперь также общее представление о другом важном прямом методе — методе Б. Г. Галеркина.

Основная идея метода Б. Г. Галеркина может быть изложена довольно коротко. Пусть речь идет о нахождении решения уравнения

$$L(u) = 0,$$

где L — некоторый дифференциальный оператор с двумя переменными, удовлетворяющего однородным граничным условиям. Будем приближенное решение задачи искать в виде

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x, y),$$

где $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторая система заранее выбранных функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, а c_i — неопределенные коэффициенты. Можем считать всегда, что функции $\varphi_i(x, y)$ линейно-независимы и представляют первые n функций некоторой системы функций $\{\varphi_i(x, y)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, полной в данной области. Для того чтобы $\bar{u}(x, y)$ представляло точное решение данного уравнения, нужно, чтобы $L(\bar{u})$ равнялось нулю тождественно, а это требование, если считать, что $L(\bar{u})$ непрерывно, равносильно требованию ортогональности выражения $L(\bar{u})$ ко всем функциям системы $\{\varphi_i(x, y)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Однако, имея в своем распоряжении только n постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, мы можем, вообще говоря, удовлетворить лишь n условиям ортогональности. Записав эти условия, приходим к системе уравнений

$$\iint_D L(\bar{u}(x, y))\, \varphi_i(x, y)\, dx\, dy = \iint_D L\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x, y)\right) \varphi_i(x, y)\, dx\, dy = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

которая служит для определения коэффициентов c_i. Найдя c_i из этой системы — линейной в случае линейного оператора L, — подставляя их в выражение $\bar{u}$, приходим к требуемому приближенному решению.

Уравнения метода Б. Г. Галеркина могут быть получены и из механических соображений на основе принципа возможных перемещений. На этом мы не будем останавливаться, отсылая читателя к статье самого Б. Г. Галеркина.

Характер соображений, из которых мы исходили при составлении уравнений Б. Г. Галеркина, показывает, что никакая связь данного уравнения с вариационными проблемами не была использована, поэтому именно этот метод является совершенно универсальным. Он может быть применен с успехом к уравнениям различных типов: эллиптическим, гиперболическим, параболическим, даже если они и не связаны вовсе с вариационными проблемами, чем он выгодно отличается от метода Ритца. Однако для задач, связанных с вариационными проблемами, он находится в тесном взаимоотношении с методом Ритца, а в ряде случаев эквивалентен последнему в том смысле, что приводит, обычно с более простыми выкладками, к тому же самому приближенному решению. Поэтому в дальнейшем в применении к отдельным классам задач представляется целесообразным параллельное рассмотрение обоих методов.

2. Применение методов Ритца и Б. Г. Галеркина к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим применение метода Ритца к решению самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка (см. § 1 (5)):

$$L(y) = \frac{d}{dx}(py') - qy - f = 0 \tag{9}$$

при условиях (вместо x_0 и x_1 берем теперь 0 и l, что не умаляет общности)

$$y(0) = y_0; \quad y(l) = y_1. \tag{10}$$

Эта задача, как мы видели, может быть заменена задачей о минимуме интеграла

$$I(y) = \int_0^l [py'^2 + qy^2 + 2fy]\,dx \tag{11}$$

при тех же условиях (10).

Нам удобнее будет считать в дальнейшем, что предельные условия однородны, т. е. имеют вид

$$y(0) = y(l) = 0; \tag{10'}$$

если бы это было не так, мы могли бы добиться этого, вводя в уравнение (9) вместо y новую неизвестную функцию z, определенную равенством

$$y = z + \frac{x}{l}y_1 + \frac{l-x}{l}y_0.$$

Будем предполагать еще, что в рассматриваемом промежутке выполнены неравенства:

$$p(x)>0; \quad q(x)\geqslant 0 \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{11'}$$

Зададимся теперь системой конкретных функций $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \ldots, n$), непрерывных в $[0, l]$ вместе с первой производной, линейно-независимых и удовлетворяющих условиям (10'); в качестве таких функций можно принять, например,

$$\varphi_k=\sin\frac{k\pi x}{l} \quad \text{или} \quad \varphi_k=(l-x)x^k \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Будем искать теперь приближенное решение по методу Ритца в семействе линейных комбинаций функций φ_k, т. е. среди функций вида

$$y_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k. \tag{13}$$

Подставляя выражение y_n в интеграл (11), получим:

$$I(y_n)=\int_0^l (py_n'^2+qy_n^2+2fy_n)\,dx=\int_0^l\Big[p\Big(\sum a_k\varphi_k'\Big)^2+$$

$$+q\Big(\sum a_k\varphi_k\Big)^2+2f\sum a_k\varphi_k\Big]dx=\sum_{k,s=1}^{n}\alpha_{k,s}a_ka_s+2\sum_{k=1}^{n}\beta_k a_k, \tag{14}$$

где

$$\alpha_{k,s}=\alpha_{s,k}=\int_0^l (p\varphi_k'\varphi_s'+q\varphi_k\varphi_s)\,dx; \qquad \beta_k=\int_0^l f\varphi_k\,dx. \tag{15}$$

Дифференцируя выражение (14) по a_s, получаем систему уравнений для определения постоянных a_k в двух видах:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I(y_n)}{\partial a_s}=\int_0^l (py_n'\varphi_s'+qy_n\varphi_s+f\varphi_s)\,dx=0 \quad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{16a}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,s}a_k+\beta_s=0 \quad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Решение системы уравнений (16) обозначим через $a_k^{(n)}$ ($k=1, 2, \ldots, n$), тогда приближенное решение по методу Ритца в n-м приближении будет

$$y_n=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)}\varphi_k. \tag{17}$$

Покажем, что это решение всегда определено и притом единственным образом, т. е. соответствующие обстоятельства имеют место

для системы уравнений (16). Чтобы установить последнее, нужно показать, как известно, что соответствующая однородная система уравнений не имеет решения, отличного от нуля. Предположим противное, т. е. что имеются такие $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, не все равные нулю, что выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,s}\bar{a}_k = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\int_0^l (p\bar{y}_n'\varphi_s' + q\bar{y}_n\varphi_s)dx = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\bar{y}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k\varphi_k$. Умножая последние равенства на $\bar{a}_s$ и складывая, получим, очевидно,

$$\int_0^l (p\bar{y}_n'^2 + q\bar{y}_n^2)\,dx = 0;$$

но это равенство, ввиду условий (11′), возможно, лишь если $\bar{y}_n = 0$, т. е. $\sum \bar{a}_k\varphi_k = 0$. Последнее же соотношение противоречит предположенной линейной независимости функций φ_k.

Заметим, что системе уравнений (16) можно придать еще другой вид, который в некоторых случаях облегчает ее составление. Именно, интегрируя первый член равенства (16a) по частям, пользуясь тем, что φ_k и y_n равны нулю на концах, найдем:

$$\int_0^l py_n'\varphi_s'dx = [py_n'\varphi_s]_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx}(py_n')\,\varphi_s dx = -\int_0^l \frac{d}{dx}(py_n')\,\varphi_s dx.$$

Заменяя последним выражением первый член в (16a), изменив знак и воспользовавшись кратким обозначением (9), придадим системе (16) такой простой вид:

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dx}(py_n') - qy_n - f\right]\varphi_s dx = \int_0^l L(y_n)\,\varphi_s dx = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n). \qquad (16b)$$

После того как уравнения приведены к такой форме, видно, что они представляют не что иное, как уравнения метода Б. Г. Галеркина, написанные для данной задачи согласно общему правилу, указанному в предыдущем номере.

Проведенное преобразование системы (16a) в систему (16b) показывает, что для данной задачи применение методов Ритца и Б. Г. Галеркина приводит к одному и тому же приближенному ре-

шению, хотя метод Б. Г. Галеркина дает возможность более простого и непосредственного составления соответствующей системы. Однако основное преимущество метода Б. Г. Галеркина в данной задаче состоит в том, что при его применении не используется связь данной граничной задачи с вариационной, а потому он может быть применен в случае любого уравнения второго порядка и не требует предварительного приведения уравнения к самосопряженной форме, а также обязательного выполнения условий (11').

Мы знаем (§ 1, n° 1), что при условиях (11') наша вариационная проблема имеет определенное решение $y^*(x)$, это и есть именно единственное решение уравнения (9) при условиях (10'). Эта функция (в предположении непрерывности p', q и f) будет непрерывной вместе с двумя производными. Поставим теперь вопрос о том, в каком случае приближения y_n по методам Ритца и Б. Г. Галеркина (17) будут сходиться к $y(x)$. С этой целью нужно установить, прежде всего, что последовательность y_n минимальная, для чего, в свою очередь, как мы видели в n° 1, нужно установить относительную полноту систем функций (13). Конечно, эта полнота не может быть установлена при любом выборе φ_k и может даже не иметь места, однако, если φ_k выбраны одним из двух конкретных способов (12), которые нами указаны выше, условие полноты выполняется, т. е. для любой функции $y(x)$, непрерывной вместе с производной и удовлетворяющей условиям (10'), можно подыскать такую линейную комбинацию $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\varphi_k$, что

$$|y(x)-\sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k(x)|<\varepsilon \text{ и } |y'(x)-\sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k'(x)|<\varepsilon. \tag{18}$$

Это утверждение получается почти сразу из теоремы Вейерштрасса о возможности приближения непрерывной функции как тригонометрическим, так и алгебраическим многочленом.[1])

Пусть сначала $\varphi_k=\sin\frac{k\pi x}{l}$. Возьмем любую $y(x)$, удовлетворяющую условиям (10'). Для функции $y'(x)$ можем подыскать тригонометрический полином $T(x)=b_0+\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos\frac{k\pi x}{l}$ такой, что

$$|y'(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2(l+1)}.$$

Заметим, что $|b_0|=\left|\frac{1}{l}\int\limits_0^l T(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2(l+1)}+\left|\frac{1}{l}\int\limits_0^l y'(x)dx\right|=\frac{\varepsilon}{2(l+1)}$.

---

[1]) См. В. И. Смирнов [1], т. II, стр. 445, Валле-Пуссен [1], т. II, стр. 115, Л. В. Канторович [12], стр. 141.

Отсюда

$$\left|y'(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \cos\frac{k\pi x}{l}\right| < |y'(x) - T(x)| + |b_0| < \frac{\varepsilon}{l+1} < \varepsilon.$$

Положим теперь

$$\tau(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} b_k \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k l}{k\pi} \sin\frac{k\pi x}{l},$$

тогда имеем:

$$|y(x) - \tau(x)| = \left|\int_0^x \left[y'(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \cos\frac{k\pi x}{l}\right] dx\right| < \frac{l\varepsilon}{l+1} < \varepsilon,$$

$$|y'(x) - \tau'(x)| = \left|y'(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \cos\frac{k\pi x}{l}\right| < \varepsilon.$$

Так как $\tau(x)$ имеет вид $\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$, то для данного случая полнота доказана.

Пусть теперь $\varphi_k(x) = x^k(l - x)$. По теореме Вейерштрасса можем подыскать такой полином $P_1(x)$ степени n, что $|y'(x) - P_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2(l+1)}$. Положим теперь $P(x) = \int_0^x P_1(x)\,dx - \frac{x}{l}\int_0^l P_1(x)\,dx$.

Тогда, так как $\left|\int_0^l P_1(x)\,dx\right| = \left|\int_0^l [P_1(x) - y'(x)]\,dx\right| < \frac{\varepsilon l}{2(l+1)}$, имеем:

$$|y(x) - P(x)| \leqslant \int_0^x |y'(x) - P_1(x)|\,dx + \frac{x}{l}\left|\int_0^l P_1(x)\,dx\right| <$$

$$< x\frac{\varepsilon}{2(l+1)} + \frac{x}{l}\,\frac{\varepsilon l}{2(l+1)} < \varepsilon,$$

$$|y'(x) - P'(x)| \leqslant |y'(x) - P_1(x)| + \left|\frac{1}{l}\int_0^l P_1(x)\,dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(l+1)} + \frac{\varepsilon}{2(l+1)} < \varepsilon.$$

Далее, из выражения $P(x)$ ясно, что это — полином степени $n+1$ и что $P(0) = P(l) = 0$, поэтому он имеет вид

$$P(x) = x(l - x)(a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k.$$

Итак, и для этого случая возможность удовлетворить обоим неравенствам (18) установлена. Согласно n° 1, мы можем заключить теперь, что последовательность функций (17) будет минимальной:

$$\lim_{n\to\infty} I(y_n) = I(y^*). \tag{19}$$

Докажем теперь, что для задачи о минимуме интеграла (11) из того факта, что последовательность минимальная [выполнено (19)], вытекает равномерная сходимость ее к решению:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y^*(x). \tag{20}$$

Для доказательства воспользуемся формулой (7) § 1; применив ее для $\bar{y} = y_n$ и $y = y^*$, найдем:

$$I(y_n) - I(y^*) = \int_0^l [p(y'_n - y^{*\prime})^2 + q(y_n - y^*)^2]\, dx.$$

Отсюда, так как $p(x) > 0$ [см. (11')], найдем:

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dx}(y_n - y_n^*)\right]^2 dx \leqslant [I(y_n) - I(y^*)]\,\frac{1}{\min p}.$$

Тогда

$$|y_n(x) - y^*(x)| = \left|\int_0^x \frac{d}{dx}(y_n - y^*)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^x \left[\frac{d}{dx}(y_n - y^*)\right]^2 dx \cdot \int_0^x 1^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}{}^{1)} \leqslant \frac{l^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\min p}}\sqrt{I(y_n) - I(y^*)}. \tag{21}$$

Полученное неравенство, ввиду (19), и устанавливает равномерную сходимость $y_n(x)$ к $y^*(x)$. Суммируя полученные результаты, приходим к выводу, что если в качестве φ_k выбраны функции, определенные равенствами (12), процесс Ритца и Б. Г. Галеркина дает последовательность функций $y_n(x)$, равномерно сходящуюся к решению задачи о минимуме интеграла (11) при условиях (10').

Остановимся теперь несколько на случае других граничных условий.

---

[1]) Мы воспользовались здесь неравенством Буняковского $\left|\int_a^b f\varphi\,dx\right| \leqslant \left[\int_a^b f^2\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$ для случая $f(x) = \frac{d}{dx}(y_n - y^*)$, $\varphi(x) = 1$.

Мы видели выше (см. § 1, n° 3), что решение уравнения (9) при других граничных условиях приводит к решению задачи о минимуме интеграла (11) или дополнительного интеграла [(21) § 1] при свободных граничных условиях. Поэтому в таком случае, чтобы система была полной, нужно, чтобы существовала возможность приближения любой функции комбинациями функций системы, так что вместо функций (12) можно в этом случае выбирать φ_k следующим образом:

$$\varphi_0 = 1; \ \varphi_k = \cos\frac{k\pi x}{l} \ (k = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

или соответственно

$$\varphi_0 = 1; \ \varphi_k = x^k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{23}$$

Следует заметить, что так как заранее известно, каким граничным условиям удовлетворяет решение, целесообразно для уменьшения числа n неизвестных параметров и рассматриваемую комбинацию $\sum a_k\varphi_k$ подчинять этим условиям; с их помощью удается выразить две из постоянных a_k через прочие. Рассмотрим, например, задачу о минимуме интеграла (11) при свободных условиях. В таком случае [см. § 1, (20)] решением является интеграл уравнения (9), удовлетворяющий условиям:

$$y'(0) = y'(l) = 0. \tag{24}$$

В этом случае вместо системы функций (23) можно рассмотреть такую систему:

$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_1 = 2x^3 - 3lx^2; \quad \varphi_k = (l - x)^2 x^k \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{25}$$

Непосредственно ясно, что функции системы (25) удовлетворяют условиям (24), также легко убедиться, что всякую функцию, непрерывную вместе с производной, удовлетворяющую условиям (24), можно приблизить с помощью некоторой линейной комбинации функции (25).

Аналогичным образом в случае условий

$$y'(0) + k_0 y(0) = 0; \quad y'(l) + k_1 y(l) = 0 \tag{26}$$

возможно избрать такую систему функций:

$$\varphi_0 = x^2\left(x - l - \frac{l}{2 + k_1 l}\right); \quad \varphi_1 = (l - x)^2\left(x + \frac{1}{2 - k_0 l}\right);$$
$$\varphi_k = x^k (l - x)^2 \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Наконец, аналогичные соображения могут быть высказаны и относительно уравнений 4-го порядка. Не останавливаясь на этом, рассмотрим теперь три конкретных примера применения методов Ритца и Б. Г. Галеркина.

Пример 1. Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения

$$y'' + y + x = 0; \quad y(0) = y(1) = 0,$$

точное решение которой, как легко убедиться, $y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$.

Соответствующая вариационная задача [ср. (9) и (11)] есть задача о минимуме интеграла

$$I = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\,dx.$$

Согласно методам Ритца и Галеркина [см. (12), (13)] приближенное решение надлежит разыскивать в виде

$$y_n = x(1-x)(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}).$$

Примем сначала $n = 1$. Подставляя $y_1 = a_1\varphi_1 = a_1 x(1-x)$ в систему (16b) вместо y_n, для определения a_1 получим уравнение

$$\int_0^1 L(y_1)\varphi_1\,dx = \int_0^1 [-2a_1 + a_1 x(1-x) + x]\,x(1-x)\,dx = 0$$

или[1])

$$-\frac{3}{10}a_1 + \frac{1}{12} = 0,$$

откуда $a_1 = \frac{5}{18}$, и требуемое приближенное решение будет

$$y_1 = \frac{5}{18}x(1-x).$$

Пусть теперь $n = 2$. Тогда $\varphi_1 = x(1-x)$, $\varphi_2 = x^2(1-x)$ и y_2 ищется в виде

$$y_2 = x(1-x)(a_1 + a_2 x).$$

---

[1]) При производстве вычислений в этом и в других случаях удобно пользоваться формулой:

$$\int_0^l x^k (l-x)^m\,dx = \frac{k!\,m!}{(k+m+1)!}\,l^{k+m+1},$$

а также

$$\int_0^l x^{2k}(l^2 - x^2)^m\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\,m(m-1)\ldots 1}{\left(m+\frac{2k+1}{2}\right)\left(m+\frac{2k-1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}\,l^{2k+2m+1}.$$

Подставляя выражение y_2 в систему (16b) ($L(y)=y''+y+x$), придем к уравнениям:

$$\int_0^1 L(y_2)\varphi_1\,dx=$$

$$=\int_0^1 [-2a_1+a_2(2-6x)+x(1-x)(a_1+a_2x)+x]\,x(1-x)\,dx=0,$$

$$\int_0^1 L(y_2)\varphi_2\,dx=$$

$$=\int_0^1 [-2a_1+a_2(2-6x)+x(1-x)(a_1+a_2x)+x]\,x^2(1-x)\,dx=0$$

или, после вычисления интегралов:

$$\frac{3}{10}a_1+\frac{3}{20}a_2=\frac{1}{12};\quad \frac{3}{20}a_1+\frac{13}{105}a_2=\frac{1}{20},$$

откуда

$$a_1=\frac{71}{369},\quad a_2=\frac{7}{41}\ \text{и}\ y_2=x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right).$$

Сравнивая значения точного решения $y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$, а также y_1 и y_2 при $x=\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}$, находим:

x	y	y_1	y_2
$\frac{1}{4}$	0,044	0,052	0,044
$\frac{1}{2}$	0,070	0,069	0,069
$\frac{3}{4}$	0,060	0,052	0,060

Отсюда видно, что погрешность первого приближения — порядка 0,01, второго — 0,001.

Пример 2. Интегрирование уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$

в промежутке (1, 2) при условиях $y(1)=1$; $y(2)=2$.

При помощи подстановки $y=z+x$ сведем исходное уравнение к уравнению

$$x^2z''+xz'+(x^2-1)z+x^3=0.$$

Новые граничные условия $z(1)=z(2)=0$.

Преобразуем уравнение к самосопряженной форме:

$$xz''+z'+\frac{x^2-1}{x}z+x^2=0$$

(впрочем, применяя метод Б. Г. Галеркина, можно было бы такого преобразования не делать).

Положим $\varphi_1 = (x-1)(2-x)$; $z_1 = a_1\varphi_1$. Для определения a_1 имеем уравнение:

$$\int_1^2 \left[-2a_1x + (3-2x)a_1 + \frac{x^2-1}{x}(x-1)(2-x)a_1 + x^2\right](x-1)(2-x)\,dx = 0.$$

Решая его, получим $a_1 = 0{,}8110$. Тогда

$$y_1 = 0{,}8110(x-1)(2-x) + x.$$

Точное решение выражается через бесселевы функции и имеет вид

$$y = 3{,}6072 I_1(x) + 0{,}75195 Y_1(x).$$

Сравним y с y_1 при частных значениях x:

x	y	y_1
1,3	1,4706	1,4703
1,5	1,7026	1,7027
1,8	1,9294	1,9297

Таким образом, в этом примере очень хороший результат получился даже в первом приближении.

Пример 3. Рассмотрим решение уравнения 4-го порядка

$$[(x+2l)y'']'' + qy - kx = 0$$

при условиях

$$y = 0;\quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = l;$$

$$(x+2l)y'' = 0;\quad \frac{d}{dx}[(x+2l)y''] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Для постоянных k, l, q будем иметь в виду в дальнейшем значения $l = q = 1$; $k = 3$.

Основные функции φ_1, φ_2 выбираем в виде многочленов и так, чтобы они удовлетворяли указанным выше граничным условиям (см. стр. 286). Можно принять именно:

$$\varphi_1(x) = (x-l)^2(x^2+2lx+3l^2);\quad \varphi_2(x) = (x-l)^3(3x^2+4lx+3l^2).$$

Первое приближение. Разыскиваем u_1 в виде $u_1 = a_1^{(1)}\varphi_1$. Ищем $a_1^{(1)}$. Уравнение (16b) принимает вид

$$\int_0^l L(u_1)\varphi_1\,dx = \int_0^l \{a_1^{(1)}[(x+2l)\varphi_1'']'' + q\varphi_1 - kx\}\varphi_1\,dx = 0,$$

или, если произвести вычисление необходимых интегралов,

$$24a_1^{(1)}l + 57{,}6a_1^{(1)} + \frac{161}{315}qa_1^{(1)}l^4 + \frac{9}{5}qa_1^{(1)}l^2 + \frac{k}{3}l = 0$$

и если принять во внимание численные значения постоянных l, q, k, то найдем:

$$a_1^{(1)} = 0{,}011917;\quad u_1 = a_1^{(1)}\varphi_1 = 0{,}011917(x-1)^2(x^2+2x+3).$$

Второе приближение. Ищем решение в виде

$$u_2 = a_1^{(2)}\varphi_1 + a_2^{(2)}\varphi_2.$$

Для определения $a_1^{(2)}$ и $a_2^{(2)}$ имеем систему уравнений

$$\int_0^l L(u_2)\varphi_1\,dx = 0; \qquad \int_0^l L(u_2)\varphi_2\,dx = 0,$$

которая в раскрытом виде, если учесть численные значения постоянных, принимает вид

$$83{,}911a_1^{(2)} - 67{,}213a_1^{(2)} = 1,$$
$$67{,}213a_1^{(2)} - 91{,}882a_2^{(2)} = 0{,}71430,$$

откуда

$$a_1^{(2)} = 0{,}013743; \qquad a_2^{(2)} = 0{,}002279,$$
$$u_2 = 0{,}013743\,(x-1)^2(x^2+2x+3) + 0{,}002279\,(x-1)^3(3x^2+4x+3).$$

Не имея возможности сравнить приближения с точным решением, чтобы составить представление о величине погрешности, сравним их между собой, например, при $x = \frac{1}{2}$ имеем:

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}012662; \qquad u_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}012964.$$ [1])

3. Применение методов Ритца и Б. Г. Галеркина к решению уравнений в частных производных второго порядка. Рассмотрим задачу о решении уравнения Пуассона

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f = 0 \tag{28}$$

при условии

$$u = \varphi(s) \text{ на } \Gamma. \tag{29}$$

Всегда легко удается условие (29) заменить на более простое

$$u = 0 \text{ на } \Gamma; \tag{29'}$$

для этого достаточно построить любую функцию $h(x, y)$,[2] обращающуюся в $\varphi(s)$ на Γ; тогда, вводя вместо u новую неизвестную функцию z, определяемую формулой $u = z + h(x, y)$, получим для нее уже условие вида (29'); эта функция также будет удовлетворять уравнению Пуассона лишь с другим свободным членом. Будем поэтому в дальнейшем рассматривать задачу именно с условием (29'). Эта задача, как мы видели (§ 1, n° 2), равносильна задаче о миниму-

---

[1]) Многочисленные примеры применения метода Б. Г. Галеркина даны в книге Я. А. Протусевич [1].

[2]) Заметим, что иногда функцию $h(x, y)$ приходится строить так, что в разных частях области она задана различным образом.

ме интеграла

$$I=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2fu\right]dx\,dy \tag{30}$$

при том же условии (29′). Для применения методов Ритца и Б. Г. Галеркина нужно иметь систему функций $\varphi_k(x, y)$, обращающихся в 0 на Г и полную в области D, т. е. такую, что с помощью их линейных комбинаций можно приблизить любую функцию $u(x, y)$, непрерывную вместе с частными производными, удовлетворяющую условию (29′), точнее говоря, по $\varepsilon>0$ и u можно указать такие a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, чтобы выполнялись неравенства:

$$\left.\begin{aligned}&\left|u-\sum_1^n a_k\varphi_k\right|<\varepsilon;\\&\left|\frac{\partial u}{\partial x}-\sum_1^n a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right|<\varepsilon;\\&\left|\frac{\partial u}{\partial y}-\sum_1^n a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right|<\varepsilon,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Впрочем, эти условия могут быть несколько ослаблены, именно последние два неравенства могут быть заменены на следующие:

$$\left.\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\sum_1^n a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2dx\,dy<\varepsilon\\ \text{и}\quad&\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\sum_1^n a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2dx\,dy<\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{31′}$$

Если такая система избрана, n-е приближение по методу Ритца ищется по форме

$$u_n=\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k. \tag{32}$$

Подставляя это выражение вместо u в (30), получим:

$$I(u_n)=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2+2fu_n\right]dx\,dy=$$

$$=\iint_D\left[\left(\sum_1^n a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\sum_1^n a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2+2f\sum_1^n a_k\varphi_k\right]dx\,dy=$$

$$=\sum_{k,\,s=1}^n \alpha_{k,s}a_ka_s+2\sum_{k=1}^n\beta_ka_k, \tag{33}$$

где

$$\alpha_{k,s}=\alpha_{s,k}=\iint_D\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_s}{\partial y}\right)dx\,dy;\quad \beta_k=\iint_D f\varphi_k\,dx\,dy. \qquad (34)$$

Отсюда система, определяющая a_k, может быть написана в любом из двух видов:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I(u_n)}{\partial a_s}=\iint_D\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi_s}{\partial y}+f\varphi_s\right)dx\,dy=0$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (35\text{a})$$

либо

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,s}a_k+\beta_s=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (35)$$

Решение системы уравнений (35) обозначим через $a_k^{(n)}$ [тот факт, что ее решение существует и единственно, мог бы быть установлен так же, как это было выше сделано по отношению к системе (16) n° 2]. Тогда n-е приближение по методу Ритца будет

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}a_k^{(n)}\varphi_k(x,y). \qquad (36)$$

Наконец, опять системе уравнений (35) можно придать и другой вид. Именно, пользуясь формулой (15) из § 1 для $u=u_n$ и $\eta=\varphi_s$, найдем, что

$$\iint_D\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_s}{\partial y}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_s}{\partial y}\right)dx\,dy=-\iint_D\left(\frac{\partial^2u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_n}{\partial y^2}\right)\varphi_s\,dx\,dy.$$

Применяя это преобразование к левой части равенства (35а) и меняя знак, получим систему уравнений, определяющих a_k в форме системы уравнений метода Б. Г. Галеркина:

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_n}{\partial y^2}-f\right)\varphi_s\,dx\,dy=$$

$$=\iint_D L(u_n)\,\varphi_s\,dx\,dy=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (35\text{b})$$

Совершенно те же рассуждения применимы и к задаче о решении общего самосопряженного уравнения эллиптического типа [см. § 1, (17b)]

$$L(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)-cu-f=0 \qquad (37)$$

при граничных условиях (29'). Задача эта равносильна задаче о минимуме интеграла

$$\iint_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + cu^2 + 2fu\right] dx\, dy. \tag{38}$$

Опять при разыскании приближенного решения в виде (32) для определения постоянных a_k приходим к системе (35), где только на этот раз

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{k,s} = \alpha_{s,k} &= \iint_D \left[a\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_s}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_s}{\partial y} + c\varphi_k\varphi_s\right] dx\, dy; \\ \beta_k &= \iint_D f\varphi_k\, dx\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

И в данном случае система (35) имеет определенное решение если только выполнены неравенства

$$a(x, y) > 0; \quad b(x, y) > 0; \quad c(x, y) \geqslant 0. \tag{40}$$

Заметим, наконец, что опять с помощью соответствующего преобразования систему, определяющую a_k, можно привести к виду системы уравнений Б. Г. Галеркина:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u_n}{\partial y}\right) - cu_n - f\right]\varphi_s\, dx\, dy = 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n). \tag{41}$$

В качестве функций $\varphi_k(x, y)$ для задач с двумя независимыми переменными обычно выбирают различные комбинации тригонометрических функций или полиномы, удовлетворяющие граничным условиям. Полноту системы обычно удается обнаруживать, пользуясь следующей обобщенной теоремой Вейерштрасса:

Если функция $v(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D вместе с частными производными $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, то можно по $\varepsilon > 0$ указать такой полином $P(x, y)$, что в области D будут выполнены неравенства:[1]

$$|v(x, y) - P(x, y)| < \varepsilon; \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right| < \varepsilon; \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| < \varepsilon. \tag{42}$$

В частности, с помощью этой теоремы можно установить полноту следующей системы функций. Предположим, что нам удалось

[1]) Валле-Пуссен [1], т. II, стр. 120. Правда, здесь эта теорема доказана для случая, когда область D квадрат. Но для обычно рассматриваемых областей функцию $v(x, y)$ можно с сохранением непрерывности ее и $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ распространить на некоторый квадрат, содержащий данную область; см. Г. М. Фихтенгольц, [1], т. I, дополнение.

определить в области функцию $\omega(x, y)$, непрерывную, имеющую внутри D ограниченные и непрерывные производные $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ и удовлетворяющую условиям

$$\omega(x, y) > 0 \text{ внутри } D; \quad \omega(x, y) = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{43}$$

Тогда в качестве основной системы функций можно принять систему, составленную из произведений ω на различные степени x и y:

$$\varphi_0 = \omega; \quad \varphi_1 = \omega x; \quad \varphi_2 = \omega y; \quad \varphi_3 = \omega x^2; \quad \varphi_4 = \omega xy; \; \ldots \tag{44}$$

Действительно, очевидно, что функции $\varphi_k = 0$ на Γ.

Перейдем к доказательству полноты системы функций (44).

Пусть $u(x, y)$ — непрерывная в области D функция, равная 0 на Γ, производные которой непрерывны внутри D, и такая, что интеграл

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

конечен. Нетрудно убедиться на основании существования последнего интеграла, что можно контур Γ и линии внутри D, на которых $u(x, y) = 0$, заключить в такую открытую область D_1, что

$$\iint_{D_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy < \varepsilon.$$

Обозначим через $\delta > 0$ минимум $|u(x, y)|$ в $D_2 = D - D_1$. Легко показать, что если $\delta_2 > 0$ некоторое число, меньшее δ и ε, а δ_1 $(0 < \delta_1 < \delta_2)$ выбрано достаточно малым, то можно построить непрерывную вместе с производной функцию $M(u)$, удовлетворяющую условиям: 1) $M(u) = 0$ при $|u| \leqslant \delta_1$; 2) $M(u) = u$ при $|u| \geqslant \delta_2$; 3) $|M'(u)| < 1 + \varepsilon$. Положим теперь $\bar{u}(x, y) = M(u(x, y))$. Очевидно по 2) в D_2 будет $\bar{u}(x, y) = u(x, y)$. Поэтому:

$$\iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right]^2 dx\, dy =$$

$$= \iint_D [M'(u) - 1]^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy < (2 + \varepsilon)^2 \iint_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy < (2 + \varepsilon)^2 \varepsilon.$$

Аналогичное неравенство выполняется и для производных по переменной y. Функция $\bar{u}(x, y)$ по 1) равна нулю вблизи контура Γ, поэтому, так как $\omega(x, y) > 0$ внутри D, $v(x, y) = \frac{\bar{u}(x, y)}{\omega(x, y)}$ непрерывна вместе с частными производными в области D. Если мы заключим область D в прямоугольник и положим $v(x, y) = 0$ в остальной части его, эти обстоятельства не нарушатся. В таком случае, по приведенной выше теореме, мы сможем подобрать такой полином $P(x, y)$, что будут выполняться неравенства (42).

Для функции $\pi(x, y) = \omega(x, y) P(x, y)$ будем иметь тогда

$$|\bar{u} - \pi| = |\omega| |v - P| < K\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \pi}{\partial x}\right| = \left|\omega \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial x} - \omega \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial \omega}{\partial x}\right| <$$
$$< K_1\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial y}\right| = \left|\omega \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega \frac{\partial p}{\partial y} - P \frac{\partial \omega}{\partial y}\right| < K_2\varepsilon.$$

Отсюда

$$|u - \pi| \leqslant |u - \bar{u}| + |\bar{u} - \pi| < (2 + \varepsilon)\delta_2 + K\varepsilon + K'\varepsilon;$$

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \pi}{\partial x}\right)^2 dx\,dy \leqslant 2 \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 dx\,dy +$$
$$+ 2 \iint\limits_D \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \pi}{\partial x}\right)^2 dx\,dy < \varepsilon (2 + \varepsilon)^2 + 2K_1^2 \varepsilon^2 \iint\limits_D dx\,dy < K''\varepsilon;$$

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial y}\right)^2 dx\,dy < K'''\varepsilon.$$

Итак, неравенства типа (31′) для некоторой комбинации функций системы ($\pi = \omega P$) установлены, и полнота системы, обеспечивающая минимальность последовательности $u_n(x, y)$, доказана. [1])

Отметим, наконец, что мы рассматривали сейчас только возможность апроксимации алгебраическими полиномами, но из той же теоремы Вейерштрасса с помощью подходящей замены независимых переменных (например, $x = \sin \varphi$; $y = \sin \theta$ или $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$) можно устанавливать и возможность апроксимации, а также полноту различных других систем функций.

Остановимся еще несколько на способе построения функции $\omega(x, y)$. В некоторых случаях функция $\omega(x, y)$ определяется весьма просто. Так, например, для прямоугольника $[-a, a; -b, b]$ можно принять $\omega(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$; для окружности радиуса R с центром в начале $\omega(x, y) = R^2 - x^2 - y^2$. Укажем некоторые общие правила построения функции $\omega(x, y)$.

1) Если контур, ограничивающий область D, допускает уравнение вида $F(x, y) = 0$, где F — функция, непрерывная вместе с частными производными, то можно принимать $\omega(x, y) = \pm F(x, y)$.

Пример такого рода представляет данное выше определение функции ω для окружности.

2) Для случая выпуклого многоугольника, уравнения сторон которого: $a_1x + b_1y + c_1 = 0; \ldots; a_mx + b_my + c_m = 0$, можно принять

$$\omega(x, y) = \pm (a_1x + b_1y + c_1) \ldots (a_mx + b_my + c_m).$$

Примером такого рода является упомянутый выше случай прямоугольника. Этот же пример сочетания уравнений пригоден и в различных случаях областей, ограниченных кривыми линиями. Так, например, для шпонки, составленной окружностями радиуса a и $\frac{a}{2}$

[1]) См. Л. В. Канторович [14].

(см. рис. 18), можно принять

$$\omega(x, y) = (a^2 - x^2 - y^2)(x^2 - ax + y^2).$$

3) Значительно сложнее дело обстоит в случае невыпуклых многоугольников. Здесь при построении $\omega(x, y)$, чтобы учесть входящий угол, нужно вводить модули и во всяком случае функцию $\omega(x, y)$

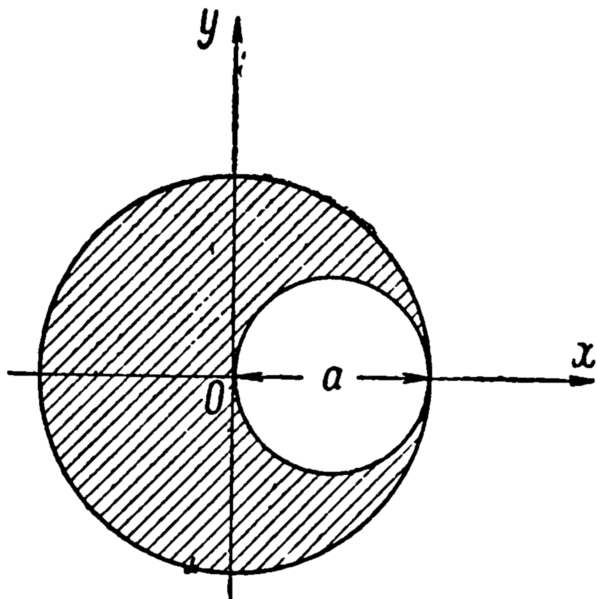


Рис. 18.

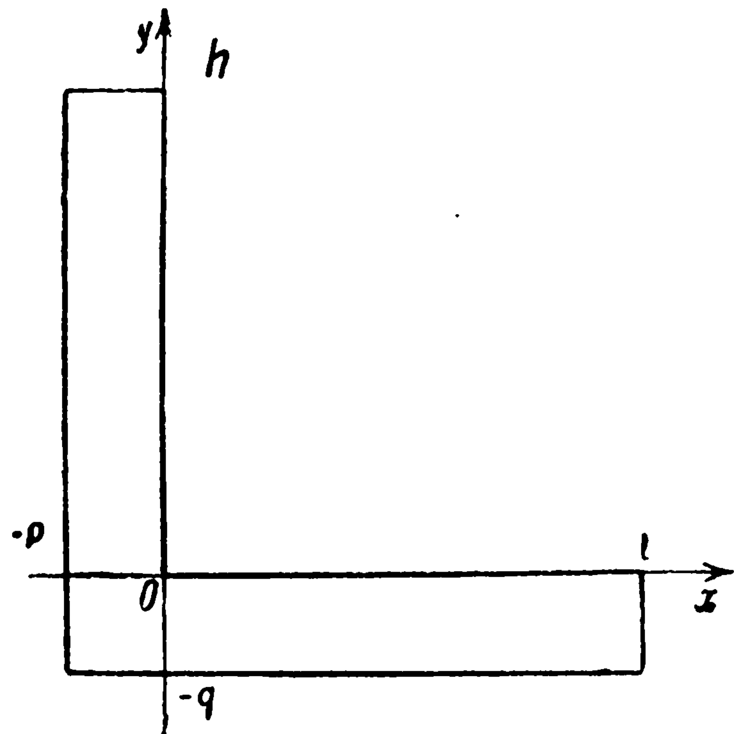


Рис. 19.

приходится задавать различным образом в разных частях области. Покажем способ определения $\omega(x, y)$ на примере уголка, изображенного на рис. 19. Тогда $\omega(x, y)$ можно определить так:

$$\omega(x, y) = (|x| + |y| - x - y)(x+p)(y+q)(l-x)(h-y) =$$
$$= \begin{cases} -2y(x+p)(y+q)(l-x)(h-y) & \text{в} \quad [0,\ l;\ -q,\ 0], \\ -2(x+y)(x+p)(y+q)(l-x)(h-y) & \text{в} \quad [-p,\ 0;\ -q,\ 0] \\ -2x(x+p)(y+q)(l-x)(h-y) & \text{в} \quad [-p,\ 0;\ 0,\ h]. \end{cases}$$

Мы могли бы также принять

$$\omega(x, y) = (x^2 + y^2 - x|x| - y|y|)(x+p)(y+q)(l-x)(h-y);$$

тогда была бы обеспечена непрерывность не только для ω, но и для ее частных производных первого порядка. Можно здесь поступить и несколько иначе: задать прямую функцию $u_n(x, y)$ в трех частях области различными выражениями:

$$u_n(x, y) = \begin{cases} (x+p)\,x\,(h-y)(a_1 + a_2x + a_3y + \ldots + a_ny^m) & \text{в} \\ & [-p,\ 0;\ 0,\ h], \\ (x+p)(y+q)(b_1 + b_2x + b_3y + \ldots + b_ny^m) & \text{в} \\ & [-p,\ 0;\ -q,\ 0], \\ (y+q)\,y\,(l-x)(c_1 + c_2x + c_3y + \ldots + c_ny^m) & \text{в} \\ & [0,\ l;\ -q,\ 0], \end{cases}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — параметры, которые должны быть связаны условием сопряжения [тождественного равенства двух выражений $u_n(x, y)$] на прямых $x=0$ и $y=0$, именно:

$$(x+p)\,xh\,(a_1+a_2x+a_4x^2+\ldots)=(x+p)\,q\,(b_1+b_2x+b_4x^2+\ldots),$$
$$p(y+q)(b_1+b_3y+\ldots+b_ny^m)=(y+q)\,yl\,(c_1+c_3y+\ldots+c_ny^m)$$

Приведенными условиями можно ограничиться в первых приближениях, в дальнейшем целесообразно присоединить аналогичным образом составленные условия для первых и вторых частных производных.[1])

Наконец, упомянем еще об одной возможности решения задач для такого рода контуров методами Ритца и Б. Г. Галеркина. Предположим, что такой контур можно разделить на несколько частей (например, прямоугольников), для каждой из которых мы умеем решать задачу Дирихле. Зададимся тогда на линиях раздела областей выражением определенного вида для неизвестной функции, включающим в свой состав только несколько неопределенных параметров. Тогда для каждой частичной области мы можем составить выражение неизвестной функции. После этого мы можем вычислить значение интеграла I для всей области, но оно, конечно, будет зависеть от введенных выше неопределенных параметров. Приравнивая нулю производные от последнего выражения по этим параметрам, получим уравнения для их определения. После того как они будут найдены, и будет завершено нахождение приближенного решения.

Мы до сих пор говорили о задаче Дирихле. Остановимся теперь несколько на других видах граничных условий. Рассмотрим уравнение Пуассона (28) при однородных граничных условиях:

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)\,u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{45}$$

Эта задача, как мы видели (§ 1, n° 3), сводится к вопросу о минимуме

$$I=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2fu\right]dx\,dy+\int\limits_\Gamma u^2\sigma(s)\,ds \tag{46}$$

при свободных граничных условиях.

Для применения метода Ритца в данном случае нужно иметь систему функций $\{\varphi_k(x, y)\}$, удовлетворяющую только условию полноты, т. е. такую, что любая функция, непрерывная с частными производными в области D, может быть апроксимирована вместе с

---

[1]) По поводу решения граничных задач для такого рода областей см. Л. В. Канторович [14]. Решение численного примера дано в заметке С. М. Лехтика [1].

производными линейной комбинацией функций системы. Если такая система имеется, то опять разыскиваем n-е приближение в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x, y). \tag{32}$$

Подставляя выражение (32) в интеграл (46) и приравнивая нулю производные по a_s, получим, как выше, для определения a_k систему уравнений

$$\iint_D \left[\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_s}{\partial y} + f\varphi_s\right] dx\,dy + \int_\Gamma \sigma(s) u_n \varphi_s ds = 0. \tag{47a}$$

Преобразуя первые два слагаемые с помощью формулы Грина [ср. § 1, (15), а также стр. 271], найдем: [1])

$$\iint_D \left[\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_s}{\partial y}\right] dx\,dy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right)\varphi_s\,dx\,dy + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\varphi_s\,dy - \frac{\partial u_n}{\partial y}\varphi_s dx\right) =$$

$$= -\iint_D \Delta\, u_n \varphi_s\,dx\,dy + \int_\Gamma \frac{\partial u_n}{\partial n}\varphi_s\,ds.$$

Подставляя полученное выражение в (47a) и меняя знак, придадим системе для определения a_k следующий вид:

$$\iint_D L(u_n)\,\varphi_s\,dx\,dy - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_n}{\partial n} + \sigma(s) u_n\right)\varphi_s\,ds =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - f\right)\varphi_s\,dx\,dy - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_n}{\partial n} + \sigma(s)\,u_n\right)\varphi_s\,ds = 0. \tag{47b}$$

В случае, если $\sigma(s) > 0$, система для определения a_k будет определенной; если $\sigma(s) \equiv 0$, то функция $u_n(x, y)$ будет определена только с точностью до постоянной.

Заметим, что как мы упоминали в n° 1, хотя мы не связаны никакими условиями, представляется целесообразным заранее функции $\varphi_k(x, y)$ подобрать так, чтобы для них было удовлетворено граничное условие (45), так как в этом случае, во-первых, облегчается нахождение приближенного решения — ту же самую точность можно получить при меньшем числе независимых параметров, во-вторых, благодаря тому, что для φ_k и, следовательно, для u_n выполнено усло-

---

[1]) Обращаем внимание на то, что буквы n и s, стоящие в виде индексов, обозначают номера, в других случаях те же буквы обозначают длину дуги и нормаль.

вие (45), система (47b) для определения a_k упрощается и принимает вид:

$$\iint_D L(u_n)\varphi_s\,dxdy = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{48}$$

При свободном варьировании в качестве функций φ_k можно брать произведения степеней x и y, так что $u_n(x, y)$ будет полиномом:

$$u_n(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + \ldots + a_ny^m.$$

Эта система будет полной в любой области. В случае, если это легко осуществимо, то, как мы указывали выше, желательно добиться того, чтобы на всем контуре или части его функция $u_n(x, y)$ удовлетворяла условию (45). Если мы подчиним $u_n(x, y)$ такому условию, то часть параметров a_k при этом исключается. Отметим, однако, что в случае, когда этого трудно добиться (невыпуклые многоугольники), мы можем оставить свободное варьирование. Таким образом, для таких случаев граничная задача (45) является, пожалуй, более простой, чем задача Дирихле, и в подобных случаях можно решение задачи Дирихле заменить на решение задачи с условием (45) при постоянном σ, которое затем следует устремить к ∞.

Упомянем, наконец, что для некоторых частных случаев удается, вводя сразу бесконечное число параметров, определить их по методу Ритца и получить таким образом точное решение задачи.

Приведем теперь несколько примеров применения методов Ритца.

Пример 1. Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня прямоугольного сечения (см. гл. I, § 1, n° 1). Эта задача приводится к решению уравнения Пуассона $\Delta u = -2$ при условии $u = 0$ на контуре. Рассмотрим два пути решения этой задачи методом Б. Г. Галеркина.

А. Стороны прямоугольника принимаем равными $2a$ и $2b$, начало берем в центре прямоугольника. Выбирая $\omega(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$, ищем решение, ввиду очевидной симметрии его, в следующей форме:

$$u_0(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(A_1 + A_2x^2 + A_3y^2 + \ldots + A_nx^{2i}y^{2j}).$$

Пусть сначала $n = 1$. Составляем уравнение для определения A_1 [ср. (35b) $f(x, y) = -2$], получим:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} [-2(b^2 - y^2)A_1 - 2(a^2 - x^2)A_1 + 2](a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\,dx\,dy = 0,$$

или

$$-\frac{128}{45}a^3b^3(a^2 + b^2)A_1 + \frac{32}{9}a^3b^3 = 0,$$

откуда

$$A_1 = \frac{5}{4(a^2 + b^2)}; \quad u_1(x, y) = \frac{5}{4}\,\frac{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}{a^2 + b^2}.$$

Приближенное значение для момента оказывается

$$M = 2G\vartheta \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} u_1(x, y)\,dx\,dy = 2G\vartheta\,\frac{5}{4}\cdot\frac{16}{9}\,\frac{a^3b^3}{a^2 + b^2} = \frac{40}{9}\,G\vartheta\,\frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}.$$

В частности, в случае квадратного сечения ($b=a$) получим $M=\frac{20}{9}G\vartheta a^4 = 0{,}1388\,(2a)^4 G\vartheta$ вместо точного $0{,}1406\,(2a)^4 G\vartheta$.

При разыскании второго приближения ограничимся случаем квадратного сечения, тогда, в силу симметрии относительно диагоналей, очевидно, должны быть $A_2=A_3$, и, следовательно, это приближение нужно искать в виде

$$u_2(x,y)=(a^2-x^2)(a^2-y^2)(A_1+A_2(x^2+y^2)).$$

Не проводя здесь вычислений подробно, укажем, что для A_1 и A_2 получаются значения $A_1=\frac{5}{8}\frac{259}{177}\frac{1}{a^2}$; $A_2=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{35}{277}\frac{1}{a^4}$ и, следовательно,

$$u_2(x,\ y)=\frac{35}{16\cdot 277}\frac{1}{a^2}(a^2-x^2)(a^2-y^2)\left(74+15\frac{x^2+y^2}{a^2}\right).$$

Для момента отсюда находим значение $M_2=0{,}1404\,(2a)^4 G\vartheta$. Ошибка около 0,15%.

Для значений в центре получаем $u_1(0{,}0)=0{,}625a^2$; $u_2(0{,}0)=0{,}584a^2$, точно же $u(0{,}0)=0{,}586a^2$. Значительно бо́льшая погрешность получается в напряжениях, которые выражаются через $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$. Так, во втором приближении эта ошибка достигает 4%.

Б. Теперь будем искать решение в виде выражения, составленного из тригонометрических функций, причем введем сразу бесконечное множество параметров

$$u(x,\ y)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}\ \sum_{m=1,3,5,\ldots} a_{m,\ n}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}.$$

Тот факт, что функции $\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}$ обращаются в нуль на границах прямоугольника и образуют полную систему относительно функций, удовлетворяющих условиям симметрии, очевиден. Ввиду ортогональности этих функций друг к другу легко убедиться, что уравнение (35b), служащее для нахождения $a_{m,n}$, для данного случая принимает вид

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Big[-\sum_k\sum_l a_{k,\ l}\frac{k^2\pi^2}{4a^2}\cos\frac{k\pi x}{2a}\cos\frac{l\pi y}{2b}-\sum_k\sum_l a_{k,\ l}\frac{l^2\pi^2}{4b^2}\cos\frac{k\pi x}{2a}\times$$
$$\times\cos\frac{l\pi y}{2b}+2\Big]\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}\,dx\,dy=0$$

или

$$-ab\left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2}+\frac{n^2\pi^2}{4b^2}\right)a_{m,n}+2\frac{16ab}{\pi^2 mn}(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}=0,$$

откуда окончательно:

$$a_{m,\ n}=\frac{128a^2b^2(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\pi^4 mn(b^2m^2+a^2n^2)};$$

$$u(x,y)=\frac{128a^2b^2}{\pi^4}\sum_{n,\ m=1,3,5,}\sum(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}\frac{\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}}{mn(b^2m^2+a^2n^2)}.$$

Найденное решение совпадает с тем, которое получается с помощью двойных рядов (см. гл. I, § 4, n° 2) для $f(x, y) = -2$.

Пример 2. Найдем для того же прямоугольника решение задачи Неймана: $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на контуре, для уравнения Пуассона

$$\Delta u = y.$$

Решение будем разыскивать в виде полинома, при этом из соображений симметрии ясно, что оно должно представлять нечетную функцию от y и четную от x, следовательно, ищем его в виде

$$u_n(x, y) = A_1 + A_2y + A_3x^2 + A_4y^3 + A_5x^2y + A_6x^4 + A_7x^4y + \\ + A_8x^2y^3 + A_9y^5 + \ldots$$

Как мы указывали, целесообразно подчинить это решение граничным условиям (ограничиваемся введенными коэффициентами):

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = \pm(A_3 2a + A_5 2ay + A_6 4a^3 + A_7 4a^3y + A_8 2ay^3) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|_{y=\pm b} = \pm(A_2 + A_4 3b^2 + A_5x^2 + A_7x^4 + A_8x^2 3b^2 + A_9 5b^4) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x и y, получим ряд уравнений, связывающих постоянные, которые дадут: $A_5 = A_7 = A_8 = 0$; $A_3 = -2a^2A_6$; $A_2 = -3b^2A_4 - 5b^4A_9$. Кроме того, так как решение определяется с точностью до постоянной, можно принять $A_1 = 0$. Следовательно, приближенное решение мы должны искать в виде

$$\bar{u}(x, y) = A_6(x^4 - 2a^2x^2) + A_4(y^3 - 3b^2y) + A_9(y^5 - 5b^4y).$$

Так как выбранные нами функции $\varphi_1 = x^4 - 2a^2x^2$; $\varphi_2 = y^3 - 3b^2y$; $\varphi_3 = y^5 - 5b^4y$ удовлетворяют граничным условиям, то для определения постоянных A можем воспользоваться уравнениями (48) (следует принять $f(x, y) = y$). В результате вычислений оказывается: $A_6 = A_9 = 0$; $A_4 = \frac{1}{6}$, что в данном случае приводит к точному решению задачи $u = \frac{1}{6}(y^3 - 3b^2y)$. [1])

4. Применение к бигармоническому уравнению. Как мы видели (§ 1, n° 4), задаче решения бигармонического уравнения

$$L(u) = \Delta\Delta u - f(x, y) = 0 \tag{49}$$

при условиях

$$u = 0; \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \Gamma \tag{50}$$

отвечает вариационная задача о минимуме интеграла

$$I = \iint\limits_D [(\Delta u)^2 - 2fu]\, dx\, dy \tag{51}$$

---

[1]) Относительно других применений методов Ритца и Б. Г. Галеркина, кроме цитированных выше монографий Л. С. Лейбензона [1] и Я. А. Протусевича [1], укажем на статьи Б. А. Соколова [1], Л. Г. Степанянц [1], а также статью Д. Ю. Панова [3], где дан пример применения метода Б. Г. Галеркина в нелинейной задаче.

при тех же условиях. Для решения этой задачи также может быть применен метод Ритца. Пусть нам удалось найти систему функций $\{\varphi_k(x, y)\}$, удовлетворяющую условиям (50) и такую, что любую функцию $u(x, y)$, непрерывную вместе с частными производными первого и второго порядка, удовлетворяющую условиям (50), можно апроксимировать некоторой линейной комбинацией функций системы так, чтобы выполнялись неравенства: [1])

$$\left.\begin{aligned} &\left|u-\sum a_k\varphi_k\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}-\sum a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right|<\varepsilon;\\ &\left|\frac{\partial u}{\partial y}-\sum a_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sum a_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}\right|<\varepsilon;\\ &\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\sum a_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\,\partial y}\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sum a_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right|<\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Приближенное решение разыскиваем в виде $u_n=\sum_1^n a_k\varphi_k$; для определения постоянных a_k, подставляя выражение u_n вместо u в (51) и приравнивая нулю производную по a_s, получаем систему уравнений:

$$\iint_D [\Delta u_n\Delta\varphi_s-f\varphi_s]\,dx\,dy=$$

$$=\iint_D\left[\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial y^2}\right)-f\varphi_s\right]dx\,dy=0. \tag{53}$$

Применяя к стоящему здесь интегралу преобразование, использованное раньше [§ 1, (30)], можем системе (53) придать другой вид:

$$\iint_D L(u_n)\,\varphi_s\,dx\,dy=\iint_D(\Delta\Delta u_n-f)\,\varphi_s\,dx\,dy=0$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{53a}$$

И в данном случае система уравнений определенная; пусть решение ее будет $a_k^{(n)}$, тогда n-е приближение по методу Ритца есть

$$u_n(x, y)=\sum_{k=1}^n a_k^{(n)}\varphi_k(x, y). \tag{54}$$

Так как система $\{\varphi_k\}$ предположена полной (см. (52)] и для данного случая сохраняют силу рассуждения n° 1, то можно утверждать,

---

[1]) Как и выше [ср. (31')], последние три условия могут быть заменены на более слабые:

$$\iint_D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sum a_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}\right]^2dx\,dy<\varepsilon;\quad \iint_D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sum a_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right]^2dx\,dy<\varepsilon \text{ и т. д.}$$

что последовательность функций (54) будет минимальной, т. е. $I(u_n) \to I(u)$. Здесь, однако, можно утверждать, что из факта минимальности вытекает равномерная сходимость последовательности $u_n(x, y)$ к точному решению задачи; на доказательстве этого останавливаться не будем. [1])

Рассмотрим теперь случай других граничных условий. Как мы видели (§ 1, n° 4), решению уравнения (49) при условиях (однородных)

$$\left.\begin{aligned} M(u) &= \nu\Delta u + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}x_n^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}x_n y_n + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}y_n^2\right) = 0 \text{ на } \Gamma, \\ P(u) &= \frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}x_n x_s + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(x_n y_s + x_s y_n) + \right. \\ &\qquad\qquad\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}y_n y_s\right) = 0 \text{ на } \Gamma \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

отвечает задача о минимуме интеграла

$$I = \int\limits_D\int \left[(\Delta u)^2 - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right) - 2fu\right]dx\,dy \quad (56)$$

при свободных граничных условиях. В таком случае можно исходить из любой системы функций $\{\varphi_k(x, y)\}$, с помощью которой осуществима апроксимация произвольной дважды дифференцируемой в D функции (52). Разыскивая решение в виде $u_n = \sum a_k\varphi_k$, для определения постоянных a_k получаем систему уравнений следующего вида:

$$\int\limits_D\int \left[\Delta u_n \Delta\varphi_s - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial x\,\partial y}\right) - \right.$$
$$\left. - f\varphi_s\right]dx\,dy = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \quad (57)$$

Преобразуя эти выражения двукратным интегрированием по частям, можем привести эту систему уравнений к виду [ср. § 1, (30) и (31)]:

$$\int\limits_D\int L(u_n)\varphi_s\,dx\,dy + \int\limits_\Gamma M(u_n)\frac{\partial\varphi_s}{\partial n}ds -$$
$$- \int\limits_\Gamma P(u_n)\varphi_s\,ds = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \quad (57a)$$

Целесообразно функции φ_k подбирать так, чтобы для них были выполнены граничные условия (55) и сохранилась возможность апроксимации функций, удовлетворяющих этим условиям. В таком слу-

---

[1]) См., например, Треффц [1], стр. 149—164 или К. Н. Шевченко [1]. Отметим также, что этот факт следует из так называемых теорем вложения (см. С. Л. Соболев [3], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. X, § 3, В. И. Смирнов [1], т. V, гл. 4.

чае, во-первых, сокращается число параметров, подлежащих определению, во-вторых, система уравнений (57а) значительно упрощается, именно, благодаря тому, что для φ_k, а следовательно, и для u_n выполнены условия (55), криволинейные интегралы исчезают, и система (57а) принимает вид системы уравнений метода Б. Г. Галеркина:

$$\iint_D L(u_n)\,\varphi_s\,dx\,dy = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{57b}$$

Относительно того, в какой форме следует искать приближенное решение (как выбирать φ_k), сохраняют силу указания, данные в предыдущем номере. В частности, в случае условий (50) следует искать $u_n(x, y)$ в форме

$$u_n(x,\ y) = \omega(x,\ y)(a_1 + a_2x + a_3y + \ldots + a_n x^i y^j),$$

где $\omega(x, y)$ — функция положительная в D и удовлетворяющая условиям (50). При этом, если контур имеет уравнение $F(x, y) = 0$, где F — функция непрерывная с частными производными, то можно принять

$$\omega(x,\ y) = F^2(x,\ y).$$

Приведем теперь примеры решения бигармонических задач методом Ритца и Б. Г. Галеркина. [1])

Пример 1. Рассмотрим задачу решения уравнения

$$\Delta\Delta u = 0$$

для прямоугольника $[-a,\ a;\ -b,\ b]$ при граничных условиях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = S\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad \text{при } x = \pm a,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b.$$

К этой задаче приводится вопрос о растяжении прямоугольной пластинки при определенных растягивающих усилиях. [2])

Прежде всего сведем граничные условия к однородным. Очевидно, функция $u_0 = \frac{1}{2} Sy^2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right)$ удовлетворяет заданным граничным условиям (ее легко было найти, взяв в виде полинома от y с неопределенными коэффициентами). Тогда, полагая $u = u_0 + \bar{u}$, для $\bar{u}$ получим уравнение

$$\Delta\Delta\bar{u} = \frac{2S}{b^2}$$

при условиях

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x\,\partial y} = 0;\quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm a,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x\,\partial y} = 0;\quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b.$$

---

[1]) Ценный вариационный метод сведения бигармонической проблемы к решению уравнений Пуассона дан в работах З. Х. Рафальсона [1, 2].

[2]) См. С. П. Тимошенко [2], стр. 171.

Эти условия, как легко убедиться, будут удовлетворены, если выполнены условия

$$\bar{u}=0;\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=0 \text{ при } x=\pm a;\qquad \bar{u}=0;\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=0 \text{ при } y=\pm b,$$

а последние условия суть не что иное, как условия (50), составленные применительно к прямоугольнику. [1]) Согласно сказанному, задача тогда приводится к вопросу о минимуме интеграла [2])

$$I=\iint\limits_D\left[(\Delta\bar{u})^2-\frac{4S}{b^2}\bar{u}\right]dx\,dy.$$

Приближенное решение, принимая во внимание симметрию, разыскиваем в виде

$$\bar{u}_n(x, y)=(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2[a_1+a_2x^2+a_3y^2+\ldots].$$

Ограничиваясь одним коэффициентом a_1, для его определения получаем уравнение

$$a_1\left(\frac{64}{7}+\frac{256}{49}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)=\frac{S}{a^4b^2}.$$

В частности, для квадратной пластинки это дает

$$a_1=0{,}04253\,\frac{S}{a^6};\quad \bar{u}_1(x, y)=0{,}04253\,\frac{S}{a^6}(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2.$$

При $n=3$ для определения коэффициентов получаем уравнения:

$$a_1\left(\frac{64}{7}+\frac{256}{49}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)+a_2a^2\left(\frac{64}{77}+\frac{64}{49}\frac{b^4}{a^4}\right)+a_3a^2\left(\frac{64}{49}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{77}\frac{b^6}{a^6}\right)=\frac{S}{a^4b^2},$$

$$a_1\left(\frac{64}{11}+\frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)+a_2a^2\left(\frac{192}{143}+\frac{256}{77}\frac{b^2}{a^2}+\frac{192}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)+a_3a^2\left(\frac{64}{77}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{77}\frac{b^6}{a^6}\right)=\frac{S}{a^4b^2},$$

$$a_1\left(\frac{64}{7}+\frac{64}{11}\frac{b^4}{a^4}\right)+a_2a^2\left(\frac{64}{77}+\frac{64}{77}\frac{b^4}{a^4}\right)+a_3a^2\left(\frac{192}{7}\frac{b^2}{a^2}+\frac{256}{77}\frac{b^4}{a^4}+\frac{192}{143}\frac{b^6}{a^6}\right)=\frac{S}{a^4b^2}.$$

Для квадратной пластинки ($b=a$) эти уравнения дают

$$a_1=0{,}04040\,\frac{S}{a^6};\qquad a_2=a_3=0{,}01174\,\frac{S}{a^8},$$

и окончательно (для $b=a$):

$$u_3=u_0+\bar{u}_3=\frac{1}{2}Sy^2\left(1-\frac{1}{6}\frac{y^2}{a^2}\right)+$$
$$+\frac{S}{a^6}(x^2-a^2)^2(y^2-a^2)^2\left(0{,}04040+0{,}01174\,\frac{x^2+y^2}{a^2}\right).$$

---

[1]) Заметим, что, изменяя таким образом граничные условия, мы отбрасываем ряд решений, но, так как достаточно найти одно только решение, это допустимо.

[2]) Можно, впрочем, как делает С. П. Тимошенко, воспользоваться интегралом § 1, (35′); уравнения для определения a_k, как показывает их форма (57b), получились бы те же самые.

Пример 2. Второй пример мы заимствуем из упоминавшегося нами раньше основного труда Ритца. Пусть дело идет об определении положения равновесия однородной изотропной пластинки, имеющей форму прямоугольника со сторонами a и b и заделанной по краям в горизонтальном направлении, под действием внешних поперечных сил.

Обозначим через $f(x, y)$ плотность внешних сил, рассчитанную на единицу площади пластины.

Расположим оси координат, как указано на рис. 20. Вопрос сводится к разысканию решения уравнения

$$\Delta\Delta u = f(x, y),$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на контуре } \Gamma, \tag{*}$$

или, если принять во внимание форму пластинки,

$$\left.\begin{aligned} u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \ x = a, \\ u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \ y = b. \end{aligned}\right\} \tag{**}$$

Соответствующая вариационная задача имеет вид:

$$I(u) = \int_0^a \int_0^b [(\Delta u)^2 - 2f(x, y)\, u]\, dx\, dy = \min$$

при условии (**).

Выберем теперь основные функции φ. Форма взятой пластинки и физическая аналогия между деформацией заделанной по краям пластинки и деформацией заделанного стержня естественно приводит нас к мысли использовать для построения таких функций собственные функции уравнения заделанного стержня

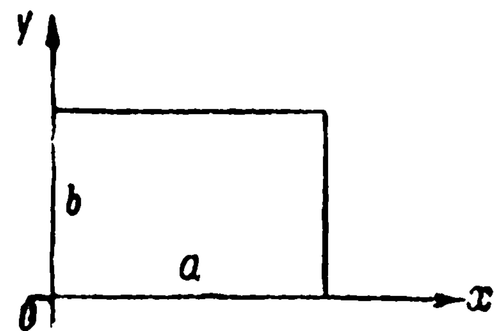


Рис. 20.

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \lambda u = 0.$$

Пусть стержень имеет длину a и заделан с концов:

$$u = 0 \text{ и } \frac{du}{dx} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a.$$

Собственные числа равны λ_n^4, где λ_n является решением следующего уравнения:

$$\cos \lambda_n a \operatorname{ch} \lambda_n a = 1.$$

Ниже часто вместо λ_n мы будем употреблять величину $\mu_n = \lambda_n a$, не зависящую от длины стержня. Для больших n μ_n весьма мало отличается от $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Мы приведем здесь полезные нам для дальнейшего несколько первых значений μ, найденных с точностью до четырех десятичных знаков.

$$\mu_1 = \frac{3}{2}\pi + 0{,}01765 = 4{,}7300; \qquad \mu_2 = \frac{5}{2}\pi - 0{,}00078 = 7{,}8532;$$

$$\mu_3 = \frac{7\pi}{2} + 0{,}00003 = 10{,}9956; \qquad \mu_4 = \frac{9\pi}{2} = 14{,}1372;$$

$$\mu_5 = \frac{11\pi}{2} = 17{,}2787; \qquad \mu_6 = \frac{13\pi}{2} = 20{,}4203.$$

Собственные же функции удовлетворяют уравнению

$$u^{\text{IV}} = \lambda_n^4 u.$$

Если нормируем их обычным способом:

$$\int_0^a u^2 dx = 1,$$

то они будут иметь следующий вид:

$$\xi_n(x) = \\ = \frac{(\cos\lambda_n x - \operatorname{ch}\lambda_n x)(\sin\mu_n - \operatorname{sh}\mu_n) - (\sin\lambda_n x - \operatorname{sh}\lambda_n x)(\cos\mu_n - \operatorname{ch}\mu_n)}{\sqrt{a}(\sin\mu_n - \operatorname{sh}\mu_n)}.$$ [1]

Обозначим через $\eta_n(x)$ собственные функции стержня длины b, которые получаются из ξ_n путем замены a на b и собственных чисел λ_n^4 на $\left(\frac{b}{a}\right)^4 \lambda_n^4 = \lambda_n'^4$.

Положим:

$$\varphi_{kj} = \xi_k(x)\,\eta_j(y),$$

$$U_{n,m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\xi_k(x)\,\eta_j(y).$$

Уравнения (53а) в данном случае примут вид

$$\int_0^a \int_0^a [\Delta\Delta U_{n,m} - f]\,\xi_r \eta_s dx\,dy = 0. \qquad (***)$$

Но так как $\xi_k^{\text{IV}} = \lambda_k^4 \xi_k$, $\eta_j^{\text{IV}} = \lambda_j'^4 \eta_j$,

$$\Delta\Delta U_{n,m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}[(\lambda_k^4 + \lambda_j)\,\xi_k\eta_j + 2\xi_k''\eta_j'']. \qquad (****)$$

Обозначим

$$\alpha_k = \frac{\cos\mu_k - \operatorname{ch}\mu_k}{\sin\mu_k - \operatorname{sh}\mu_k}, \qquad \sigma_{kj} = \int_0^a \xi_k \xi_j'' dx.$$

Приведем значения α_k:

$$\alpha_1 = 0{,}98250; \quad \alpha_2 = 1{,}00078; \quad \alpha_3 = 0{,}99997; \quad \alpha_4 = 1{,}00000.$$

Приняв во внимание выражение для ξ_k и проинтегрировав дважды по частям, имеем:

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk} = \frac{1}{\lambda_k^4 - \lambda_j^4}[\xi_k'''\xi_j'' - \xi_k''\xi_j''']_0^a = \frac{1}{a}\,\frac{4\lambda_k^2\lambda_j^2}{\lambda_k^4 - \lambda_j^4}[(-1)^{k+j} + 1](\lambda_k\alpha_k - \lambda_j\alpha_j) = \\ = \frac{1}{a^2}\,\frac{4\mu_k^2\mu_j^2}{\mu_k^4 - \mu_j^4}[(-1)^{k+j} + 1](\mu_k\alpha_k - \mu_j\alpha_j),$$

$$\sigma_{kk} = \int_0^a \xi_k\xi_k'' dx = -\lambda_k^2\alpha_k^2 + 2\lambda_k\frac{\alpha_k}{a} = \frac{1}{a^2}[2\mu_k\alpha_k - \mu_k^2\alpha_k^2].$$

[1] Другая, более удобная форма для этих функций дана в заметке В. Н. Фаддеевой [2].

При $k > 2$, $j > 2$ с точностью до 0,0001:

$$\sigma_{kj} = \frac{1}{a^2} \frac{4\pi \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \left(j+\frac{1}{2}\right)^2 (k-j)\left[(-1)^{k+j}+1\right]}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(j+\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\sigma_{kk} = \frac{1}{a^2}\left[(2k+1)\pi - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2\right].$$

Система (****), если использовать ортогональность собственных функций, может быть переписана в виде:

$$a_{rs}(\lambda_r'^4 + \lambda_s'^4 + 2\sigma_{rr}\sigma_{ss}) + 2\sum_{k=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{m}{}' a_{kj}\sigma_{kr}\sigma_{js} = f_{rs}, \qquad \left(\substack{***\\ **}\right)$$

$$f_{rs} = \int_0^a \int_0^b f\xi_r \eta_s \, dx\, dy \qquad (r = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots, m).$$

Знак $'$ у сумм показывает, что при суммировании должно быть пропущено слагаемое, содержащее a_{rs}.

Дальнейшие вычисления будут зависеть от вида функции f; ниже мы предположим пластинку квадратной со сторонами a и внешнюю действующую силу распределенной равномерно по всей поверхности пластинки: $f(x, y) = C$. Так как

$$\int_0^a \xi_k dx = \begin{cases} -\dfrac{4\alpha_k}{\sqrt{a\lambda_k}} & \text{при } k \text{ — нечетном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ — четном,} \end{cases}$$

то, в виду $\eta_j(y) = \xi_j(y)$,

$$f_{rs} = \int_0^a \int_0^a C\xi_r(x)\,\xi_s(y)\,dx\,dy =$$

$$= \begin{cases} C\dfrac{16\alpha_r\alpha_s}{a\lambda_r\lambda_s} = C\dfrac{16a\alpha_r\alpha_s}{\mu_r\mu_s}, & \text{если } r \text{ и } s \text{ нечетные,} \\ 0, & \text{если хоть одно из чисел } r \text{ или } s \text{ четное.} \end{cases}$$

В силу симметрии, оси x и y должны быть равноправными; поэтому $a_{kj} = a_{jk}$ и система $\left(\substack{***\\ **}\right)$ может быть упрощена, именно можно отбросить все уравнения, для которых $r > s$. Далее, первая собственная функция стержня не имеет нулей в промежутке и симметрична относительно середины стержня, вторая будет антисимметрична относительно середины и т. д. В силу упомянутой симметрии нашей задачи, в решении должны, очевидно, отсутствовать все собственные функции ξ и η с четными номерами, и поэтому могут быть отличными от нуля только такие a_{kj}, когда оба индекса будут нечетными.

Обозначим для упрощения записи $l = 8Ca^5 10^{-4}$. Положим сначала $n = m = 1$. Тогда система для определения a_{kj} вырождается в одно уравнение

$$651{,}8a_{11} = 431{,}5l;$$

$$a_{11} = 0{,}6620l; \quad u_{11} = 0{,}6620l\,\xi_1(x)\,\xi_1(y).$$

Для $n = m = 3$ получим систему

$$\begin{aligned} 651{,}8a_{11} - 239{,}2a_{13} + 94{,}7a_{33} &= 431{,}5l, \\ -119{,}6a_{11} + 8867a_{13} - 961a_{33} &= 188{,}5l, \\ 94{,}6a_{11} - 1922a_{13} + 24390a_{33} &= 82{,}7l. \end{aligned}$$

Вместо того чтобы решать эту систему при помощи определителей, мы предпочтем, в виду того что коэффициенты при диагональных членах значительно превосходят остальные коэффициенты, найти ее решение методом последовательных приближений.

Решая уравнения относительно a_{11}, a_{13}, a_{33}, имеем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0{,}6620l + 0{,}3670a_{13} - 0{,}1453a_{33}, \\ a_{13} &= 0{,}0213l + 0{,}0135a_{11} + 0{,}1084a_{33}, \\ a_{33} &= 0{,}0034l - 0{,}0039a_{11} + 0{,}0792a_{13}. \end{aligned}$$

Что касается исходных значений, то за них можно было бы принять, например, свободные члены правых частей. Но так как первое приближение для a_{11} мы знаем, то предпочтительнее начать вычисления с $a_{11} = 0{,}6620$, $a_{13} = a_{33} = 0$. В результате мы получим таблицу:

Коэффициент	Исходные значения	Приближения		
		первое	второе	третье
a_{11}	0,6620 l	0,6620 l	0,6730 l	0,6727 l
a_{13}	0	0,0302 l	0,0303 l	0,0307 l
a_{33}	0	0,0008 l	0,0031 l	0,0031 l

$$U_{33} = 0{,}6727l\xi_1(x)\xi_1(y) + 0{,}0307l\,[\xi_1(x)\xi_3(y) + \xi_3(x)\xi_1(y)] + 0{,}0031l\xi_3(x)\xi_3(y).$$

Преимущество метода последовательных приближений становится еще яснее, если обратиться к дальнейшим приближениям. Так, при $n = m = 5$ будем иметь:

$$\begin{aligned} 651{,}8a_{11} - 239{,}2a_{13} + 94{,}7a_{33} - 188a_{15} + 148a_{35} + 58a_{55} &= 431{,}5l, \\ -119{,}6a_{11} + 8867a_{13} - 961a_{33} - 226a_{15} - 515a_{35} + 186a_{55} &= 188{,}5l, \\ 94{,}6a_{11} - 1922a_{13} + 24390a_{33} + 474a_{15} - 4820a_{35} + 592a_{55} &= 82{,}7l, \\ -93{,}8a_{11} - 226a_{13} + 237a_{33} + 48100a_{15} - 2370a_{35} - 2015a_{55} &= 120{,}0l, \\ 74{,}3a_{11} - 515a_{13} - 2410a_{33} - 2370a_{15} + 78600a_{35} - 6420_{55} &= 52{,}5l \\ 58a_{11} + 372a_{13} + 592a_{33} - 4030a_{15} - 12840a_{35} + 158500a_{55} &= 33{,}5l. \end{aligned}$$

Так как система содержит много членов, мы предпочитаем применять последовательные приближения непосредственно к ней, не решая ее относительно диагональных членов. За исходные значения для a_{11}, a_{13}, a_{33} примем найденные при $n = m = 3$ значения и для a_{15}, a_{35}, a_{55} нулевые. Подставляя в последние три уравнения системы найденные первые приближения для коэффициентов:

$$a_{11} = 0{,}6727l; \quad a_{13} = 0{,}0307l; \quad a_{33} = 0{,}0031l,$$

получим

$$a_{15} = 0{,}0039l; \quad a_{35} = 0{,}0003l; \quad a_{55} = 0{,}0001l.$$

Подставляя найденные значения a_{ik} во все члены системы, кроме диагональных, получим вторые приближения для a_{ik}, которые будут уже

достаточно точными, и дальнейшие вычисления не внесут существенных изменений в них:

$$a_{11}=0{,}6740l;\quad a_{13}=0{,}0308l;\quad a_{33}=0{,}0032l;$$
$$a_{15}=0{,}0040l;\quad a_{35}=0{,}0004l;\quad a_{55}=0{,}0001l.$$

Само собой разумеется, при вычислении последовательных приближений нет нужды находить сами приближения, достаточно ограничиться более простой задачей нахождения последовательных поправок для них.

5. Применение к нахождению собственных значений и функций. К нужному пути решения этой задачи проще всего приводит рассуждение Б. Г. Галеркина, приведенное выше (n° 1). Рассмотрим для начала задачу о нахождении собственных чисел и функций для обыкновенного уравнения:

$$L(y)=\frac{d}{dx}(p(x)y')-qy+\lambda y=0 \tag{58}$$

при граничных условиях

$$y(0)=y(l)=0. \tag{59}$$

Разыскивая решение в виде суммы

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x), \tag{60}$$

где φ — полная система функций, удовлетворяющих условиям (59), мы вместо тождественного удовлетворения равенства (58) должны добиваться только ортогональности левой части его функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Это приводит нас к системе уравнений

$$\int_0^l L(y_n)\varphi_j\,dx=\int_0^l\left[\frac{d}{dx}(p(x)y_n')-qy_n+\lambda y_n\right]\varphi_j dx=0$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{61}$$

Эта система уравнений может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i,j}+\lambda\gamma_{i,j})a_i=0\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{61a}$$

где

$$\alpha_{i,j}=\int_0^l\left[\frac{d}{dx}(p(x)\ \varphi_i')-q\varphi_i\right]\varphi_j dx;\qquad \gamma_{i,j}=\int_0^l\varphi_i\varphi_j dx. \tag{62}$$

Полученная система уравнений есть однородная система n уравнений с n неизвестными, она имеет нетривиальное решение в том только случае, когда определитель этой системы равен нулю:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{1,1}+\lambda\gamma_{1,1} & \ldots & \alpha_{n,1}+\lambda\gamma_{n,1}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \alpha_{1,n}+\lambda\gamma_{1,n} & \ldots & \alpha_{n,n}+\lambda\gamma_{n,n}\end{vmatrix}=0. \tag{63}$$

Уравнение (63) — n-й степени относительно λ; оно даст, вообще говоря, n корней $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$[1]. При каждом $\lambda = \lambda_m^{(n)}$ система уравнений (61) будет иметь отличное от нулевого решение $a_i^{(m)}$, которое даст нам соответствующую $\lambda_m^{(n)}$ функцию $\varphi_m^{(n)}(x) = \sum a_i^{(m)}\varphi_i(x)$ (понятно, что эти функции определяются лишь с точностью до множителя).

Задача нахождения собственных значений для уравнения (58) состоит в отыскании тех значений λ, для которых существует отличное от нуля решение граничной задачи (59). Так как система (61) возникла как приближение к уравнению (58), то найденные выше значения $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots$, при которых она имеет нетривиальное решение, будут приближениями для первых собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ уравнения (58), а функции $\varphi_1^{(n)}(x), \varphi_2^{(n)}(x), \ldots$ — приближениями для соответствующих собственных функций.

Таким же точно образом можно составить соответствующие уравнения для других задач. Например, для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \tag{64}$$

при граничном условии

$$u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{65}$$

соответствующая система будет

$$\iint_D \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \lambda u_n\right] \varphi_j \, dx\, dy = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{66}$$

где $u_n = \sum_1^n a_k \varphi_k$; $\{\varphi_k\}$ — полная система функций, удовлетворяющих граничному условию (65). Собственные значения находятся приближенно, если приравнять нулю определитель системы (66). Система (66) сохраняет вид и для того случая, когда условие (65) заменено на условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(s) u = 0, \tag{67}$$

только нужно опять предполагать, что это же условие удовлетворено и для φ_k. Аналогичная система, наконец, может быть составлена и для нахождения собственных чисел и функций в случае бигармонической проблемы. Именно, если рассматривать уравнение

$$\Delta\Delta u - \lambda u = 0 \tag{68}$$

при условиях

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{69}$$

---

[1]) По поводу методов численного решения уравнения (63) см. сноску на стр. 116.

то, выбирая φ_k, удовлетворяющие условиям (69), и полагая $u_n = \sum a_k \varphi_k$, получим систему вида

$$\iint_D (\Delta\Delta u_n - \lambda u_n)\,\varphi_j\,dx\,dy = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{70}$$

К тем же системам уравнений (61), (66) и (70) можно прийти и из рассмотрения вариационных задач. Проведем это для случая уравнения (64) при условии (65), которое мы рассматривали в § 1, n° 5. Как мы видели там, наименьшее собственное число данной задачи есть минимум интеграла

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \tag{71}$$

при условии (65) и

$$\iint_D u^2\,dx\,dy = 1, \tag{72}$$

а функция, доставляющая этот экстремум, есть соответствующая собственная функция. Пусть теперь $\{\varphi_k\}$ полная система функций, удовлетворяющих условию (65); будем разыскивать приближенное решение поставленной экстремальной задачи в виде $u_n = \sum a_k \varphi_k$. Заменяя в (71) и (72) u на u_n, получим, что дело сводится к разысканию минимума выражения

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \tag{73}$$

представляющего квадратичную форму от a_k, при условии

$$\iint_D u_n^2\,dx\,dy = 1. \tag{74}$$

По правилу Лагранжа нахождения относительных экстремумов, задачу можно заменить на разыскание минимума формы

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - \lambda \iint_D u_n^2\,dx\,dy, \tag{75}$$

где λ — неопределенный множитель. Приравнивая нулю производные этого выражения по a_j, получим:

$$\iint_D \left[\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right] dx\,dy - \lambda \iint_D u_n \varphi_j\,dx\,dy = 0 \tag{76}$$

или, преобразуя первые два члена с помощью формулы Грина [ср. § 1, (15)], можем, очевидно, привести систему (76) к ранее указанному виду (66). Однако соображения, связанные с экстремальными свой-

ствами собственных значений, не только позволяют вновь прийти к системе (66) и оправдать иным образом предложенный приближенный способ нахождения собственных чисел и функций, но и получить некоторые дополнительные факты об этих приближениях.

Пусть $\lambda_1^{(n)}$ есть наименьший корень определителя системы (66) [или (76)].

Нетрудно показать, рассуждая, как в § 1, n° 5, что $\lambda_1^{(n)}$ есть минимум формы (73) при условии (74). Иначе говоря, $\lambda_1^{(n)}$ есть минимум интеграла (71) при условии (72), в случае, когда мы ограничиваемся семейством функций вида $\sum a_k\varphi_k$. Ясно, что такой минимум будет $\geqslant$ минимума той же задачи без последнего ограничительного условия, т. е. $\lambda_1^{(n)} \geqslant \lambda_1$ — истинной величины первого собственного значения. Таким образом, *метод Ритца дает для собственного значения приближение с избытком.* Мы убедились в этом по отношению к первому собственному значению, но аналогичные соображения показывают, что то же самое остается верным и для прочих собственных значений.

Далее, ясно, благодаря предположенной полноте системы функций $\{\varphi_k\}$, что, беря n достаточно большим, можно к первой собственной функции $\psi_1(x)$, дающей минимум интеграла (71) [при условии (72)], сколь угодно хорошо приблизиться с помощью функций $\sum a_k\varphi_k$. Таким образом, минимум интеграла (73) [при условии (74)] будет сколь угодно мало отличаться от минимума интеграла (71) [при условии (72)]. Последнее означает, что n-е приближение к первому собственному значению при $n \to \infty$ сходится к истинной его величине. То же самое верно и по отношению к дальнейшим собственным числам. Итак, метод Ритца дает во всяком случае сходящийся процесс при вычислении собственных чисел.[1])

Скажем еще несколько слов о так называемом методе Рэлея. Английский физик Рэлей предложил еще задолго до работ Ритца метод определения главной собственной частоты при колебаниях механических систем. Не приводя здесь чисто механических соображений, на основании которых он был предложен,[2]) скажем коротко, что он состоит по существу в том, что, выбрав определенную функцию φ, удовлетворяющую граничным условиям для функции u, задаются формой $u = A\varphi$ и постоянную A находят из условия минимума потенциальной энергии. Благодаря этому оказывается, что метод Рэлея при определении первого собственного числа дает в точности тот же результат, что и первое приближение метода Ритца.

---

[1]) По поводу дальнейших применений экстремальных свойств собственных чисел, в частности при исследовании асимптотического характера последних, отсылаем к книге Р. Куранта и Д. Гильберта [1].

[2]) Об этом см., например, С. П. Тимошенко [1].

Приведем теперь примеры определения собственных значений способами Ритца и Б. Г. Галеркина.[1])

Пример 1.[2]) Изучение колебаний однородной струны по методу Фурье, как известно, приводит к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка вида

$$y'' + k^2 y = 0.$$

Допустим, что наша струна имеет длину 2 и закреплена в точках -1 и $+1$:

$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Общее решение уравнения есть

$$y = A \sin(kx + \varphi).$$

Из предельных условий непосредственно видно, что основной тон струны точно дается решением

$$y = \cos\frac{\pi x}{2}, \qquad k = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\text{первое собственное число } \lambda_1 = k^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

первый обертон

$$y = \sin \pi x; \qquad k = \pi,$$

второй обертон

$$y = \cos\frac{3\pi x}{2}; \qquad k = \frac{3\pi}{2} \text{ и т. д.}$$

Ищем для сравнения приближенно четные решения (четные тоны струны) в форме многочлена, расположенного по четным степеням x. Общий вид такого многочлена, удовлетворяющего предельным условиям, будет:

$$y_n(x) = (1 - x^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^4 + \ldots + a_n x^{2n-2}).$$

---

[1]) Другие примеры нахождения собственных значений и оценки погрешности при их определении методами Ритца и Б. Г. Галеркина, кроме упоминавшихся монографий Л. С. Лейбензона и Я. А. Протусевича и различных курсов теории упругости, можно найти в богатой по материалу книге П. Ф. Папковича [2]. См. также обзорную статью Коллатца [2], а также его монографию [4].

В этих монографиях, а также в обзорной статье М. К. Гавурина и Л. В. Канторовича в сборнике „Математика в СССР за сорок лет" можно найти литературу по другим приближенным методам решения тех же задач, отличным от методов Ритца и Галеркина и не получившим отражения в данной книге: метод наименьших квадратов, метод моментов (разработанный в статьях Н. М. Крылова и М. Ф. Кравчука), метод Трефтца, метод последовательных приближений, интерполяционные методы.

По поводу исследования первого из названных методов см. работу С. Г. Михлина [3], а также его монографию [5].

[2]) Приводимая задача заимствована из мемуара Ритца [1].

Ограничимся сначала лишь двумя членами; имеем:

$$y_2 = (1 - x^2)(a_1 + a_2x^2),$$
$$y_2' = 2(a_2 - a_1)x - 4a_2x^3,$$
$$y_2'' = 2(a_2 - a_1) - 12a_2x^2.$$

Система (61) в данном случае будет

$$\int_{-1}^{1} [2(a_2 - a_1) - 12a_2x^2 + k^2(1 - x^2)(a_1 + a_2x^2)](1 - x^2)\,dx = 0,$$
$$\int_{-1}^{1} [2(a_2 - a_1) - 12a_2x^2 + k^2(1 - x^2)(a_1 + a_2x^2)]x^2(1 - x^2)\,dx = 0.$$

После некоторых сокращений она принимает вид:

$$(35 - 14k^2)a_1 + (7 - 2k^2)a_2 = 0,$$
$$(21 - 6k^2)a_1 + (33 - 2k^2)a_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель, имеем уравнение для определения k

$$k^4 - 28k^2 + 63 = 0,$$

корни которого будут

$$k_1^2 = 2{,}46744; \qquad k_2^2 = 25{,}6.$$

Из точных же решений получается

$$k_1^2 = 2{,}467401100; \qquad k_2^2 = 22{,}207.$$

Отсюда видно, что уже при втором приближении характеристическое число, соответствующее основному тону струны, определено с ошибкой, меньшей 0,00004, и второй обертон с точностью до 15%.

При третьем приближении

$$y_3 = (1 - x^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3x^4)$$

для определения k будет иметь место уравнение

$$4k^6 - 450k^4 + 8910k^2 - 19305 = 0,$$

из которого находим

$$k_1^2 = 2{,}467401108; \qquad k_2^2 = 22{,}301.$$

Ошибка третьего приближения характеристического числа основного тона не превосходит 0,000000008 и для второго ошибка 0,5%.

Далее подставим третье приближенное значение для k_1^2 в уравнения, определяющие a_1, a_2, a_3. Из полученной системы коэффициенты a_1, a_2, a_3 найдутся с точностью до множителя. Если затем найти этот неопределенный множитель из условия нормированности

$$\int_{-1}^{1} [\psi_1^{(3)}(x)]^2\,dx = 1,$$

которому удовлетворяет точное решение $y = \cos\frac{\pi x}{2}$, то получим

$$\psi_1^{(3)}(x) = (1 - x^2)(1 - 0{,}233430x^2 + 0{,}018962x^4).$$

При $x = -1$ и $x = +1$ первая фундаментальная функция и ее второе приближение совпадают по самому построению. Насколько мало отличается $\cos\frac{\pi x}{2}$ от $\psi_1^{(3)}(x)$ во всем промежутке, показывает следующая таблица, в которой приведены мантиссы логарифмов этих функций.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lg\cos\frac{\pi x}{2}$	994620	978206	949881	907958	849485	769219	657047	489982	194332
$\lg\psi_1^{(3)}(x)$	994621	978212	949889	907952	849493	769221	657043	489978	194345

Различие в мантиссах в одном лишь только месте превышает единицу пятого знака.

Наконец, такие же вычисления для третьего приближения к фундаментальной функции $\cos\frac{3\pi x}{2}$, соответствующей второму обертону, дают:

$$\psi_1^{(3)}(x) = (1 - x^2)(-1 + 9{,}3335x^2 - 6{,}219x^4).$$

Узлы этого обертона, найденные теоретически по $\cos\frac{3\pi x}{2}$, располагаются в точках ± 1, $\pm\frac{1}{3}$. Значения же для узлов, найденные на основании $\psi_2^{(3)}(x)$, будут:

$$x = \pm 1, \qquad x = \pm 0{,}3408.$$

Ошибка меньше 0,01.

Пример 2. Рассмотрим собственные функции однородной мембраны, имеющей форму круга радиуса a. Будем иметь в виду тот простейший случай, когда деформированная поверхность мембраны симметрична относительно центра круга и концы ее закреплены. В этом случае прогибы зависят только от радиального расстояния r от центра.

Прогиб однородной мембраны удовлетворяет уравнению Пуассона, а уравнение, определяющее собственные числа и функции, есть уравнение

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad (64)$$

которое мы рассматривали выше. Если преобразовать его к полярным координатам [ср. гл. I, § 1, (35)] и воспользоваться тем, что u не зависит от θ, то получим

$$\Delta u + \lambda u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru'_r) + \lambda u = 0.$$

Примем в качестве основных функций следующие:

$$\varphi_1 = \cos\frac{\pi}{2a}r; \qquad \varphi_2 = \cos\frac{3\pi}{2a}r; \qquad \varphi_3 = \cos\frac{5\pi}{2a}r; \ldots$$

Рассмотрим сначала первое приближение:

$$u_1 = a_1 \cos\frac{\pi}{2a}r.$$

Уравнение (66), если перейти к полярным координатам, принимает вид

$$\int\int (\Delta u_1 + \lambda u_1)\varphi_1\,dx\,dy =$$
$$= 2\pi\int_0^a \left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{\pi}{2a}\left(-\sin\frac{\pi}{2a}r\right)\right]a_1 + \lambda a_1\cos\frac{\pi}{2a}r\right\}\cos\frac{\pi}{2a}r\cdot r\,dr = 0,$$

или, если отбросить множитель πa_1, уравнение для определения λ будет

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\right) - \lambda a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right) = 0,$$

откуда следует:

$$\lambda_1 = \frac{5{,}832}{a^2}.$$

Точное значение есть $\lambda = \frac{5{,}779}{a^2}$ и ошибка первого приближения меньше 1%.

Возьмем теперь второе приближение:

$$u_2 = a_1\cos\frac{\pi}{2a}r + a_2\cos\frac{3\pi}{2a}r.$$

Уравнения (66) для коэффициентов a_1 и a_2 и уравнение для числа λ будут:

$$(1{,}7337 - 0{,}29736\lambda a^2)\,a_1 + (0{,}20264\lambda a^2 - 1{,}5)\,a_2 = 0,$$
$$(0{,}20264\lambda a^2 - 1{,}5)\,a_1 + (11{,}603 - 0{,}47748\lambda a^2)\,a_2 = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1{,}7337 - 0{,}29736\lambda a^2 & 0{,}20264\lambda a^2 - 1{,}5 \\ 0{,}20264\lambda a^2 - 1{,}5 & 11{,}603 - 0{,}47748\lambda a^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$0{,}10092\lambda^2 a^4 - 3{,}6701\lambda a^2 + 17{,}866 = 0.$$

Меньший корень уравнения есть

$$\lambda_1 = \frac{5{,}792}{a^2}.$$

Ошибка второго приближения к первому собственному числу будет, следовательно, меньше 0,23%.

Подстановка вместо λ_1 его значения в первое из уравнений дает:

$$0{,}0114a_1 - 0{,}3263a_2 = 0.$$

Можно поэтому положить

$$a_1 = 0{,}3263\,C, \qquad a_2 = 0{,}0114\,C,$$

причем C должно быть определено из условия нормированности.

Пример 3. Найдем основной тон колебания однородной пластинки, имеющей форму круга радиуса a с центром в начале координат, горизонтально заделанной по краю. Это равносильно разысканию первой собственной функции и первого собственного числа уравнения

$$\Delta\Delta u - \lambda u = 0 \tag{68}$$

при предельных условиях

$$u\Big|_{r=a} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0.$$

Соответствующая вариационная задача есть

$$I(u) = \iint_D (\Delta u)^2\, dx\, dy = \min,$$

при условиях

$$\iint_D u^2\, dx\, dy = 1; \qquad u\Big|_{r=a} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0.$$

В случае низшего тона форма колеблющейся пластинки симметрична относительно начала координат и u будет функцией одного лишь r.

Для применения метода Ритца преобразуем предварительно уравнение (68) к полярным координатам. Если принять во внимание, что u не зависит от θ, оно примет вид

$$\left(\frac{d}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) - \lambda u = 0.$$

Возьмем u_n в форме:

$$u_n = a_1\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + a_2\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 + \ldots + a_n\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{n+1}$$

и ограничимся в наших вычислениях только двумя первыми членами. Уравнения (70) примут вид:

$$a_1\left(\frac{192}{9} + \frac{\lambda a^4}{5}\right) + a_2\left(\frac{144}{9} - \frac{\lambda a^4}{6}\right) = 0,$$
$$a_1\left(\frac{144}{9} - \frac{\lambda a^4}{6}\right) + a_2\left(\frac{96}{5} - \frac{\lambda a^4}{7}\right) = 0.$$

Отсюда для λ следует уравнение:

$$(\lambda a^4)^2 - \frac{204{,}48}{5}\lambda a^4 + 768\cdot 36\cdot 7 = 0,$$

меньший корень которого будет

$$\lambda = \frac{104{,}39}{a^4}.$$

Подставляя найденное значение λ в первое уравнение системы, для a_1, a_2 найдем:

$$0{,}455a_1 - 1{,}398a_2 = 0, \qquad a_2 = 0{,}325a_1,$$
$$u_2 = a_1\left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + 0{,}325\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3\right].$$

Пример 4. Вскоре после выхода в свет основного мемуара Ритц [2] опубликовал пример приложения своего метода к решению трудной задачи о разыскании собственных чисел и функций для колебания однородной пластинки со свободными границами. Мы не будем приводить полностью его обстоятельных исследований, а ограничимся лишь той частью их, которая имеет значение для нашего порядка идей приближенного решения уравнений.

Пусть мы имеем дело с квадратной пластинкой со стороной 2. Выберем оси так, как указано на рис. 21. Аналитически поставленная проблема сводится, если отбросить несущественные для нас постоянные множители, к нахождению функции, дающей наименьшее значение интегралу

$$I(u)=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\{(\Delta u)^2-2(1-\nu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)\}\,dx\,dy$$

при условии

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}u^2\,dx\,dy=1.$$

Граничные значения допустимых функций и их нормальных производных — свободны.

Подобно разобранному в n° 4 случаю пластинки с заделанными границами мы будем строить систему основных функций $\{\varphi_n(x, y)\}$ из собственных функций свободного стержня. Как известно, они удовлетворяют уравнению

$$\xi_n^{IV}-k_n\xi_n=0$$

и условиям

$$\xi_n''=0, \qquad \xi_n'''=0$$

на концах стержня. Кроме того, они удовлетворяют условиям ортогональности и всегда могут быть нормированы:

$$\int u_m u_n dx=0; \qquad \int u_n^2 dx=1.$$

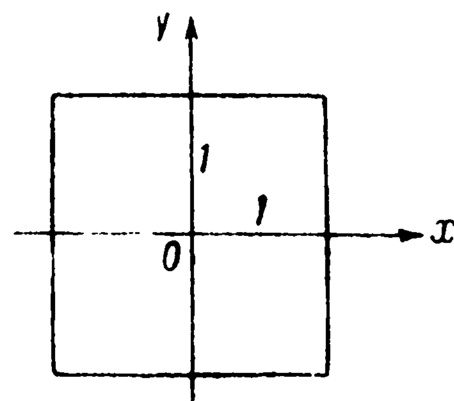


Рис. 21.

Интегралы взяты вдоль всей длины стержня. Чтобы сделать вычисления более симметричными, мы будем полагать концы стержня лежащими в точках $x=\pm 1$. Тогда для собственных функций получаются следующие выражения, правильность которых легко проверяется:

для четного m

$$\xi_m=\frac{\operatorname{ch}k_m\cos k_m x+\cos k_m\operatorname{ch}k_m x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 k_m+\cos^2 k_m}} \qquad (m=2,\ 4,\ \ldots),$$

где k_m есть корень уравнения

$$\operatorname{tg}k+\operatorname{th}k=0;$$

для нечетного m

$$\xi_m=\frac{\operatorname{sh}k_m\sin k_m x+\sin k_m\operatorname{sh}k_m x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 k_m-\sin^2 k_m}} \qquad (m=3,\ 5,\ \ldots),$$

где k_m есть корень уравнения

$$\operatorname{tg}k-\operatorname{th}k=0.$$

Сюда должны быть присоединены еще две собственные функции, соответствующие случаю $k_0 = k_1 = 0$:

$$\xi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x.$$

Они отвечают движению стержня как целого без деформации.

При $m = 2$ мы будем иметь основной тон с двумя узлами, при $m = 3$ — первый обертон с тремя узлами и т. д.

Числа k_m при m четном весьма мало разнятся от $\frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$; $k_2 = 2{,}3650$ и уже k_4 отличается от $\left(2 - \frac{1}{4}\right)\pi$ только в шестом десятичном знаке и т. д.

Числа k_m при m нечетном также весьма мало разнятся от $\frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, так что с точностью до пяти десятичных знаков можно считать:

$$k_3 = 3{,}92660, \qquad k_5 = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi, \ \ldots$$

Составим теперь функции φ:

$$\varphi_{kj} = \xi_k(x)\, \xi_j(y); \qquad u_s = \sum_{n,\, m=0}^{s} a_{mn} \xi_m(x)\, \xi_n(y).$$

Введем обозначения

$$\omega_{mn} = \int_{-1}^{1} \xi_m'' \xi_n \, dx; \qquad \Delta_{mn} = \Delta_{nm} = \int_{-1}^{1} \xi_m' \xi_n' \, dx,$$

$$\alpha_{mn}^{(mn)} = k_m^4 + k_n^4 + 2\nu\omega_{mm}\omega_{nn} + 2(1-\nu)\Delta_{mm}\Delta_{nn},$$
$$\alpha_{mn}^{(pq)} = \nu[\omega_{mp}\omega_{qn} + \omega_{pm}\omega_{nq}] + 2(1-\nu)\Delta_{mp}\Delta_{nq}.$$

Система (70) для определения чисел a_{mn} примет вид:

$$[\alpha_{00}^{(00)} - \lambda]\, a_{00} + \alpha_{01}^{(00)} a_{01} + a_{10}^{(00)} a_{10} + \ldots + a_{ss}^{(00)} a_{ss} = 0,$$
$$\alpha_{00}^{(01)} a_{00} + [\alpha_{01}^{(01)} - \lambda]\, a_{01} + \alpha_{10}^{(01)} a_{10} + \ldots + \alpha_{ss}^{(01)} a_{ss} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{00}^{(ss)} a_{00} + \alpha_{01}^{(ss)} a_{01} + \alpha_{10}^{(ss)} a_{10} + \ldots + [\alpha_{ss}^{(ss)} - \lambda]\, a_{ss} = 0.$$

Она может быть значительно упрощена, если воспользоваться симметрией задачи.

Будем, например, искать решения, симметричные относительно диагоналей координатных углов, т. е. остающиеся неизменными при замене x на y, и антисимметричные относительно координатных осей, т. е. нечетные относительно x и y. Среди них будет находиться решение, соответствующее основному тону.

Согласно этому мы в u_s опускаем все члены, содержащие $\xi_m(x)\, \xi_n(y)$ с четными номерами, и a_{mn} полагаем равными a_{nm}.

Ограничимся членами до ξ_5, полагая $s = 5$, и для ν выберем значение $\nu = 0{,}225$ (стекло). Обозначая ради простоты $\xi_n(y) = \eta_n$, имеем:

$$u_5 = A_0 \xi_1 \eta_1 + A_1(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) + A_2 \xi_3 \eta_3 + A_3(\xi_1\eta_5 + \xi_5\eta_1) +$$
$$+ A_4(\xi_3\eta_5 + \xi_5\eta_3) + A_5 \xi_5 \eta_5.$$

Система уравнений для A_k, если внести туда численные значения $\alpha_{mn}^{(pq)}$ и ν, будет:

$$\begin{aligned}
(13{,}95-\lambda)\,A_0-32{,}08A_1+18{,}6A_2+32{,}08A_3-37{,}20A_4+18{,}60A_5&=0,\\
-16{,}04A_0+(411{,}8-\lambda)\,A_1-120{,}0A_2-133{,}6A_3+166{,}8A_4+140A_5&=0,\\
18{,}60A_0-240{,}0A_1+(1686-\lambda)\,A_2-218{,}0A_3-1134A_4+330A_5&=0,\\
16{,}04A_0-133{,}6A_1+109{,}0A_2+(2945-\lambda)\,A_3-424A_4+179A_5&=0,\\
-18{,}6A_0+166{,}8A_1-567A_2-424A_3+(6303-\lambda)\,A_4-1437A_5&=0,\\
18{,}6A_0+280A_1-330A_2+358A_3-2874A_4+(13674-\lambda)A_5&=0.
\end{aligned}$$

Идти обычным путем в решении этой системы крайне затруднительно, ибо уже уравнение для λ, получаемое от приравнивания нулю определителя системы, будет вековым уравнением 6-й степени, и действительное развертывание его заняло бы очень много времени. Однако одна особенность системы позволяет чрезвычайно упростить вычисления. Как и в примере, приведенном в предыдущем номере, здесь коэффициенты диагональных членов будут, вообще говоря, доминирующими. Если бы система действительно привелась к диагональным членам, то для λ мы получили бы следующие корни: $\lambda_1=13{,}95$, $\lambda_2=411{,}8$, $\lambda_3=1686$, ... Если остановиться на первом из них, то остается произвольным A_0, а остальные A_k следует принять равными нулю, если на втором — остается произвольным A_1 и т. д. Так как постоянный множитель не имеет для нас сейчас никакого значения, то при определении основного тона мы можем считать $A_0=1$.

Итак, примем за исходные значения $\lambda_0=13{,}95$, $A_1=A_2=\ldots=0$ и подставим эти значения во все члены, кроме диагональных, пяти последних уравнений. Из них найдем первые приближения для A_k, а из первого для λ, с помощью найденных значений вновь исправим все значения неизвестных. После нескольких шагов будем иметь следующие значения искомых величин:

$$A_1=0{,}0394;\ A_2=-0{,}0040;\ A_3=-0{,}0034;\ A_4=0{,}0011;\ A_5=-0{,}0019$$
$$\lambda=12{,}43.$$

Следовательно, собственная функция, отвечающая основному тону, приближенно будет равна:

$$u=\xi_1\eta_1+0{,}0394\,(\xi_1\eta_3+\eta_3\xi_1)-0{,}0040\xi_3\eta_3-0{,}0034\,(\xi_1\eta_5+\xi_5\eta_1)+\\+0{,}0011\,(\xi_3\eta_5+\xi_5\eta_3)-0{,}0019\xi_5\eta_5.$$

Аналогично вычисляются и все следующие собственные функции и числа.

§ 3. Приведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям [1]

Этот метод занимает промежуточное положение между точным решением задачи и методами Ритца и Б. Г. Галеркина. В методе Ритца задача о минимуме двойного интеграла сводилась к задаче о минимуме функции нескольких переменных. Это достигалось с помощью того,

[1]) Этот метод был предложен в работе Л. В. Канторовича [2].

что вид решения выбирался априорно и затем лишь подбирались наилучшие значения входящих в него постоянных.

При приведении к обыкновенным уравнениям решение разыскивают в такой форме, что в состав его входят неопределенные функции одного переменного. Таким образом, задача о минимуме двойного интеграла приводится к задаче о минимуме простого интеграла. Преимущество этого метода, кроме большей точности его, в том, что в нем лишь часть выражения, дающего решение, выбирается априорно, часть же функций определяется в соответствии с характером задачи.

Чтобы пояснить сущность метода, приведем следующий простой пример.

Пример. Найти приближенное решение уравнения Пуассона $\Delta u = -1$ для прямоугольника $[-a, a: -b, b]$ при условии $u = 0$ на контуре.

Решение ищем в форме

$$\bar{u} = (b^2 - y^2) f(x); \tag{1}$$

оно удовлетворяет граничному условию на прямых $y = \pm b$. Подставляя это выражение в интеграл, соответствующий данной задаче, находим:

$$I(\bar{u}) = \iint\limits_D \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 - 2\bar{u}\right] dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b}^{b} [(b^2 - y^2)^2 f'^2 + 4y^2 f^2 - 2f(b^2 - y^2)]\,dy.$$

Выполняя интегрирование по y, приводим задачу к минимуму простого интеграла:

$$I(\bar{u}) = \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{16}{15} b^5 f'^2 + \frac{8}{3} b^3 f^2 - \frac{8}{3} b^3 f\right) dx.$$

Соответствующее вариационное уравнение [ср. § 1, (5а)] будет

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{32}{15} b^5 f'\right) - \frac{3}{16} b^3 f + \frac{8}{3} b^3 = 0 \quad \text{или} \quad f'' - \frac{5}{2b^2} f = -\frac{5}{4b^2}.$$

Решая это уравнение с постоянными коэффициентами, находим:

$$f(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + \frac{1}{2}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий $f(a) = f(-a) = 0$, обеспечивающих выполнение условия $u = 0$ на сторонах $x = \pm a$. Так как решение, очевидно, четная функция x, то $C_2 = 0$; для определения C_1 имеем

$$C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b} + \frac{1}{2} = 0.$$

Подставляя найденное отсюда значение C_1, окончательно получаем

$$f=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right);\quad \bar{u}(x, y)=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right). \quad (2)$$

Отсюда, например, для момента получаем:[1]

$$M=4G\theta\iint_D \bar{u}(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=2G\theta\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right)dx\int_{-b}^{b}(b^2-y^2)\,dy=$$

$$=\frac{16}{3}b^3a\left[1-\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{b}{a}\cdot\operatorname{th}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}\right]G\theta.$$

Сравним это значение M с точным значением (гл. I, § 1, стр. 22) и приближенным значением (первое приближение) по методу Ритца[2] (§ 2, стр. 287):

$\frac{a}{b}$	1	2	3	∞
Точное M	2,244	3,659	4,213	5,333
Метод обыкновенных уравнений	2,234	3,653	4,209	5,333
Метод Ритца	2,222	3,555	4,000	4,444

Как видим, наибольшая ошибка около 0,5% получается для квадратного сечения; если $\frac{a}{b} \geqslant 2$, совпадение с точным решением почти полное. При сравнении с методом Ритца видно, что в наиболее невыгодном для сравнения случае $\frac{a}{b}=1$ последний метод дает ошибку, вдвое меньшую, чем метод Ритца. Немногим большая погрешность, чем в моментах, получается в самих значениях функций; так, например, при $a=1$, $b=0{,}5$ находим $u(0, 0)=0{,}11443$ вместо точного 0,11387,— погрешность 0,5%.

После этого вводного примера переходим к изложению метода в общем виде.

---

[1]) Ср. гл. I, стр. 20.

[2]) Приведены не сами величины момента, а только численные множители, стоящие при $ab^3G\theta$.

1. Основные уравнения. Рассмотрим снова уравнение Пуассона

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-p(x, y)=0 \tag{3}$$

при условии

$$u(x, y)=0 \text{ на } \Gamma, \tag{4}$$

где Γ — граница области D (рис. 22). Для определенности будем считать, что область D ограничена прямыми $x=a$ и $x=b$ и кривыми $y=g(x)$, $y=h(x)$; впрочем, это условие не существенно.

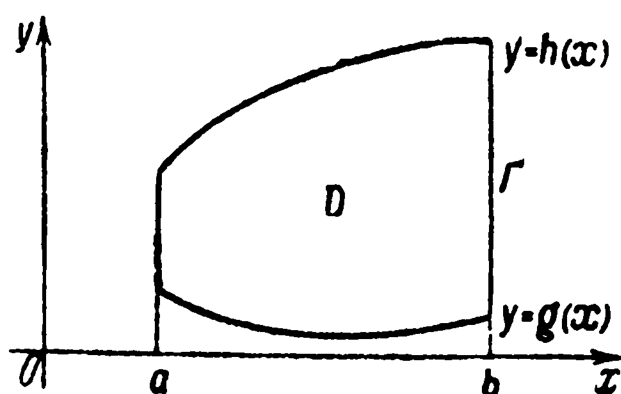


Рис. 22.

Решение разыскиваем в виде

$$u_n(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\chi_k(x, y)f_k(x)+\chi_0(x, y), \tag{5}$$

где функции $\chi_k(x, y)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ равны нулю на контуре Γ за исключением, может быть, прямых $x=a$ и $x=b$, а $\chi_0(x, y)=0$ повсюду на Γ. Подставляя выражение (5) в интеграл, соответствующий уравнению Пуассона, находим:

$$I(u_n)=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2+2pu_n\right]dx\,dy=$$

$$=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\chi_k}{\partial x}f_k+\sum_{k=1}^{n}\chi_k f_k'+\frac{\partial\chi_0}{\partial x}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\chi_k}{\partial y}f_k+\frac{\partial\chi_0}{\partial y}\right]^2+2p\left[\sum_{k=1}^{n}\chi_k f_k+\chi_0\right]\right\}dy=$$

$$=\int_a^b\Phi(x, f_k, f_k')\,dx, \tag{6}$$

где через Φ мы обозначили коротко подынтегральное выражение внешнего интеграла (6); в состав его будут входить f_k и f_k', в остальном же оно представляет известную функцию от x (интегрирование по y предполагается произведенным). Таким образом, задача свелась к минимуму простого интеграла; соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид [см. § 1, (5c)]:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial f_k'}-\frac{\partial\Phi}{\partial f_k}=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

или в раскрытом виде, после сокращения на 2:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k dy-\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial \chi_k}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial \chi_k}{\partial y}+p\chi_k\right)dy=0 \quad (7a)$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Произведем в первом слагаемом дифференцирование, согласно правилу дифференцирования интеграла по параметру; учитывая, что $\chi_k(x, y)$ равна нулю на линиях $y=g(x)$ и $y=h(x)$, находим:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k dy=\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k\right)dy+\left[\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k h'(x)\right]_{y=h(x)}-$$

$$-\left[\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k g'(x)\right]_{y=g(x)}=\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\chi_k+\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial \chi_k}{\partial x}\right)dy.$$

Далее второе слагаемое второго интеграла в (7a) преобразуем интегрированием по частям; получим

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial \chi_k}{\partial y}dy=\left[\frac{\partial u_n}{\partial y}\chi_k\right]_{g(x)}^{h(x)}-\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\chi_k dy=-\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\chi_k dy.$$

Подставляя результаты этих преобразований в (7a), можем этой системе уравнений придать следующий вид, аналогичный по форме уравнениям метода Галеркина:

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)}L(u_n)\chi_k dy=\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}-p\right)\chi_k dy=0$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (7b)$$

Эта форма уравнений значительно сокращает их составление.[1]) Полученную систему обыкновенных уравнений относительно функций f_k следует решить при граничных условиях $f_k(a)=f_k(b)=0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда для функции u_n (5) будет удовлетворено условие (4). В случае, если область имеет более сложный вид, чем изображенная на рис. 22, уравнения для определения функций f_k вместо (7b) получат такой вид:

$$\int\limits_{D_x}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}-p\right)\chi_k dy=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где D_x обозначает сечение области D прямой $x=\text{const}$.

---

[1]) Другой вывод этой системы уравнений дан в статье Л. В. Канторовича [16]. Приведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью интегральных соотношений и применение этого метода в ряде важных задач механики дано в работах А. А. Дородницына [1] и его сотрудников (О. М. Белоцерковский [1, 2], П. И. Чушкин [1, 2]).

Подобно методам Ритца и Б. Г. Галеркина, рассматриваемый метод может применяться не только в случае задачи Дирихле, но и для решения других граничных задач.[1]) Мы не будем останавливаться на этом. Укажем теперь возможные правила выбора функций $\chi_k(x, y)$.

Пусть $\varphi_k(y)$ — система линейно независимых функций, относительно полная в $[0, 1]$ (ср. стр. 285). Тогда система функций $\left\{\varphi_k\left(\frac{y-g}{h-g}\right)\right\}$ относительно полна в $[g, h]$. Поэтому для области, ограниченной прямыми $x=a$; $x=b$ и кривыми $y=g(x)$; $y=h(x)$ можно принять в качестве $\chi_k(x, y)$ систему функций

$$\chi_k(x, y)=\varphi_k\left(\frac{y-g(x)}{h(x)-g(x)}\right) \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Очевидно, что семейство (5), а вместе с ним и решение, не изменится, если вместо χ_k ввести χ_k^* такого рода, что каждая функция χ_k представляет линейную комбинацию χ_k^* $(k=1, 2, \ldots, n)$ и наоборот каждая χ_k^* линейная комбинация χ_k. В частности, можно функции χ_k выбирать следующим образом [ср. § 2, (12)]:

$$\chi_k(x, y)=(y-g(x))(h(x)-y)\,y^{k-1} \qquad (k=1, 2, \ldots), \tag{8a}$$

$$\chi_k(x, y)=\sin\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)} \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{8b}$$

Если область имеет более сложный вид, то часто приходится прибегать к нескольким заданиям χ_k и u_n на разных частях области, при построении которых целесообразно использовать интерполяционные формулы. Именно следует разбить область на конечное число частей вида, указанного на рис. 22, и в каждой части составить, как указано выше, свое выражение для u_n.[2]) Так, для области, изображенной на рис. 23, целесообразно ввести пять неизвестных функций f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, соответствующих прямым $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$, $y=5$, и, базируясь на них, интерполяционными формулами задать u_n.

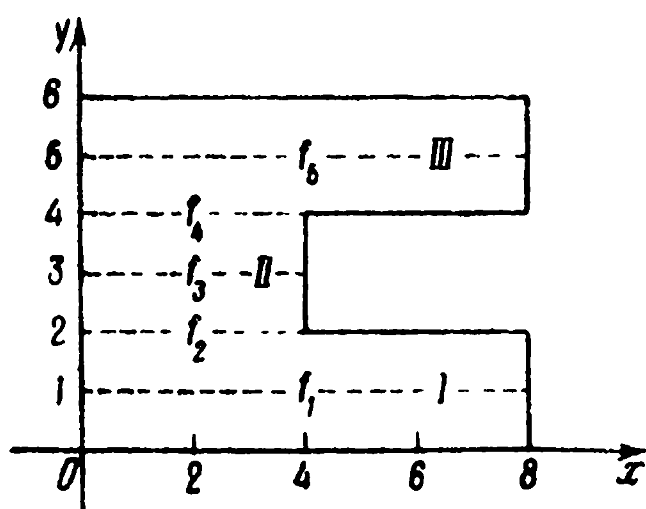


Рис. 23.

Если считать еще функции f_2, f_3, f_4 равными нулю на промежутке (4, 8), то выражение u_5, соответствующее условию $u=0$ на

---

[1]) Применение метода к решению третьей граничной задачи рассмотрено З. А. Власовой [1].

[2]) Другая форма применения метода приведения для областей такого вида указана З. А. Власовой [1].

контуре, будет следующее:

$$u_8(x, y) = \begin{cases} \frac{y(y-2)}{-1} f_1 + \frac{y(y-1)}{2} f_2 \text{ в области I: } [0,\ 8;\ 0,\ 2], \\ \frac{(y-3)(y-4)}{2} f_2 + \frac{(y-2)(y-4))}{-1} f_3 + \frac{(y-2)(y-3)}{2} f_4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{в области II: } [0,\ 4;\ 2,\ 4], \\ \frac{(y-5)(y-6)}{2} f_4 + \frac{(x-4)(y-6)}{-1} f_5 \text{ в области III: } [0,\ 8;\ 4,\ 6]. \end{cases}$$

Возможны, конечно, и другие способы сопряжения разных заданий. Отметим еще, что при построении выражения u_n с помощью интерполирования нет нужды заранее приводить условия к нулевым. Именно, если контурная функция на вертикальных участках контура—полином степени не выше той, которая используется при интерполировании, и на остальных участках контура — любая, то построенное с помощью интерполирования выражение будет точно удовлетворять граничным условиям. При этом, конечно, при решении дифференциальной системы, определяющей функции f_k, нужно граничные условия для функций f_k выбирать в соответствии с заданными значениями в точках пересечения прямой, отвечающей функции f_k, с контуром области.

Укажем, наконец, на то, что в ряде случаев весьма целесообразно упрощать вид области с помощью иного выбора системы координат.

2. Примеры нахождения первого приближения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Пуассона $\Delta u = p(x, y)$ для узкой области, ограниченной кривыми $y = \pm\varphi(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, при условии $u = 0$ на контуре.[1]) Для первого приближения решение ищем в виде полинома второй степени от y, и так как оно должно обращаться в нуль при $y = \pm\varphi(x)$, то разыскиваем его в виде

$$\bar{u} = (y^2 - \varphi^2) f. \tag{9}$$

Уравнение (7b) принимает в данном случае вид

$$\int_{D_x} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - p\right] (y^2 - \varphi^2)\, dy =$$

$$= \int_{-\varphi}^{\varphi} [(y^2 - \varphi^2) f'' - 4\varphi\varphi' f - 2(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') f + 2f - p] (y^2 - \varphi^2)\, dy = 0,$$

или, если выполнить интегрирование и произвести сокращение на $\frac{8}{3}\varphi^3$:

$$\frac{2}{5}\varphi^2 f'' + 2\varphi\varphi' f + (\varphi\varphi'' - \varphi'^2 - 1) f = \frac{3}{8\varphi^3}\Phi, \tag{10}$$

где $\Phi(x) = \int_{-\varphi}^{\varphi} p(x, y)(y^2 - \varphi^2)\, dy$.

---

[1]) См. Л. В. Канторович и П. В. Фрумкин [1].

В частности, в случае $p(x, y) = -1$ получаем:

$$\frac{2}{5}\varphi^2 f'' + 2\varphi\varphi' f + (\varphi\varphi'' + \varphi'^2 - 1) f = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Приведенный в введении пример, когда область есть прямоугольник, получается отсюда вновь, если принять $\varphi(x) = b$. Другой частный случай, когда уравнение (11) решается в конечном виде, — это когда функция $\varphi(x)$ линейна: $\varphi(x) = kx$. Уравнение (11) тогда принимает вид

$$x^2 f'' + 5xf' + \frac{5(k^2-1)}{2k^2} f = \frac{5}{4k^2}, \tag{12}$$

т. е. оказывается уравнением типа Эйлера.[1]) Разыскивая решение однородного уравнения в виде x^ν, для определения ν получаем уравнение

$$\nu(\nu-1) + 5\nu + \frac{5(k^2-1)}{2k^2} = 0, \text{ откуда, } \nu_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{6 + \frac{10}{k^2}}}{2}. \tag{13}$$

Таким образом, общее решение уравнения (12) есть

$$f = C_1 x^{\nu_1} + C_2 x^{\nu_2} + \lambda, \tag{14}$$

где

$$\nu_1 = \frac{-4 + \sqrt{6 + \frac{10}{k^2}}}{2}; \quad \nu_2 = \frac{-4 - \sqrt{6 + \frac{10}{k^2}}}{2}; \quad \lambda = \frac{1}{2(k^2-1)}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Искомое приближенное решение будет, следовательно,

$$\bar{u}(x, y) = (y^2 - k^2x^2)(C_1 x^{\nu_1} + C_2 x^{\nu_2} + \lambda). \tag{15}$$

Рассмотрим определение постоянных C_1 и C_2 для частных случаев.

Равнобочная трапеция, ограниченная прямыми $y = \pm kx$; $x = a$; $x = b$. Постоянные C_1 и C_2 определяются в таком случае из уравнений

$$f(a) = C_2 a^{\nu_1} + C_2 a^{\nu_2} + \lambda = 0; \quad f(b) = C_2 b^{\nu_1} + C_2 b^{\nu_2} + \lambda = 0. \tag{16}$$

Треугольник, ограниченный прямыми $y = \pm kx$; $x = b$. В этом случае $a = 0$, и первое из уравнений (16) теряет смысл. Но тогда, так как $\nu_2 < -2$, следует принять $C_2 = 0$, чтобы $\bar{u}(x, y)$ оставалась ограниченной вблизи $x = 0$. После этого C_1 определится из второго из условий (16), именно $C_1 = -\lambda b^{-\nu_1}$ и потому

$$\bar{u}(x, y) = (y^2 - k^2x^2)\frac{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^{\nu_1}}{2(k^2-1)}. \tag{17}$$

В частности, для равностороннего треугольника $k = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

[1]) В случае, когда $\varphi(x) = ax^\nu$, уравнение (11) представляет уравнение типа Бесселя. См. А. И. Лурье [1].

$\nu_1 = 1$, решение принимает особенно простой вид

$$\bar{u}(x, y) = -\frac{3}{4}\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right) \tag{18}$$

и совпадает с известным для этого случая точным решением.[1])

Пример 2.[2]) Рассмотрим решение той же задачи для параллелограма. Здесь целесообразно воспользоваться косоугольными координатами. Для краткости ограничимся случаем, когда острый угол θ параллелограма равен 45°.

Тогда формулы перехода будут

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta, \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

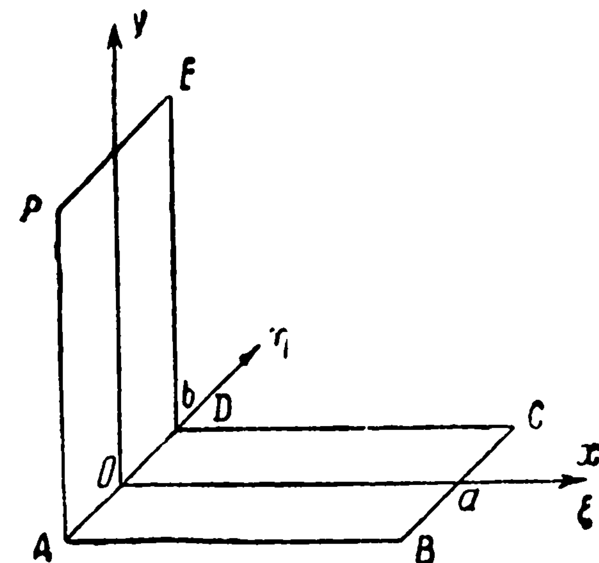


Рис. 24.

Решение для параллелограма $ABCD$ (рис. 24) ищем в виде

$$\bar{u}(x, y) = f(\xi)(b^2 - \eta^2). \tag{20}$$

В данном случае удобнее применить метод в непосредственном виде, не пользуясь уравнениями (7b), чтобы не преобразовывая оператор Лапласа к новым координатам, выполнить это преобразование в интеграле $I(u)$. Находим:

$$I(\bar{u}) = \iint\limits_{ABCD}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 - 2\bar{u}\right]dx\,dy = 2\sqrt{2}\int_0^a d\xi\int_{-b}^{b}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\right)^2 - \frac{1}{2}\bar{u}\right]d\eta = \sqrt{2}\int_0^a d\xi\int_{-b}^{b}[(b^2 - \eta^2)^2 f'^2 +$$

$$+ 2\sqrt{2}\eta(b^2 - \eta^2)ff' + 4\eta^2 f^2 - (b^2 - \eta^2)f]\,d\eta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^a\left(\frac{16}{15}b^5 f'^2 + \frac{8}{3}b^3 f^2 - \frac{4}{3}b^3 f\right)d\xi. \tag{21}$$

Уравнение Эйлера будет

$$4b^2 f'' - 10f + \frac{5}{2} = 0. \tag{22}$$

Решение его, удовлетворяющее условиям $f(0) = f(a) = 0$, имеет вид

$$f(\xi) = \frac{1}{4}\left(1 - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{\xi}{b}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}\right)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{\xi}{b}}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}.$$

---

[1]) Для этих двух областей в работе В. А. Стрешневой [1] построены таблицы характеристических чисел ν и некоторых вспомогательных коэффициентов для $n = 2$, 3 и показано, как можно использовать эти таблицы в случае других многоугольных областей.

[2]) По поводу примеров 2 и 3 см. Т. К. Чепова [1].

Пользуясь теми же координатами, можно найти решение для косого уголка $ABCDEF$, изображенного на том же рис. 24. Решение можно разыскивать для части его $ABCD$. Вопрос, очевидно, приводится к минимуму интеграла (21) при свободном варьировании на стороне AD. Поэтому при определении функции f из дифференциального уравнения (22) мы должны исходить из условий $f(a)=0$; $f'(0)=0$ [ср. § 1 (20)]. Определив отсюда постоянные и подставив найденное выражение в (20), получим:

$$\bar{u}(\xi, \eta)=\frac{1}{4}(b^2-\eta^2)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{10}}{2b}\xi}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{10}}{2b}a}\right). \tag{23}$$

Отсюда, например, момент кручения такого уголка

$$M=4G\vartheta\int\int\bar{u}\,dx\,dy=8G\vartheta\int_0^a\int_{-b}^{b}\frac{1}{4}(b^2-\eta^2)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{10}}{2b}\xi}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{10}}{2b}a}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{2}b^3\left(a-\frac{2b}{\sqrt{10}}\operatorname{th}\frac{a\sqrt{10}}{2b}\right)G\vartheta. \tag{24}$$

Пример 3. Рассмотрим решение уравнения Пуассона $\Delta u=-1$ при условии $u=0$ на контуре для трапеции, у которой близки параллельные стороны. Размеры трапеции $ABCD$ даны на рис. 25.

Целесообразно вместо x и y ввести новые координаты $\xi=\operatorname{tg}\theta$ и η, связанные с прежними формулами

$$x=\eta\xi,\quad y=-\eta+a-\frac{b}{2}. \tag{25}$$

Выражение $I(u)$ преобразуется следующим образом:

$$I=\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2u\right]dx\,dy=\int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\beta}\int_{a-b}^{a}\left[\frac{1+\xi^2}{\eta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2-2\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}-2u\right]\eta\,d\xi\,d\eta. \tag{26}$$

В координатах ξ, η трапеция определяется неравенствами $-\operatorname{tg}\alpha\leqslant\xi\leqslant\operatorname{tg}\beta$; $a-b\leqslant\eta\leqslant a$, поэтому решение ищем в виде

$$\bar{u}(\xi, \eta)=(\eta-a+b)(\eta-a)f(\xi). \tag{27}$$

Подставляя $\bar{u}$ в выражение I (26) и выполняя интегрирование по η, видим, что $I(\bar{u})$ с точностью до постоянного множителя оказывается равным

$$\int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\beta}[(1+\xi^2)f'^2(\xi)+c(f^2(\xi)+f(\xi))]\,d\xi, \tag{28}$$

где

$$c=\frac{b^3(2a-b)}{-6a^3b+9a^2b^2-2ab^3-\frac{1}{2}b^4+6a^2(a-b)^2\lg\frac{a}{a-b}}.$$

Уравнение Эйлера, отвечающее этой задаче, будет

$$(1+\xi^2) f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) - cf(\xi) - \frac{c}{2} = 0, \tag{29}$$

а граничные условия для определения $f: f(-\operatorname{tg}\alpha) = f(\operatorname{tg}\beta) = 0$.

Уравнение (29) есть уравнение Гаусса и в элементарных функциях не решается. Его решение можно найти в виде ряда — численно с помощью, например, метода Штермера и, наконец, с помощью метода Ритца, пользуясь тем, что оно связано с задачей о минимуме интеграла (28).

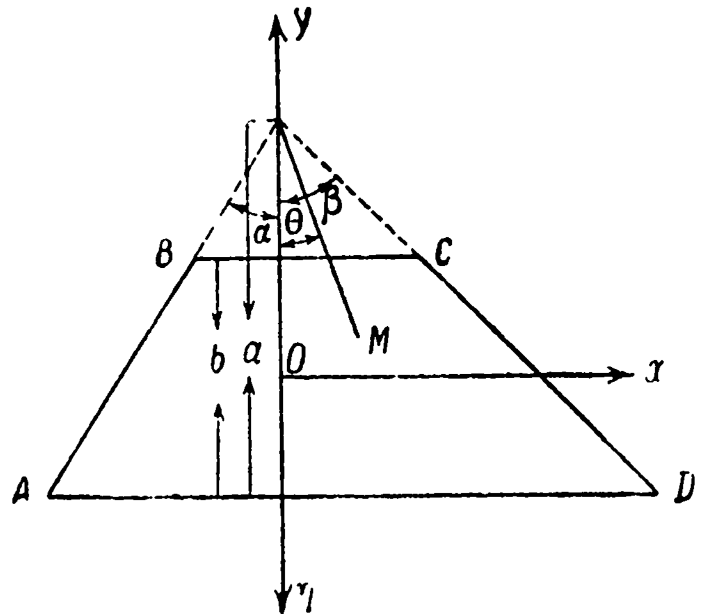


Рис. 25.

Укажем еще, что, исходя из тех же уравнений, можно получить приближенное решение задачи для прямоугольного уголка. Именно половина такого уголка есть трапеция $ABCD$ вида, указанного на рис. 25, соответствующая $\alpha = 0$ и $\beta = 45°$. Поэтому решение для этой половины уголка можно опять искать в виде (27), только на этот раз функция f будет решением уравнения (29), отвечающим граничным условиям

$$f(0) = 0;$$

$$f'(\operatorname{tg} 45°) = f'(1) = 0.$$

Пример 4. Наконец, на одном примере — задача о кручении симметричного уголка — мы покажем способ „стыка" — соединения решений, различных для разных частей области. [1])

Рассмотрим задачу о решении уравнения Пуассона $\Delta u = -1$ для симметричного уголка, размеры которого даны на рис. 26 при нулевых граничных условиях. Выделим предварительно прямоугольник $ABDE$. Граничные значения u на всех сторонах его нулевые, они не определены только на участке EO. Целесообразно принять, что здесь $u_1(x, y)$, как функция x, имеет вид параболической функции с неопределенным множителем:

$$u_1(x, 0) = Cx(x+d) \quad (-d \leqslant x \leqslant 0).$$

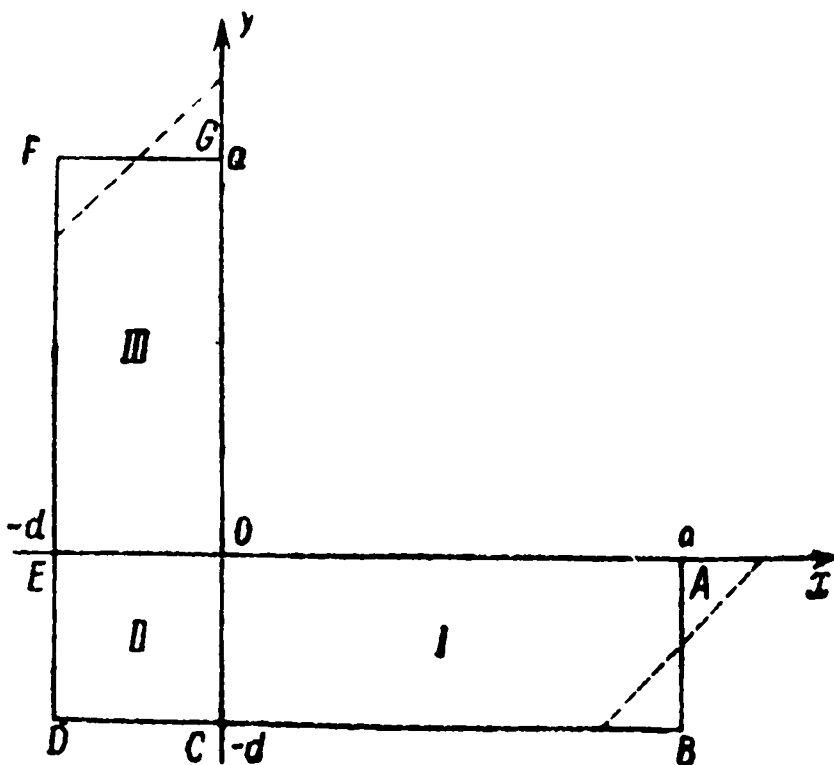


Рис. 26.

Далее решение для прямоугольника $ABDE$ ищем в виде

$$u_1(x, y) = f(x)\, y\,(y+d) + u_0(x, y),$$

где

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{в области I}, \\ \dfrac{C}{d}\, x\,(x+d)(y+d) & \text{в области II}. \end{cases}$$

В таком случае, если при нахождении f подчинить ее условиям

$$f(-d) = f(a) = 0,$$

для $u_1(x, y)$ будут удовлетворены на сторонах прямоугольника $ABDE$ все граничные условия, в частности дополнительно поставленное условие на участке EO.

---

[1]) См. работу Л. В. Канторовича [16].

Составляем дифференциальное уравнение [см. (7b)] для определения $f(x)$:

$$\int_{-d}^{0}[\Delta u_1+1]\,y\,(y+d)\,dy=\frac{1}{30}d^3f''-\frac{1}{3}d^3f-\frac{1}{6}d^3-\frac{1}{6}Cd^3=0\quad (x<0),$$

причем последнее слагаемое присутствует, только если $x<0$, т. е. мы находимся в пределах II области. Решая полученное уравнение, можем написать его решение в виде

$$f(x)=A\,\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\,\frac{x+d}{d}+B\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\,\frac{x+d}{d}-\frac{1}{2}-\frac{C}{2}\left(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\,\frac{x}{d}\right)(x<0).$$

Определяя постоянные A и B из условий $f(-d)=f(a)=0$, находим:

$$A=\frac{1}{2}+\frac{C}{2}(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{10});$$

$$B=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right)}-\frac{1}{2}\,\mathrm{cth}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right)\cdot[1+C(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{10})].$$

Далее, благодаря симметрии ясно, что на линии CO функция должна иметь тот же вид, что и на EO, и так как $u(0,y)=f(0)(y+d)y\ (-d\leqslant y\leqslant 0)$, то мы должны иметь $f(0)=C$ или

$$A\,\mathrm{ch}\,\sqrt{10}+B\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10}-\frac{1}{2}=C.$$

Подставляя в это уравнение вместо A и B их значения, получаем возможность определить C. Находим именно, что

$$C=\frac{1}{2}\,\frac{-1+\mathrm{ch}\,\sqrt{10}+\dfrac{\mathrm{sh}\,\sqrt{10}}{\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right)}-\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\,\mathrm{cth}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right)}{1+\frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\,(\mathrm{ch}\,\sqrt{10}-1)-\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\,(\mathrm{ch}\,\sqrt{10}-1)\,\mathrm{cth}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right)}.$$

Выражения A, B и C весьма упрощаются, если считать отношение $\frac{a}{d}$ настолько значительным, что величиной $e^{-\sqrt{10}\left(\frac{a}{d}+1\right)}$ можно пренебречь $\left(\text{уже при } \frac{a}{d}=1 \text{ эта величина меньше } 0{,}002\right)$. Тогда получаем:

$$C=-\frac{1}{2}\,\frac{1-\mathrm{ch}\,\sqrt{10}+\mathrm{sh}\,\sqrt{10}}{1+\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\sqrt{10}-\mathrm{sh}\,\sqrt{10})(\mathrm{ch}\,\sqrt{10}-1)}=-0{,}3895;$$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{C}{2}(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{10})\cong 2{,}610;$$

$$B\cong\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right)}-A\cong -A=-2{,}610.$$

Для этого именно случая подсчитаем величину $\iint u_1\,dx\,dy$, которая нужна для определения момента кручения. Имеем:

$$\iint\limits_{\rm II} u_1\,dx\,dy = \int\limits_{-d}^{0} dx \int\limits_{-d}^{0} \Big\{ \Big[A\,\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\,\frac{x+d}{d} + B\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\,\frac{x+d}{d} - \frac{1}{2} -$$

$$-\frac{C}{2}\left(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\,\frac{x}{d}\right)\Big]\cdot y(y+d) + \frac{C}{2}\,x\,(x+d)(y+d)\Big\}\,dy =$$

$$= \frac{d}{\sqrt{10}}\Big[A\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10} + B\,(\mathrm{ch}\,\sqrt{10}-1) - \frac{\sqrt{10}}{2} +$$

$$+\frac{C}{2}\,(\mathrm{sh}\,\sqrt{10} - \sqrt{10})\Big]\left(-\frac{d^3}{6}\right) + \frac{C}{d}\left(-\frac{d^3}{6}\right)\left(\frac{d^2}{2}\right) \cong 0{,}0726\,d^4;$$

$$\iint\limits_{\rm III} u_1\,dx\,dy = \iint\limits_{\rm I} u_1\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{-d}^{0} \Big[A\,\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\,\frac{x+d}{d} +$$

$$+B\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\,\frac{x+d}{d} - \frac{1}{2}\Big]\,y\cdot(y+d)\,dy = \Big[\frac{d}{\sqrt{10}}\,A\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right) +$$

$$+\frac{d}{\sqrt{10}}\,B\,\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right) - \frac{1}{2}\,a - \frac{d}{\sqrt{10}}\,(A\,\mathrm{sh}\,\sqrt{10} + B\,\mathrm{ch}\,\sqrt{10}\Big]\left(-\frac{d^3}{6}\right).$$

Если воспользоваться теперь выражением для B и с помощью его исключить отсюда A, то найдем:

$$\iint\limits_{\rm I} u_1\,dx\,dy \cong \Big[\frac{d}{\sqrt{10}}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{cth}\,\sqrt{10}\left(1+\frac{a}{d}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\,a - \frac{d}{\sqrt{10}}\,B\,(\mathrm{ch}\,\sqrt{10} - \mathrm{sh}\,\sqrt{10})\Big]\left(-\frac{d^3}{6}\right) \cong$$

$$\cong \frac{1}{2}\Big\{a + \frac{d}{\sqrt{10}}\Big[2B\,(\mathrm{ch}\,\sqrt{10} - \mathrm{sh}\,\sqrt{10}) - 1\Big]\Big\}\frac{d^3}{6}.$$

Окончательно для момента кручения находим

$$M = 4G\vartheta \iint u_1\,dx\,dy = 4G\vartheta\Big(\iint\limits_{\rm I} u_1\,dx\,dy + \iint\limits_{\rm II} u_1\,dx\,dy +$$

$$+\iint\limits_{\rm III} u_1\,dx\,dy\Big) \cong \left(1+0{,}050\,\frac{d}{a}\right)\frac{2}{3}\,ad^3G\vartheta^{1})$$

[1]) Иным образом метод приведения к обыкновенным уравнениям применен в задаче о кручении прокатных профилей в работе Н. Х. Арутюняна [1].

Сравним полученное значение с моментом кручения подходящего косого уголка, изображенного пунктиром на рис. 26. Последний, если воспользоваться формулой (24), оказывается равным

$$M=\left(1-0{,}3942\frac{d}{a}\right)\frac{2}{3}\,ad^3G\vartheta.$$

Как видим, разница довольно значительна [1]).

3. Примеры уточнения решения. Здесь мы на одном и том же примере — решении уравнения Пуассона для прямоугольника — покажем способы получения более точных решений, чем даваемое первым приближением.

1. *Построение второго приближения.* Будем теперь разыскивать решение уравнения $\Delta u=-1$ для прямоугольника $[-a,\ a;\ -b,\ b]$ в виде полинома 4-й степени от y, вводя две неизвестные функции f_1 и f_2

$$u=(y^2-b^2)\,[f_1(x)+f_2(x)\,y^2]. \tag{30}$$

Уравнения (7b) здесь принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-b}^{b}[(y^2-b^2)(f_1''+f_2''y^2)+2f_1+f_2(12y^2-2b^2)+1](y^2-b^2)\,dy=0,\\&\int_{-b}^{b}[(y^2-b^2)(f_1''+f_2''y^2)+2f_1+f_2(12y^2-2b^2)+1](y^2-b^2)y^2dy=0,\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

или после интегрирования по y:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{8}{15}b^5f_1''+\frac{8}{105}b^7f_2''-\frac{4}{3}b^3f_1-\frac{4}{15}b^5f_2-\frac{2}{3}b^3=0,\\&\frac{8}{105}b^7f_1''+\frac{8}{315}b^9f_2''-\frac{4}{15}b^5f_1-\frac{44}{105}b^7f_2-\frac{2}{15}b^5=0.\end{aligned}\right\}\tag{31'}$$

Для решения соответствующей однородной системы вводим вспомогательную функцию V, полагая [2])

$$f_1=-\left(\frac{8}{105}b^4D^2-\frac{4}{15}b^2\right)V;\qquad f_2=\left(\frac{8}{15}b^2D^2-\frac{4}{3}\right)V. \tag{32}$$

Тогда для определения V получим уравнение:

$$\left[\left(\frac{8}{15}b^2D^2-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{8}{315}b^2D^2-\frac{44}{105}\right)-\left(\frac{8}{105}b^2D^2-\frac{4}{15}\right)^2\right]V=0.$$

---

[1]) Применение рассматриваемого метода в задаче с тремя переменными дано в работе Н. А. Быстрова [1].

[2]) D — оператор дифференцирования. См. В. И. Смирнов [1], т. II, стр. 125.

Характеристическое уравнение после сокращения будет

$$b^4D^4 - 28b^2D^2 + 63 = 0. \tag{33}$$

Корни его $\pm\alpha\frac{1}{b}$ и $\pm\gamma\frac{1}{b}$, где

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{14-\sqrt{133}} = \sqrt{2,467437} = 1,570815;\\ \gamma &= \sqrt{14+\sqrt{133}} = \sqrt{25,5326} = 5,05297. \end{aligned} \tag{34}$$

Отсюда общее решение для V будет

$$V = A\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b} + A_1\operatorname{sh}\alpha\frac{x}{b} + C\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b} + C_1\operatorname{sh}\gamma\frac{x}{b}.$$

При этом, так как решение должно быть четной функцией x, следует сразу принять $A_1 = C_1 = 0$. Отсюда для f_1 и f_2, если учесть еще частные решения $f_1 = -\frac{1}{2}$, $f_2 = 0$, получаем следующие выражения:

$$f_1 = -b^2\left(\frac{8}{105}\alpha^2 - \frac{4}{15}\right)A\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b} - b^2\left(\frac{8}{105}\gamma^2 - \frac{4}{15}\right)C\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b} - \frac{1}{2} =$$
$$= 0,0786b^2A\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b} - 1,6787b^2C\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b} - \frac{1}{2},$$

$$f_2 = \left(\frac{8}{15}\alpha^2 - \frac{4}{3}\right)A\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b} + \left(\frac{8}{15}\gamma^2 - \frac{4}{3}\right)C\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b} =$$
$$= -0,01738A\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b} + 12,284\,C\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b}.$$

Теперь из условий $f_1(a) = f_2(a) = 0$ определяем постоянные A и C и окончательно находим:

$$f_1(x) = 0,51558\frac{\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}} - 0,01558\frac{\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\gamma\frac{a}{b}} - \frac{1}{2},$$

$$f_2(x) = -0,11400\frac{\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}}{b^2\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}} + 0,11400\frac{\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b}}{b^2\operatorname{ch}\gamma\frac{a}{b}},$$

$$\bar{u}(x, y) = (y^2 - b^2)\left[0,51558\frac{\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}} + 0,01558\frac{\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\gamma\frac{a}{b}} - \frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + \left(-0,11400\frac{\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}}{b^2\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}} + 0,11400\frac{\operatorname{ch}\gamma\frac{x}{b}}{b^2\operatorname{ch}\gamma\frac{a}{b}}\right)y^2\right]. \tag{35}$$

Для проверки точности решения вычисляем его значения для $a=2$, $b=1$ в двух точках, получим $\bar{u}(0, 0)=0{,}45552$, $\bar{u}\left(1, \frac{1}{2}\right)=0{,}29586$. Точные значения равны соответственно 0,45549 и 0,29501.

2. *Удовлетворение уравнению на границах.* Решение в том же виде, что и в предыдущем случае, несколько менее точное, но с значительно более простыми выкладками, можно получить другим путем.

Будем искать решение в той же самой форме (30), только введем предварительно требование, чтобы на прямых $y=\pm b$ было удовлетворено уравнение $\Delta u=-1$.[1])

Это дает нам

$$[(y^2-b^2)(f_1''+f_2''y^2)+2f_1+f_2(12y^2-2b^2)+1]_{y=b}=0. \qquad (36)$$

Отсюда $f_2=-\frac{1}{10b^2}(2f_1+1)$. Подставляя это выражение в (30), мы должны искать теперь u в виде

$$u(x, y)=f_1\left(-\frac{1}{5b^2}y^4+\frac{6}{5}y^2-b^2\right)-\frac{1}{10b^2}(y^4-b^2y^2). \qquad (37)$$

Тогда уравнение (7b) примет вид

$$\int_{-b}^{b}\left[f_1''\left(-\frac{1}{5b^2}y^4+\frac{6}{5}y^2-b^2\right)+f_1\left(-\frac{12}{5b^2}y^2+\frac{12}{5}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{10b^2}(12y^2-2b^2)+1\right]\left(-\frac{1}{5b^2}y^4+\frac{6}{5}y^2-b^2\right)dy=0,$$

или после интегрирования по y:

$$25{,}19365b^2f_1''-62{,}17143f_1-31{,}08572=0. \qquad (38)$$

Решая это уравнение при условии $f_1(a)=0$, найдем

$$f_1=C\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}-\frac{1}{2},$$

где $\alpha=1{,}57092$, или окончательно

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}}-1\right), \qquad (39)$$

$$\bar{u}(x, y)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5b^2}y^4+\frac{6}{5}y^2-b^2\right)\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}}-1\right)-\frac{1}{10b^2}(y^4-b^2y^2).$$

---

[1]) Удовлетворение уравнению на некоторых линиях как метод приближенной замены уравнения в частных производных на одно или систему обыкновенных уравнений было предложено в заметке Л. В. Канторовича [6]. Здесь мы комбинируем этот прием с вариационным методом.

Вычисляя опять $\bar{u}(0, 0)$ и $\bar{u}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ для $a=2$, $b=1$, находим $\bar{u}(0, 0)=0{,}456865$; $\bar{u}\left(1, \frac{1}{2}\right)=0{,}297886$.

Следует заметить, правда, что полученное здесь приближенное решение в отличие от решения, полученного в 1) и в введении к параграфу, на сторонах $x=\pm a$ не удовлетворяет точно граничному условию $u=0$, а удовлетворяет ему лишь приближенно.

3. *Точное решение задачи.* Покажем теперь, что при другом выборе вида решения как функции y можно этим методом прийти к точному решению задачи. Именно, будем разыскивать решение в виде

$$u(x, y)=\cos\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}f_1(x)+\cos 3\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}f_2(x)+ \\ +\cos 5\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}f_3(x)+\ldots \quad (40)$$

Тогда удовлетворение граничного условия $u=0$ обеспечено на сторонах $y=\pm b$. Уравнения (7b) принимают вид:

$$\int_{-b}^{b}(\Delta u+1)\cos\left(s\pi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{y}{b}\,dy= \\ =\int_{-b}^{b}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{y}{b}f_k''-\sum_{k=1}^{\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{b^2}\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{y}{b}f_k+1\right]\times \\ \times\cos\left(s\pi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{y}{b}\,dy=0 \quad (s=1, 2, \ldots), \quad (41)$$

или после интегрирования по y, принимая во внимание взаимную ортогональность функций $\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{y}{b}$, получаем систему в таком виде:

$$bf_s''-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{b}f_s-(-1)^s\frac{2b}{\pi\left(s-\frac{1}{2}\right)}=0 \quad (s=1, 2\ldots). \quad (41')$$

В данном случае неизвестные функции разделились, в каждое уравнение входит только одна функция. Решая уравнения при условии $f_s(a)=f_s(-a)=0$, находим:

$$f_s(x)=\frac{(-1)^{s-1}2b^2}{\pi^3\left(s-\frac{1}{2}\right)^3}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\left(s-\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\left(s-\frac{1}{2}\right)\pi\frac{a}{b}}\right], \quad (42)$$

отсюда

$$u(x, y)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}16b^2}{\pi^3(2s-1)^3}\left[1-\frac{\operatorname{ch}(2s-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}(2s-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}\right]\cos(2s-1)\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}. \quad (43)$$

Но первая часть данной суммы

$$\frac{16b^2}{\pi^3}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^3}\cos(2s-1)\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}, \tag{44}$$

как нетрудно убедиться, представляет разложение функции $\frac{1}{2}(b^2-y^2)$ в промежутке $(0, b)$ в ряд по функциям $\cos\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}$, $\cos 3\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}, \ldots$ Поэтому решению можно окончательно придать такой вид:

$$u(x, y) =$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-y^2)-\frac{16b^2}{\pi^3}\sum_{n=1, 3, 5,\ldots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{ch} n\frac{\pi}{2}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch} n\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}}\cos n\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}, \tag{45}$$

что отличается от решения той же задачи, полученного в гл. I (стр. 21), лишь расположением координатной системы.

Тот факт, что (45) действительно представляет решение задачи, может быть обоснован и непосредственно. Именно, легко проверить, что для ряда, составленного для $\Delta u+1$, допустимо почленное интегрирование по y после домножения на $\cos(2s-1)\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}$.

Так как $f_s(x)$ удовлетворяют уравнениям (41′), то выполнены равенства (41), которые показывают, что при каждом x выражение $\Delta u+1$, как функция от y, ортогонально ко всем функциям $\cos\frac{\pi}{2}\frac{y}{b}$, $\cos 3\frac{\pi}{2}\frac{y}{b},\ldots$, что возможно, только если оно — тождественный нуль. Итак, u удовлетворяет уравнению $\Delta u+1=0$; тот факт, что $u=0$ на контуре, проверяется непосредственно.

Отметим еще, что тем же путем может быть найдено точное решение и для общего уравнения $\Delta u=p(x, y)$ для прямоугольника.[1])

4. *Некоторые численные методы.* В случае сравнительно сложного вида контура точное решение системы дифференциальных уравнений, получающейся для определения функций $f_1, f_2, \ldots$, оказывается невозможным. В таком случае можно рекомендовать численное интегрирование этой системы, которое для обыкновенных уравнений хорошо разработано.

Возможен и другой путь. Контур области можно приближенно заменить на многоугольник. Тогда уравнения для определения функ-

---

[1]) См. работу Л. В. Канторовича [16].

ций $f_1, f_2, \ldots$ будут представлять уравнения типа Эйлера (см. n° 2, пример 1), а потому могут быть проинтегрированы в конечном виде.[1])

4. Пример применения метода к бигармоническому уравнению. Рассмотрим задачу о прогибе прямоугольной пластины, защемленной по сторонам $y = \pm b$ и с любым способом закрепления по сторонам $x = \pm a$.

Задача приводится к решению уравнения

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \tag{46}$$

где p — функция нагрузки, D — постоянная, связанная с упругими постоянными. Граничные условия будут

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm b, \tag{47}$$

а также условия на сторонах $x = \pm a$, отвечающие способам их закрепления. Для того чтобы обеспечить выполнение условий (47), нужно разыскивать решение в виде

$$u = \varphi_1(y) f_1(x) + \varphi_2(y) f_2(x) + \ldots + \varphi_n(y) f_n(x), \tag{48}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots$ — функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_k(\pm b) = \varphi_k'(\pm b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{49}$$

Такие функции можно избрать различным образом, в частности в случае, если все условия задачи симметричны относительно оси OX, и тем самым u — четная функция от y, можно положить

$$\varphi_k(y) = (y^2 - b^2)^2 \cdot y^{2k-2}. \tag{50}$$

Останавливаясь на этом случае и ограничиваясь первым приближением, мы должны принять

$$\bar{u}(x, y) = (y^2 - b^2)^2 f(x). \tag{51}$$

В данном случае, так же как и в случае уравнения Пуассона, можно воспользоваться уравнением в форме Галеркина. Поэтому получим

[1]) В иной форме метод замены уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений (замена производных по одной из переменных разностями) разработан М. Г. Слободянским [1, 2]. См. также работу В. Н. Фаддеевой [1], где дается дальнейшая разработка этого метода, вспомогательные таблицы и рассматривается взаимоотношение его с методом, изложенным в работе Л. В. Канторовича [6].

дифференциальное уравнение для определения f в такой форме:

$$\int_{-b}^{b}\left(\Delta\Delta u - \frac{p}{D}\right)\varphi_1(y)dy =$$

$$= \int_{-b}^{b}\left[24f + 2(12y^2 - 4b^2)f'' + (y^2 - b^2)f^{IV} - \frac{p}{D}\right]\cdot(y^2 - b^2)^2 dy = 0, \quad (52)$$

или

$$\frac{2\cdot 128}{315}b^9 f^{IV} - \frac{2\cdot 256}{315}b^7 f'' + \frac{2\cdot 64}{5}b^5 f = p_1(x), \quad (52')$$

где

$$p_1(x) = \int_{-b}^{b}\frac{p(x, y)}{D}(y^2 - b^2)^2 dy.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\frac{2\cdot 128}{315}b^9\lambda^4 - \frac{2\cdot 256}{315}b^7\lambda^2 + \frac{2\cdot 64}{5}b^5 = 0,$$

корни его

$$\lambda_{1,2,3,4} = (\pm\alpha \pm \beta i)\frac{1}{b}; \quad \alpha = 2{,}075; \quad \beta = 1{,}143.$$

Общее решение уравнения (52′) будет

$$f(x) = A_1 \operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}\cos\beta\frac{x}{b} + A_2 \operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}\sin\beta\frac{x}{b} + B_1 \operatorname{sh}\alpha\frac{x}{b}\sin\beta\frac{x}{b} + B_2 \operatorname{sh}\alpha\frac{x}{b}\cos\beta\frac{x}{b} + f_0(x),$$

где $f_0(x)$ — частное решение уравнения (52′). Если нагрузка постоянная ($p = \text{const}$), то $p_1 = \frac{2\cdot 8}{15}b^5\frac{p}{D}$, а потому $f_0 = \frac{1}{24}\frac{p}{D}$. Далее, если условия на сторонах $x = +a$ и $x = -a$ одинаковы, то $u(x, y)$, а потому и f, должны быть четными функциями от x, и $f(x)$ примет вид

$$f(x) = A \operatorname{ch}\alpha\frac{x}{b}\cos\beta\frac{x}{b} + B \operatorname{sh}\frac{x}{b}\sin\beta\frac{x}{b} + \frac{1}{24}\frac{p}{D}. \quad (53)$$

Постоянные A и B должны быть определены в соответствии с условиями закрепления сторон $x = \pm a$. В частности, если эти стороны также защемлены, они определяются из уравнений

$$f(a) = A \operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}\cos\beta\frac{a}{b} + B \operatorname{sh}\alpha\frac{a}{b}\sin\beta\frac{a}{b} + \frac{1}{24}\frac{p}{D} = 0,$$

$$f'(a) = A\left(\frac{\alpha}{b}\operatorname{sh}\alpha\frac{a}{b}\cos\beta\frac{a}{b} - \frac{\beta}{b}\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}\sin\beta\frac{a}{b}\right) + B\left(\frac{\alpha}{b}\operatorname{ch}\alpha\frac{a}{b}\sin\beta\frac{a}{b} + \frac{\beta}{b}\operatorname{sh}\alpha\frac{a}{b}\cos\beta\frac{a}{b}\right) = 0,$$

откуда

$$A=\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\cdot\frac{1}{24}\frac{p}{D};\qquad B=\frac{\gamma_2}{\gamma_0}\cdot\frac{1}{24}\frac{p}{D},$$

где

$$\gamma_0=\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha\mu\,\mathrm{ch}\,\alpha\mu+\alpha\sin\beta\mu\cos\beta\mu;\quad \gamma_1=-(\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha\mu\sin\beta\mu+\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha\mu\cos\beta\mu);$$

$$\gamma_2=\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\mu\cos\beta\mu-\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha\mu\sin\beta\mu;\quad \mu=\frac{a}{b}. \tag{54}$$

Окончательный вид приближенного решения будет

$$u(x,\ y)=(b^2-y^2)^2\frac{1}{24\gamma_0}\frac{p}{D}\left(\gamma_1\,\mathrm{ch}\,\alpha\frac{x}{b}\cos\beta\frac{x}{b}+\gamma_2\,\mathrm{sh}\,\alpha\frac{x}{b}\sin\beta\frac{x}{b}\right)+$$
$$+\frac{1}{24}\frac{p}{D}(y^2-b^2)^2. \tag{55}$$

Нетрудно убедиться, что если $a=\infty$ и отношение $\mu=\frac{a}{b}=\infty$, то (55) дает $u=\frac{1}{24}\frac{p}{D}(y^2-b^2)^2$ — точное решение для данного случая. Приведем также некоторые численные данные для случая квадратной пластинки $\mu=1$.

Для наибольшего прогиба находим:

$$u(0,\ 0)=0{,}479\frac{1}{24}\frac{p}{D}b^4=0{,}01363\frac{p\,(2b)^4}{Eh^3}$$
$$\left(D=\frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)},\quad \nu=0{,}3\right),$$

вместо точного 0,0138. Для момента посредине получаем: [1])

$$\sigma_x=0{,}140\frac{p\,(2b)^2}{h^2};\quad \sigma_y=0{,}138\frac{p\,(2b)^2}{h^2},$$

вместо точного $\sigma_x=\sigma_y=0{,}137\frac{p\,(2b)^2}{h^2}$. Как видим, погрешность в прогибах и в моменте посредине даже в этом наихудшем случае не превосходит 1—2%.

С соответствующими видоизменениями этот метод применим и к другим случаям заделки пластин. Так, например, если стороны $y=\pm b$ оперты, следует функции $\varphi_k(y)$ избрать так, что $\varphi_k(\pm b)=\varphi_k''(\pm b)=0$. В частности, можно принять $\varphi_1(y)=y^4-6b^2y^2+5b^4$.

---

[1]) Численные данные и некоторые вычисления взяты из работы Н. С. Семенова [1]. Другие применения этого метода в теории пластинок даны в работах Т. Н. Рогова [1] (треугольная плита), И. А. Баславского [1] (плита переменной жесткости). В теории оболочек подобный метод применялся В. З. Власовым [1].

В случае, если сторона $y=-b$ заделана, а $y=+b$ свободна, можно для первого приближения u задать в виде $u=(y+b)^2 f(x)$. Однако интеграл $I(u)$ в данном случае нужно взять в полном виде [§ 1, (28)]. При этом, так как мы не удовлетворяем здесь заранее граничным условиям, уравнением в форме Галеркина пользоваться нельзя.

5. Применение метода к нахождению собственных значений и собственных функций. Подобно методам Ритца и Галеркина, метод приведения к обыкновенным уравнениям может быть использован с успехом и для задачи нахождения собственных значений и функций.

Для определенности рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{56}$$

при условии $u=0$ на Γ. Будем искать решение в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x, y) f_k(x) + \chi_0(x, y)$$

так, чтобы выражение для u_n обращалось в нуль повсюду на Γ в силу выбора функций χ_k и граничных условий для f_k. Проще всего подойти к составлению необходимых уравнений из соображений метода Галеркина. В таком случае мы получаем, что функции $f_1, \ldots, f_n$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\int_{D_x} [\Delta u_n + \lambda u_n] \chi_s \, dy = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{57}$$

и обращаться в нуль при крайних значениях аргумента. Как правило, единственным решением системы (57) при таких условиях будет тривиальное $f_s=0$ $(s=1, 2, \ldots, n)$; те значения λ, при которых имеется нетривиальное решение, дадут приближенную величину собственных значений, а сами решения дадут приближения к собственным функциям. К тем же уравнениям и условиям можно было бы прийти и исходя из экстремальных свойств собственных значений и функций (§ 1, n° 5); именно, рассуждая, как в § 2, n° 5, мы пришли бы здесь для определения функций f_s к изопериметрической задаче, которая опять привела бы нас к уравнениям (57).

Проиллюстрируем применение метода на примере прямоугольника $[-a, a; -b, b]$. Опять решение разыскиваем в виде $u=(y^2-b^2)f$. Уравнение (57) примет вид:

$$\int_{-b}^{b} [2f + (y^2-b^2)f'' + \lambda(y^2-b^2)f](y^2-b^2)\, dy = 0, \tag{58}$$

или

$$\frac{16}{15} b^5 f'' + \left(\frac{16}{15} b^5 \lambda + \frac{8}{3} b^3\right) f = 0, \tag{58'}$$

при условиях $f(a)=f(-a)=0$. Общее решение уравнения (58′) есть

$$f=A\sin\sqrt{\lambda-\frac{5}{2b^2}}\,x+B\cos\sqrt{\lambda-\frac{5}{2b^2}}\,x.$$

Если учесть симметрию и предельное условие $f(a)=0$, то найдем $A=0$, $B\cos\sqrt{\lambda-\frac{5}{2b^2}}\,a=0$, откуда ясно, что нетривиальное решение получается, только если

$$\sqrt{\lambda-\frac{5}{2b^2}}\,a=(2k-1)\frac{\pi}{2};\qquad \lambda=\frac{(2k-1)^2\pi^2}{(2a)^2}+\frac{5}{2b^2}.$$

В частности, для $k=1$ находим $\lambda=\frac{\pi^2}{(2a)^2}+\frac{10}{(2b)^2}$ вместо точного значения $\lambda=\frac{\pi^2}{(2a)^2}+\frac{\pi^2}{(2b)^2}$. Ошибка меньше 1,3%. Определив, далее, при данном λ функцию f, для первой собственной функции получаем приближение

$$u=(y^2-b^2)\cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}.$$

В этой задаче также могут быть применены все приемы уточнения решения, указанные в n° 3. Применим прием, указанный в n° 3, 2).

Итак, будем разыскивать решение той же задачи в виде

$$u=(y^2-b^2)(f_1+f_2y^2).$$

Требование, что u должно удовлетворять уравнению $\Delta u+\lambda u=0$ при $y=\pm b$, дает $f_1=-5b^2f_2$. Учитывая это, мы должны разыскивать решение в виде

$$u=(y^2-b^2)(y^2-5b^2)f.$$

Уравнение (57) в данном случае принимает вид

$$\int\limits_{-b}^{b}(\Delta u+\lambda u)\chi_1\,dy=\int\limits_{-b}^{b}[(y^2-b^2)(y^2-5b^2)f''+12(y^2-b^2)f+$$
$$+\lambda(y^2-b^2)(y^2-5b^2)f](y^2-b^2)(y^2-5b^2)\,dy=0$$

или, если выполнить интегрирование,

$$62b^2f''+(62b^2\lambda-153)f=0.$$

Отсюда четное решение уравнения будет

$$f(x)=C\cos\sqrt{\lambda-\frac{153}{62b^2}}\,x.$$

Если принять теперь во внимание условие $f(a)=0$, видим, что нетривиальное решение получается, только когда

$$\cos\sqrt{\lambda-\frac{153}{62b^2}}\,a=0;\quad \sqrt{\lambda-\frac{153}{62b^2}}\,a=(2k-1)\frac{\pi}{2}.$$

В частности, при $k=1$ находим

$$\lambda=\frac{\pi^2}{4a^2}+\frac{153}{62b^2}=\frac{\pi^2}{(2a)^2}+\frac{\frac{306}{31}}{(2b)^2}.$$

В наихудшем случае $b=a$ получаем $\lambda=\frac{9{,}87028}{2a^2}$ вместо точного $\lambda=\frac{\pi^2}{2a^2}=\frac{9{,}86960}{2a^2}$; погрешность равна 0,007%.

§ 4. Оценка погрешности в вариационных методах и порядок сходимости их

Предметом этого параграфа является изложение некоторых исследований, относящихся к вопросу об оценке максимальной погрешности, которая получается при приближенном решении по методу Ритца на n-м шагу, а также порядка относительно $\frac{1}{n}$, с которым эта погрешность стремится к нулю при $n\to\infty$. По отношению к обыкновенным уравнениям здесь, благодаря работам акад. Н. М. Крылова, имеются весьма детальные оценки для ряда случаев. В отношении уравнений в частных производных вопрос разработан гораздо меньше, и здесь нам придется отказаться от точных оценок погрешности и привести только некоторый результат, показывающий быстроту ее стремления к нулю. Исследование последнего вопроса мы даем как для метода Ритца, так и для метода приведения к обыкновенным уравнениям.

1. Случай обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы изложим здесь лишь несколько результатов из многочисленных исследований акад. Н. М. Крылова. Основная мысль этих исследований состоит в том, чтобы найти возможно более точные оценки погрешности, получаемой в n-м приближении, т. е. оценки, по возможности близкие к действительной погрешности, так чтобы полученным результатом можно было пользоваться при небольших значениях $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$. С другой стороны, ставится условие, что эта оценка погрешности должна содержать в своем составе только величины, которые могут быть легко определены по данным задачи (коэффициенты уравнения и пр.).

В этих условиях вопрос может быть удовлетворительно разрешен только в том случае, если он рассматривается для не слишком общего класса задач: определенного типа уравнений, конкретного выбора основных функций и пр.

Чтобы показать методы, применяемые для получения таких оценок, приведем вывод некоторых из них.

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения

$$\frac{d}{dx}(py') - qy = f \tag{1}$$

при граничных условиях

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

с помощью метода Ритца. Предполагаем еще, что выполнены неравенства

$$p(x) > 0; \quad q(x) \geqslant 0 \text{ в } [0,1]. \tag{3}$$

Предварительно дадим оценку решения этого уравнения, его производных и некоторых связанных с ними величин. Нам удобно будет ввести обозначение $\|g\| = \left[\int\limits_0^1 g^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$, если $g(x)$ — функция, интегрируемая с квадратом в $[0,1]$. Если g и h — две такие функции, то справедливы неравенства Буняковского и Коши

$$\left|\int\limits_0^1 gh\,dx\right| \leqslant \|g\|\cdot\|h\| \quad \text{и} \quad \|g+h\| \leqslant \|g\| + \|h\|; \tag{4}$$

отметим, кроме того, что $\|g\| \leqslant \max|g|$; $\|g\|\min|h| \leqslant \|hg\| \leqslant \|g\|\max|h|$ и $\|ag\| = |a|\cdot\|g\|$, если a — постоянная.

Так как функция y дает минимум интегралу

$$I(y) = \int\limits_0^1 [py'^2 + qy^2 + 2fy]\,dx, \tag{5}$$

то при любой η, равной нулю на концах, справедливо равенство $\delta I = 0$ [см. § 1, (3)]; полагая в нем $\eta = y$, находим

$$\int\limits_0^1 (py'^2 + qy^2 + fy)\,dx = 0.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 py'^2\,dx \leqslant \left|\int\limits_0^1 fy\,dx\right| \leqslant \|f\|\cdot\|y\|,$$

или

$$\|y'\|^2 = \int\limits_0^1 y'^2\,dx \leqslant \frac{1}{\min p}\|f\|\cdot\|y\|. \tag{6}$$

Далее воспользуемся неравенством В. А. Стеклова, верным для функции, удовлетворяющей условиям (2), либо условию $\int\limits_0^1 y\,dx = 0$,

$$\|y\| \leqslant \frac{1}{\pi}\|y'\|, \tag{7}$$

которое легко получается на основании уравнения замкнутости. В самом деле, если $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$, то

$$\|y\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2; \quad \|y'\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (b_k k\pi)^2,$$

откуда и следует сразу (7).[1] Сопоставляя (6) и (7), находим:

$$\|y'\| \leqslant \frac{1}{\pi \min p}\|f\|. \tag{8}$$

Оценим теперь $|y(x)|$. Так как в обеих частях промежутка $[0, 1]$ оценка одинакова, предположим, что x лежит в промежутке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, получим:

$$|y(x)| = \left|\int_0^x y'(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_0^x y'^2\,dx}\,\sqrt{\int_0^x 1^2 dx} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|y'\|,\text{[2]} \tag{9}$$

или на основании (8)

$$\max|y(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|y'\| \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{2}\min p}\|f\|.$$

Наконец, из уравнения (1) находим

$$py'' = -p'y' + qy + f,$$

откуда на основании (8) и (7)

$$\|py''\| \leqslant \|p'y'\| + \|qy\| + \|f\| \leqslant \max|p'|\cdot\|y'\| + \max q\cdot\|y\| + \|f\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\max|p'|}{\pi\min p} + \frac{\max q}{\pi^2\min p} + 1\right)\|f\|.$$

Отсюда

$$\|y''\| \leqslant \frac{1}{\pi(\min p)^2}\left(\max|p'| + \frac{1}{\pi}\max q + \pi\min p\right)\|f\|. \tag{10}$$

---

[1]) Подробнее см. Г. М. Фихтенгольц [1], том III, стр. 595—596.

[2]) Несколько более сложное рассуждение позволяет заменить здесь множитель $\frac{1}{\sqrt{2}}$ на $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь применение метода Ритца к данной задаче при основных функциях

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2}\,\sin k\pi x \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11}$$

Через y_n обозначим n-е приближение для y по методу Ритца, через Y_n отрезок $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x$, составленный из n первых членов ряда Фурье $y(x)$.

Прежде всего отметим следующие неравенства:

$$\|y - Y_n\| \leqslant \frac{1}{\pi(n+1)} \|y' - Y_n'\| \leqslant \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \|y'' - Y_n''\|, \tag{12}$$

получающиеся с помощью уравнения замкнутости, из которого следует, что

$$\|y - Y_n\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{\infty} b_k^2; \qquad \|y' - Y_n'\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{\infty} \pi^2 k^2 b_k^2;$$

$$\|y'' - Y_n''\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{\infty} \pi^4 k^4 b_k^2. \tag{12a}$$

Теперь на том основании, что функция y_n дает наименьшее значение интегралу I (5) среди всех функций вида $\sum\limits_{1}^{n} a_k \varphi_k$, имеем $I(y_n) - I(y) \leqslant \leqslant I(Y_n) - I(y)$, откуда [ср. § 1, (7)], используя (12), находим:

$$\int_0^1 [p(y_n' - y')^2 + q(y_n - y)^2]\,dx \leqslant \int_0^1 [p(Y_n' - y')^2 + q(Y_n - y)^2]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\max p + \frac{\max q}{(n+1)^2\pi^2}\right] \|Y_n' - y'\|^2.$$

Тогда

$$\|y_n' - y'\|^2 \leqslant \frac{1}{\min p} \left[\max p + \frac{\max q}{(n+1)^2\pi^2}\right] \|Y_n' - y'\|^2. \tag{13}$$

Далее, на основании (12) и (10) получаем

$$\|Y_n' - y'\| \leqslant \frac{1}{\pi(n+1)} \|Y_n'' - y''\| \leqslant \frac{1}{\pi(n+1)} \|y''\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max|p'| + \frac{1}{\pi}\max q + \pi \min p}{\pi^2(n+1)(\min p)^2} \cdot \|f\|.$$

Заменяя в (9) y на $y_n - y$, находим:

$$\max|y_n(x) - y(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \|y_n' - y'\|.$$

В результате (13) дает нам требуемую оценку погрешности

$$\max|y_n(x)-y(x)|\leqslant\frac{L}{n+1},$$

где

$$L=\left[\max p+\frac{\max q}{(n+1)^2\pi^2}\right]^{1/2}\frac{1}{\pi^2\sqrt{2}\,(\min p)^{5/2}}\left[\max|p'|+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\max q+\pi\min p\right]\left[\int_0^1 f^2\,dx\right]^{1/2}. \qquad (14)$$

Укажем теперь другой, более тонкий метод, позволяющий получать более точные оценки. Метод этот существенно использует свойства так называемой функции Грина. Для того чтобы не слишком усложнять изложение, ограничимся случаем, когда $p(x)=1$.

Прежде всего опять дадим оценку для $\|y''\|$. Имеем:

$$y''=qy+f;\quad y''^2=qyy''+fy'',$$

откуда

$$\int_0^1\frac{y''^2}{q}\,dx=\int_0^1 yy''\,dx+\int_0^1\frac{f}{q}y''\,dx\leqslant\left|\int_0^1\frac{f}{q}y''\,dx\right|, \qquad (15)$$

ибо

$$\int_0^1 yy''\,dx=[yy']_0^1-\int_0^1 y'^2\,dx=-\int_0^1 y'^2\,dx\leqslant 0.$$

Из полученного неравенства находим

$$\int_0^1\frac{y''^2}{q}\,dx=\left\|\frac{y''}{\sqrt{q}}\right\|^2\leqslant\left|\int_0^1\frac{f}{q}y''\,dx\right|\leqslant\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|\cdot\left\|\frac{y''}{\sqrt{q}}\right\|$$

(существование интеграла $\int_0^1\frac{f^2}{q}\,dx$ предполагаем).

Теперь имеем: $\left\|\frac{y''}{\sqrt{q}}\right\|\leqslant\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|$

и

$$\|y''\|\leqslant\max\sqrt{q}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|. \qquad (16)$$

Приведем далее определение функции Грина. Так называется непрерывная функция $K(x,\xi)$, которая при $x\neq\xi$ удовлетворяет урав-

нению $\frac{d^2}{dx^2}K(x, \xi)=0$ (в данном случае) и для которой выполнены условия

$$K(0, \xi)=K(1, \xi)=0; \quad \left[\frac{dK}{dx}\right]_{x=\xi+0}-\left[\frac{dK}{dx}\right]_{x=\xi-0}=1. \tag{17}$$

Очевидно, такой функцией будет

$$K(x, \xi)=\begin{cases} -(1-\xi)\,x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ -\xi(1-x) & \text{при } \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases} \tag{18}$$

С помощью этой функции решение y уравнения $y''=g(x)$, удовлетворяющее условиям $y(0)=y(1)=0$, определяется следующим образом:

$$y(x)=\int_0^1 K(x, \xi)\,y''(\xi)\,d\xi=\int_0^1 K(x, \xi)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

В этом убеждаемся, дифференцируя двукратно выражение (19). В самом деле:

$$y(x)=\int_0^1 K(x, \xi)\,g(\xi)\,d\xi=-\int_0^x \xi(1-x)\,g(\xi)\,d\xi-\int_x^1 (1-\xi)\,xg(\xi)\,d\xi,$$

$$y'(x)=-x(1-x)g(x)+\int_0^x \xi g(\xi)\,d\xi+(1-x)xg(x)-\int_x^1 (1-\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

$$y''(x)=xg(x)+(1-x)\,g(x)=g(x).$$

Далее приведем разложение функции $K(x, \xi)$ в двойной ряд Фурье

$$K(x, \xi)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x\sin k\pi\xi}{\pi^2k^2}. \tag{20}$$

Чтобы убедиться в справедливости его, достаточно, например, просуммировать ряд справа, пользуясь рядом функции $\sigma_1(x)$ (ср. гл. I, § 5, стр. 95); имеем:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x\sin k\pi\xi}{\pi^2k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi(x-\xi)}{\pi^2k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi(x+\xi)}{\pi^2k^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\sigma_1(\pi(x+\xi))-\sigma_1(\pi(x-\xi))\right]=$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi^2}\left\{\left[\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\pi-(x+\xi)\pi)^2}{4}\right]-\left[\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\pi-(x-\xi)\pi)^2}{4}\right]\right\}=(1-x)\,\xi, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } x-\xi\geqslant 0, \\ \frac{1}{\pi^2}\left\{\left[\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\pi-(x+\xi)\pi)^2}{4}\right]-\left[\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\pi+(x-\xi)\pi)^2}{4}\right]\right\}=x(1-\xi), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } x-\xi\leqslant 0. \end{cases}$$

Из разложения (20), между прочим, следует также отрицательная определенность $K(x, \xi)$, т. е. что для любой функции $\psi(x)$, интегрируемой в $[0,1]$, будет

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, \xi)\psi(x)\psi(\xi)\,dx\,d\xi \leqslant 0. \tag{21}$$

Действительно, если $\beta_k = \int_0^1 \sin k\pi x \psi(x)\,dx$, то, умножая разложение (20) на $\psi(x)$, интегрируя его по x, а затем умножая на $\psi(\xi)$ и интегрируя по ξ, убеждаемся в том, что этот интеграл равен

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta_k^2}{\pi^2 k^2} \leqslant 0.$$

Перейдем теперь к самой оценке погрешности. Как прежде, через y_n будем обозначать n-е приближение к функции y по методу Ритца, через Y_n — сумму первых n членов разложения ее в ряд по $\sin k\pi x$. Вообще, для любой интегрируемой в $[0, 1]$ функции $g(x)$ будем через $[g]_n$ обозначать сумму n первых членов ее разложения в ряд по $\sin k\pi x$. Введем еще обозначения $r_n = y - y_n$; $R_n = y - Y_n$. Воспользуемся теперь равенствами (16b) § 2, которые для $p = 1$ и $l = 1$ принимают вид

$$\int_0^1 (y_n'' - qy_n - f)\varphi_k\,dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Умножая каждое из равенств (22) на φ_k, суммируя их и учитывая то, что функция $[y_n'']_n = y_n''$, так как y_n'' представляет комбинацию первых n функций φ_k (11), находим

$$y_n'' - [qy_n]_n = [f]_n. \tag{23}$$

Вычитая же последнее равенство из (1) (для $p = 1$), получаем:

$$y'' - y_n'' - qy + [qy_n]_n = f - [f]_n.$$

Отсюда, прибавляя к обеим частям $qy_n - [qy_n]_n$, получаем

$$\begin{aligned} r_n'' - qr_n &= f - [f]_n + qy_n - [qy_n]_n = \\ &= f + qy - [f + qy]_n - qr_n + [qr_n]_n = \\ &= y'' - Y_n'' - \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x) \int_0^1 qr_n\varphi_k\,dx. \end{aligned} \tag{24}$$

Помножим обе части полученного равенства (заменяя в нем x на ξ) на $K(x, \xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до 1; тогда, пользуясь (19), а также тем, что $\varphi_k = -\frac{1}{k^2\pi^2}\varphi_k''$ [ср. (11)], получим:

$$r_n(x) - \int_0^1 K(x, \xi) q(\xi) r_n(\xi) d\xi =$$

$$= [y(x) - Y_n(x)] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{k^2\pi^2} \int_0^1 q r_n \varphi_k dx. \quad (25)$$

Помножая теперь (25) на $r_n(x)\ q(x)$ и интегрируя по x от 0 до 1, получаем:

$$\int_0^1 q r_n^2 dx - \int_0^1 \int_0^1 K(x, \xi) r_n(\xi) q(\xi) r_n(x) q(x) dx\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 (y - Y_n) q r_n dx + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} \left[\int_0^1 q r_n \varphi_k dx \right]^2.$$

Вычитаемое в левой части, в силу (21), отрицательно или нуль, поэтому, отбрасывая его, превратим это равенство в неравенство, кроме того, во втором слагаемом правой части заменим k^2 на $(n+1)^2$ и воспользуемся очевидным неравенством

$$\sum_{n+1}^{\infty} \left(\int_0^1 q r_n \varphi_k dx \right)^2 \leqslant \sum_{1}^{\infty} \left(\int_0^1 q r_n \varphi_k dx \right)^2 = \int_0^1 q^2 r_n^2 dx,$$

тогда получим:

$$\int_0^1 q r_n^2 dx \leqslant \int_0^1 q r_n (y - Y_n) dx + \frac{1}{\pi^2 (n+1)^2} \int_0^1 q^2 r_n^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^1 q^2 r_n^2 dx \int_0^1 (y - Y_n)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\max q}{\pi^2 (n+1)^2} \int_0^1 q r_n^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \max q^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 q r_n^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \| y - Y_n \| + \frac{\max q}{\pi^2 (n+1)^2} \int_0^1 q r_n^2 dx,$$

откуда

$$\left(\int_0^1 q r_n^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\max q^{1/2} \| y - Y_n \|}{1 - \frac{\max q}{\pi^2 (n+1)^2}} \quad (26)$$

(знаменатель предполагается положительным).

С другой стороны, пользуясь (18), имеем:

$$\left|\int_0^1 K(x,\ \xi)\,q(\xi)\,r_n(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \left[\int_0^1 K^2(x,\ \xi)\,d\xi \int_0^1 q^2(\xi)\,r_n^2(\xi)\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{3}x^2(1-x)^2 \int_0^1 q^2(\xi)\,r_n^2(\xi)\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\max\sqrt{q}}{4\sqrt{3}}\left(\int_0^1 q r_n^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (27)$$

Теперь, возвращаясь к (25), находим:

$$|r_n| \leqslant |y - Y_n| + \frac{\max\sqrt{q}}{4\sqrt{3}}\left(\int_0^1 q r_n^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left|\sum_{n+1}^{\infty} \frac{2\sin k\pi x}{k^2\pi^2} \int_0^1 q(x)\,r_n(x)\sin k\pi x\,dx\right|. \qquad (28)$$

Но для последней суммы, пользуясь неравенством $\left|\sum a_i b_i\right| \leqslant \leqslant \left(\sum a_i^2 \sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, уравнением замкнутости и тем, что $\varphi_k^2(x) \leqslant 2$, а $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \leqslant \frac{1}{3n^3}$, получаем, что она не превосходит

$$\left\{\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\pi^4 k^4} \sum_{n+1}^{\infty}\left[\int_0^1 q(x)\,r_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{2}{\pi^4} \cdot \frac{1}{3}\,\frac{1}{n^3}\int_0^1 q^2 r_n^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\max q^{\frac{1}{2}}}{\pi^2 n^{3/2}}\left(\int_0^1 q r_n^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь этим, а также (26), неравенство (28) можем переписать так:

$$|y - y_n| = |r_n| \leqslant |y - Y_n| +$$

$$+ \frac{\max q}{4\sqrt{3}\left(1 - \frac{\max q}{\pi^2(n+1)^2}\right)}\left[1 + \frac{4\sqrt{2}}{n^{3/2}\pi^2}\right]\|y - Y_n\|. \qquad (29)$$

Из (12) и (16) находим:

$$\|y - Y_n\| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}\|y'' - Y_n''\| < \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}\|y''\| < \frac{\max q^{\frac{1}{2}}}{\pi^2(n+1)^2}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|, \qquad (30)$$

$$\|y' - Y_n'\| < \frac{\max q^{\frac{1}{2}}}{(n+1)\pi}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|. \qquad (31)$$

Отсюда, пользуясь обозначением $R_n = y - Y_n$, получаем, что

$$|y(x) - Y_n(x)| = |R_n(x)| = \left[2\int_0^x R_n(\xi) R_n'(\xi)\,d\xi\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\left[\int_0^x R_n^2(\xi)\,d\xi \int_0^x R_n'^2(\xi)\,d\xi\right]^{1/4} \leqslant \sqrt{2}\,\|R_n\|^{1/2}\,\|R_n'\|^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{2}\max q^{1/2}}{\pi^{3/2}(n+1)^{3/2}}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|, \tag{32}$$

и потому (29) окончательно принимает вид:

$$|y - y_n| \leqslant \frac{\sqrt{2}\max q^{1/2}}{\pi^{3/2}(n+1)^{3/2}}\left[1 + \frac{\max q}{4\sqrt{6\pi(n+1)}}\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{n^{3/2}\pi^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1 - \frac{\max q}{\pi^2(n+1)^2}\right)^{-1}\right]\cdot\left(\int_0^1 \frac{f^2}{q}\,dx\right)^{1/2}. \tag{33}$$

Укажем теперь некоторые дальнейшие результаты Н. М. Крылова уже без доказательств, отсылая за ними к работам автора.[1])

Некоторые видоизменения в предшествующих рассуждениях позволяют получить асимптотическое равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max|y - y_n|}{\max|y - Y_n|} = 1, \tag{34}$$

показывающее, что порядок приближения к решению по методу Ритца совпадает с порядком приближения, даваемым отрезками ряда Фурье.

Далее аналогичные результаты получаются и в случае, когда основная система есть $\varphi_k(x) = x^k(1 - x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ряд оценок получен для погрешности при определении собственных значений по

---

[1]) Н. М. Крылов [3, 4]. См. также обзорную статью Н. М. Крылова [5]. В ней указана также литература, относящаяся к вопросам о сходимости других методов, в частности метода наименьших квадратов и метода моментов, которые изучались в особенности в работах Н. М. Крылова и в работах М. Ф. Кравчука [1].

Вопрос о сходимости метода Б. Г. Галеркина для случаев, когда он не совпадает с методом Ритца, был исследован лишь в недавнее время. Для более частного типа задач, относящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, такое исследование было сделано Г. И. Петровым [1, 2]. Весьма полное разрешение эта проблема получила в фундаментальной работе М. В. Келдыша [1], где сходимость доказана для задач, относящихся к обыкновенным уравнениям и к уравнениям 2-го порядка эллиптического типа. По этому вопросу см. также С. Г. Михлин [2, 5], Л. В. Канторович [18], гл. II, § 7, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XIV, § 5.

методу Ритца. Приведем некоторые из них, при этом через λ_k будем обозначать k-е собственное число проблемы

$$y''+\lambda q y=0 \quad (q>0); \quad y(0)=y(l)=0, \tag{35}$$

и через $\lambda_k^{(n)}$ значение n-го приближения к нему; тогда имеем следующие оценки:

$$|\lambda_k-\lambda_k^{(n)}|<\frac{2\lambda_k^2 \max q^{3/2}}{\min q^{1/2}(n+1)^2\pi^2-2\max q^{3/2}\lambda_k} \quad \left(\lambda_k\leqslant\frac{k^2\pi^2}{\min q}\right), \tag{36}$$

$$\left|\frac{\lambda_k-\lambda_k^{(n)}}{\lambda_k}\right|<\frac{\lambda_k^{(n)}}{\pi^4(n+1)^4}\left[\,|\lambda_k^{(n)}|\max q^2+\max\left|\frac{q'^2}{q}\right|\,\right], \tag{37}$$

$$\left|\frac{\lambda_k-\lambda_k^{(n)}}{\lambda_k}\right|<\frac{|\lambda_k^{(n)}|^3}{\pi^6(n+1)^6}\left[\max q^{3/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\max|q'|}{\sqrt{|\lambda_k^{(n)}|}}\left(1+\frac{\max q\,|\lambda_k^{(n)}|}{8(n+2)^2\pi^2}\right)+\frac{1}{|\lambda_k^{(n)}|}\max\left|\frac{q''}{\sqrt{q}}\right|\right]^2.$$

Эти три оценки относятся к случаю, когда $\varphi_l(x)=\sqrt{2}\sin\pi l x$ ($l=1, 2, \ldots, n$); для случая, когда $\varphi_l(x)=x^l(1-x)$ ($l=1, 2, \ldots, n$), имеет место следующее неравенство:

$$\left|\frac{\lambda_k^{(n)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right|<\frac{N\lambda_k^{(n)}}{n^2(n+1)^2(n+2)(n-1)}, \tag{38}$$

где

$$N=\left[\max\left|\frac{q''}{q^{1/2}}\right|+2\max|q'|\sqrt{|\lambda_k^{(n)}|\frac{\max q^{1/2}}{\min q^{1/2}}+\max q^{3/2}|\lambda_k^{(n)}|}\,\right]^2. \tag{39}$$

Подобного же характера оценки получаются и для погрешности в определении собственных функций и для погрешности при определении решения неоднородного уравнения

$$y''+\lambda q(x)=f(x).$$

Приведем одну из оценок последнего вида:

$$|y-y_n|<\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,(\|f\|+\lambda\max|q|\,M\|f\|)}{(n+1)^{3/2}\pi^2}\times$$
$$\times\left[1+\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\pi^2(n+1)^{3/2}}\frac{\lambda\nu M}{\left(1-\frac{\lambda M\max|q|}{(n+1)^2\pi^2}\right)}\right],$$

где

$$M=\max_{i=1,2,\ldots}\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}\right|; \qquad \nu=\|q\|+\max|q|+\sqrt{\int_0^1\left(\int_0^1 K_x'^2 q'^2\,dt\right)dx}\,.$$

Приведенные оценки достаточно эффективны. Например, оценка (39) в применении к нахождению первого собственного числа уравнения $y'' + \lambda y = 0$, при условии $y(-1) = y(1) = 0$, если n-е приближение искать в виде

$$y = (1 - x^2)(a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{2m-2}),$$

дает $0{,}2\%$ для $m = 2$ и $0{,}02\%$ для $m = 3$. Впрочем, действительная погрешность еще значительно меньше, именно $0{,}004\%$ и для $m = 2$ и $0{,}0000008\%$ для $m = 3$ (ср. § 2, n° 5, пример 1).

В других случаях оценка оказывается значительно ближе к действительной погрешности.

2. Проблема сходимости минимальных последовательностей для уравнений эллиптического типа. Для обыкновенных самосопряженных уравнений второго порядка (при условии $p > 0$, $q \geqslant 0$) было показано [см. § 2, n° 2, (21)], что каждая минимальная последовательность, т. е. такая, что $I(y_n) \to I(y)$, равномерно сходится к решению $\lim\limits_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$. Для уравнений в частных производных это обстоятельство уже не имеет места.

Покажем это на примере уравнения Лапласа. Рассмотрим для него задачу Дирихле для единичного круга при нулевых граничных условиях: $u(r, \theta) = 0$ при $r = 1$. Очевидное решение ее есть $u = 0$, и значение интеграла Дирихле

$$I(u) = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right] r\,dr\,d\theta,$$

соответствующее ему, равно нулю: $I(u) = 0$. Возьмем теперь любую последовательность $a_n \to 0$ $(1 > a_n > 0)$ и определим функции $u_n(r, \theta)$ следующим образом:

$$u_n(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{для } a_n \leqslant r \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\ln a_n} \ln \dfrac{r}{a_n} & \text{для } a_n^2 \leqslant r \leqslant a_n, \\ 1 & \text{для } 0 \leqslant r \leqslant a_n^2. \end{cases} \qquad (40)$$

Тогда имеем, что

$$I(u_n) = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_{a_n^2}^{a_n} \left(\frac{1}{\ln a_n} \cdot \frac{1}{r}\right)^2 r\,dr = -\frac{2\pi}{\ln a_n}.$$

Отсюда ясно, что при $n \to \infty$ будет $I(u_n) \to I(u) = 0$, т. е. последовательность u_n — минимальная. Однако $u_n(0, 0) = 1$, и эта последовательность не будет сходиться к решению. Можно было бы построить аналогичного рода последовательность, которая даже

ни в одной точке не сходится к решению.[1]) Однако при известных дополнительных ограничениях равномерная сходимость минимальной последовательности к решению может быть доказана и для задач с двумя переменными. Отсюда получаются далее некоторые теоремы о сходимости вариационных методов.

Прежде всего мы покажем, что равномерная сходимость имеет место, если верхняя граница одной из частных производных функций u_n возрастает не слишком быстро по сравнению с разностью $I(u_n)-I(u)$.[2]) Доказательство будем вести для общего уравнения эллиптического типа (см. § 1, стр. 266). Наше предложение будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *контур, ограничивающий область* D. *Пусть* $\eta(x, y)$ — *функция, непрерывная в замкнутой области и имеющая частные производные, непрерывные внутри области, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$1)\ \eta(x, y)=0 \text{ на } \Gamma; \tag{41}$$

$$2)\ \iint\limits_D \left[a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+b\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+c\eta^2\right]dx\,dy\leqslant\varepsilon, \tag{42}$$

где a, b, c — *непрерывные в* D *функции* x *и* y, *причем* $a>0$, $b>0$ *и* $c\geqslant 0$ *в замкнутой области* D;

$$3)\ \int\limits_\alpha^\beta\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2dy\leqslant K, \tag{43}$$

если отрезок, соединяющий точки (x, α) *и* (x, β), *лежит в области* D; K — *постоянная.*

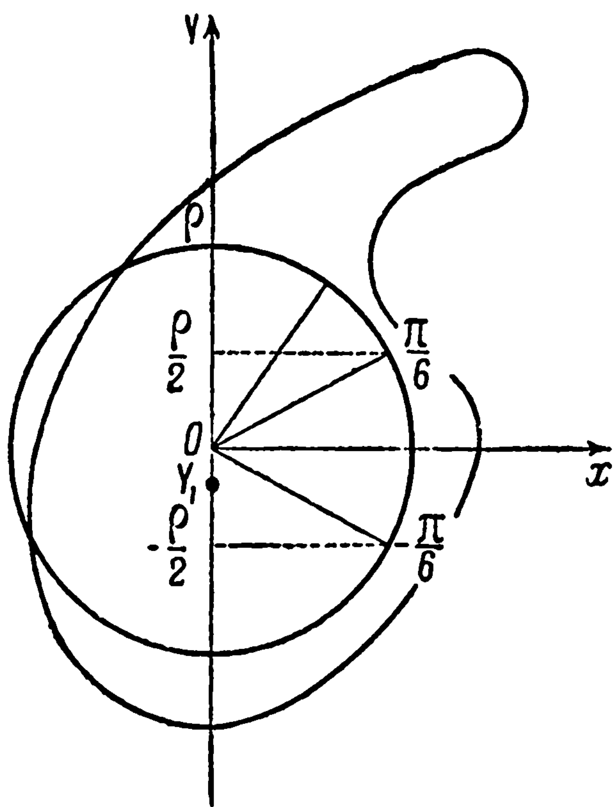


Рис. 27.

Тогда имеет место следующая оценка для функции η *в области* D:

$$|\eta(x, y)|<C_2\sqrt{\varepsilon\ln\frac{dK}{\varepsilon}}+C_3\sqrt{\varepsilon}, \tag{44}$$

где d — *диаметр области* D, C_2 *и* C_3 — *постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнения и вида области.*[3])

Доказательство. Доопределим функцию $\eta(x, y)$ нулем вне области D. Отметим прежде всего, что из (42) получаем

---

[1]) По вопросу о сходимости в среднем для метода Ритца см. Курант и Гильберт [1] и С. Г. Михлин [6].

[2]) По поводу следующего ниже см. Л. В. Канторович [13, 15].

[3]) Такого рода постоянные здесь и в дальнейшем мы будем обозначать буквой C с различными номерами.

неравенство:

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \leqslant C_1\varepsilon, \text{ где } C_1=\max\left(\frac{1}{\min a}, \frac{1}{\min b}\right). \tag{45}$$

Выберем любую точку M внутри D; для нее и будем проводить оценку $|\eta(M)|$. Построим декартову и полярную системы координат с началом в этой точке. Возьмем любое число $\rho>0$. Так как точка (θ, d) лежит на границе или вне D, то $\eta(\theta, d)=0$ и потому

$$\eta(\theta, \rho)=\int_d^\rho \frac{\partial\eta}{\partial r}\,dr.$$

Отсюда, обозначая еще через D_1 область, заключенную между окружностями $r=\rho$, $r=d$ и лучами $\theta=-\frac{\pi}{6}$; $\theta=\frac{\pi}{6}$ (рис. 27), имеем

$$\left|\frac{3}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \eta(\theta,\rho)\,d\theta\right| \leqslant \frac{3}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_\rho^d \left|\frac{\partial\eta}{\partial r}\right| dr = \frac{3}{\pi}\iint_{D_1}\left|\frac{\partial\eta}{\partial r}\right| dr\,d\theta. \tag{46}$$

Возьмем теперь любое $\lambda>0$, тогда имеем:

$$\left[\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda}}\left|\frac{\partial\eta}{\partial r}\right|-\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{r}}\right]^2\geqslant 0;\quad \left|\frac{\partial\eta}{\partial r}\right|\leqslant\frac{\lambda}{2r}+\frac{r}{2\lambda}\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2.$$

На основании последнего неравенства, пользуясь тем, что $\left|\frac{\partial\eta}{\partial r}\right|^2\leqslant$ $\leqslant\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$, из (46) и (45) находим:

$$\left|\frac{3}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\eta(\theta,\rho)\,d\theta\right| \leqslant \frac{3}{2\pi\lambda}\iint_D\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2 r\,dr\,d\theta+\frac{3\lambda}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_\rho^d\frac{dr}{r}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{2\pi\lambda}\iint_D\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\frac{3\lambda}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\ln\frac{d}{\rho}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3C_1\varepsilon}{2\pi\lambda}+\frac{\lambda}{2}\ln\frac{d}{\rho}=q. \tag{47}$$

Неравенство (47) показывает, что среднее значение η на дуге окружности не превосходит величины, обозначенной нами кратко

через q. Из него можно получить аналогичное утверждение относительно среднего значения η на вертикальном отрезке. Действительно, переходя в (47) к декартовым координатам ($\rho \sin\theta = y$), получим

$$\left| \frac{3}{\pi} \frac{1}{\rho} \int\limits_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \eta(\sqrt{\rho^2 - y^2},\ y) \frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\rho}\right)^2}} \right| \leqslant q.$$

Отсюда

$$\left| \frac{1}{\rho} \int\limits_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \eta(0, y) \frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\rho}\right)^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\rho} \int\limits_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \left[\eta(\sqrt{\rho^2 - y^2},\ y) + \int\limits_{\sqrt{\rho^2 - y^2}}^{0} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \right] \frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\rho}\right)^2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{3} q + \left| \frac{1}{\rho} \frac{2}{\sqrt{3}} \int\limits_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} dy \int\limits_{0}^{\rho} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{3} q + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\rho} \sqrt{\int\limits_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \int\limits_{0}^{\rho} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx\, dy} \sqrt{\int\limits_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \int\limits_{0}^{\rho} 1^2\, dx\, dy} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{3} q + \frac{2}{\sqrt{3}} (C_1 \varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \qquad (48)$$

Поэтому ясно, что найдется такое $y_1 \left(|y_1| \leqslant \frac{\rho}{2}\right)$, что

$$\left| \eta(0,\ y_1) \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y_1}{\rho}\right)^2}} \right| \leqslant \frac{\pi}{3} q + \frac{2}{\sqrt{3}} (C_1 \varepsilon)^{1/2},$$

тем более

$$|\eta(0,\ y_1)| < \frac{\pi}{3} q + \frac{2}{\sqrt{3}} (C_1 \varepsilon)^{1/2}. \qquad (49)$$

Используем, наконец, неравенство (43);[1]) имеем тогда

$$|\eta(0,\ 0)| = \left|\eta(0,\ y_1) + \int_{y_1}^{0} \frac{\partial\eta}{\partial y}\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\eta(0,\ y_1)| + \sqrt{\int_0^{y_1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 dy}\,\sqrt{\int_0^{y_1} 1^2\,dy} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{3}\,q + \frac{2}{\sqrt{3}}(C_1\varepsilon)^{1/2} + \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sqrt{K} =$$

$$= \frac{C_1\varepsilon}{2\lambda} + \frac{\pi\lambda}{6}\ln\frac{d}{\rho} + \frac{2}{\sqrt{3}}(C_1\varepsilon)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{K\rho}. \qquad (50)$$

Числа λ и ρ мы можем выбрать по нашему произволу; примем

$$\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\ln\frac{dK}{\varepsilon}}};\quad \rho = \frac{\varepsilon}{K}$$

(считаем, что $dK > \varepsilon$), тогда неравенство (50) примет вид

$$|\eta(0,\ 0)| \leqslant C_2\sqrt{\varepsilon\ln\frac{dK}{\varepsilon}} + C_3\sqrt{\varepsilon},$$

что не отличается от (44), так как в качестве начала могла быть избрана любая внутренняя точка области D.[2])

Из этой леммы почти непосредственно получается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $u(x,\ y)$ в области D, ограниченной спрямляемым контуром* Г, *представляет решение уравнения эллиптического типа*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - cu = f \qquad (a,\ b > 0;\ c \geqslant 0), \qquad (51)$$

обращающееся в нуль на контуре Г. *Предположим, что конечен интеграл*

$$I_1(u) = \iint_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + cu^2\right] dx\,dy < +\infty \qquad (52)$$

---

[1]) Неравенством (43) нельзя воспользоваться, правда, если отрезок от точки (0, 0) до $(0,\ y_1)$ не лежит целиком в области D, но тогда точку $(0,\ y_1)$ можно заменить на ближайшую по вертикали к началу точку $(0,\ y_2)$ кривой Г $(0 < y_2 < y_1)$.

[2]) Отметим, что так как условие (43) было использовано лишь в конце рассуждения, то, если оно выполнено для некоторых отрезков, заключение леммы остается в силе для точек $(x,\ y)$, для которых подобный отрезок, соединяющий точки $(x,\ \alpha)$, $(x,\ \beta)$, имеется.

и ограничен интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant K_0, \tag{53}$$

где α *и* β *таковы, что отрезок, соединяющий точки* (x, α) и (x, β), *содержится в* D.

Пусть $u_n(x, y)$ — *последовательность функций, также равных* 0 *на* Γ, *непрерывных в замкнутой области и имеющих непрерывные производные внутри* D. *Пусть, далее, дано, что*

$$I(u_n) - I(u) = \iint_D \left[a\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + c(u_n - u)^2\right] dx\,dy = \varepsilon_n,\text{[1]} \tag{54}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant K_n, \tag{55}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \ln K_n = 0. \tag{56}$$

Тогда последовательность функций u_n *равномерно сходится к* $u(x, y)$ *в области* D, *причем порядок сходимости есть*

$$|u_n - u| = O\left(\varepsilon_n^{1/2} + \left|\varepsilon_n \ln \frac{K_n + K_0}{\varepsilon_n}\right|^{1/2}\right). \tag{57}$$

Доказательство. Положим $\eta_n(x, y) = u_n(x, y) - u(x, y)$. Тогда для функции $\eta_n(x, y)$ будут выполнены условия леммы, если только принять $\varepsilon = \varepsilon_n$ и $K = 2(K_0 + K_n)$; последнее ясно из того, что

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial \eta_n}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant 2\left[\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 dy + \int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy\right] = 2(K_0 + K_n).$$

Применяя поэтому неравенство (44), находим

$$|\eta_n(x, y)| < C_2 \sqrt{\varepsilon_n \ln \frac{2d(K_0 + K_n)}{\varepsilon_n}} + C_3\sqrt{\varepsilon_n},$$

откуда, в силу (56), сразу следует, что $\eta_n(x, y) \to 0$ равномерно в области D и порядок сходимости именно тот, который указан в (57).

Теореме 1 можно придать более удобный для использования вид, опираясь на то обстоятельство, что, когда вид функций $u_n(x, y)$ изве-

---

[1]) $I(u)$ обозначает здесь интеграл, связанный с уравнением (51) [см. § 1, (12b)]. Такой вид разности $I(u_n) - I(u)$ получается с помощью преобразований, подобных приведенным в § 1, (18).

стен, можно на основании этого дать оценку быстроты роста K_n. Мы это проведем для случая, когда u_n представляет полином от одной из переменных.

Теорема 2. *Относительно области D и функции $u(x, y)$ делаем те же предположения, что и в теореме 1. Сверх того, предполагаем, что в точках с экстремальными абсциссами, которых имеется конечное число, контур Γ имеет конечную кривизну.*

Относительно $u_n(x, y)$ предположим, что она равна 0 на Γ и имеет вид

$$u_n(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_n(x)y^n, \tag{58}$$

где a_0, a_1, ..., a_n — функции, непрерывные с производными a_0', a_1', ..., a_n', и, наконец, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \ln n = 0. \tag{59}$$

Тогда имеет место равномерная сходимость последовательности $u_n(x, y)$ к $u(x, y)$, причем

$$|u_n - u| = O\left(\sqrt{\varepsilon_n \ln \frac{n}{\varepsilon_n}}\right). \tag{60}$$

Доказательство. Возьмем число $h > 0$, которое точнее определим ниже. Область D разделим на две части D_h и D_h'. К первой из них отнесем те точки, которые принадлежат D вместе с некоторым вертикальным отрезком длины $\geqslant h$, ко второй — прочие точки D. Нетрудно убедиться, что при h, достаточно малом, область D_h' будет состоять из нескольких сколь угодно малых сегментов, расположенных у точек с экстремальными абсциссами. Оценим прежде всего $|\eta_n(x, y)|$ в области D_h. Положим

$$\max|\eta_n(x, y)| = M_n; \quad \max|u(x, y)| = M_0. \tag{61}$$

Тогда

$$\max|u_n(x, y)| \leqslant M_0 + M_n. \tag{62}$$

Воспользуемся теперь теоремой А. А. Маркова [1],[1]) согласно которой максимум модуля производной полинома n-й степени на промежутке длины h не превосходит произведения $\frac{2n^2}{h}$ на максимум модуля самого полинома. Тогда в области D_h имеем

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| \leqslant (M_0 + M_n)\frac{2n^2}{h}. \tag{63}$$

[1]) См. также И. П. Натансон [1], стр. 178.

Пусть нам известно, что отрезок, концы которого (x, α) и (x, β), содержится в области D_h. Тогда при установлении следующего ниже неравенства, не умаляя общности, можно считать, что его длина $\beta - \alpha \geqslant h$, а потому

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant \left[(M_0 + M_n)\frac{2n^2}{\beta - \alpha}\right]^2 (\beta - \alpha) \leqslant (M_0 + M_n)^2 \frac{4n^4}{h}. \tag{64}$$

Отсюда на основании (53)

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant 2\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 dy + 2\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(M_0 + M_n)^2\, 8n^4}{\beta - \alpha} + 2K_0 \leqslant (M_0 + M_n)^2 \frac{8n^4}{h} + 2K_0. \tag{65}$$

Благодаря неравенству (65), к точкам области D_h применима оценка (44) (см. сноску [2]) на стр. 361), только в качестве K должна быть взята правая часть неравенства (65). Получаем в области D_h оценку

$$|\eta_n(x, y)| < C_2 \sqrt{\varepsilon_n \ln \frac{d\,(M_0 + M_n)^2\, 8n^4 + 2h\,K_0 d}{h\varepsilon_n}} + C_3 \sqrt{\varepsilon_n}. \tag{66}$$

Оценим теперь $|\eta_n|$ в области D'_h. Возьмем некоторую точку (x_0, y_0) из этой области (рис. 28). Пусть ближайшие к (x_0, y_0) точки пересечения прямой $x = x_0$ с контуром Γ будут (x_0, α) и (x_0, β) $(\alpha < y_0 < \beta)$. Так как (x_0, y_0) в области D'_h, то $\beta - \alpha < h$. Часть контура Γ, отделенная этим отрезком, расположена вблизи одной из точек с экстремальной абсциссой и допускает, если h было выбрано достаточно малым, явное задание вида $x = \varphi(y)$ $(\alpha \leqslant y \leqslant \beta)$, при этом, благодаря конечности кривизны в экстремальной точке, имеем

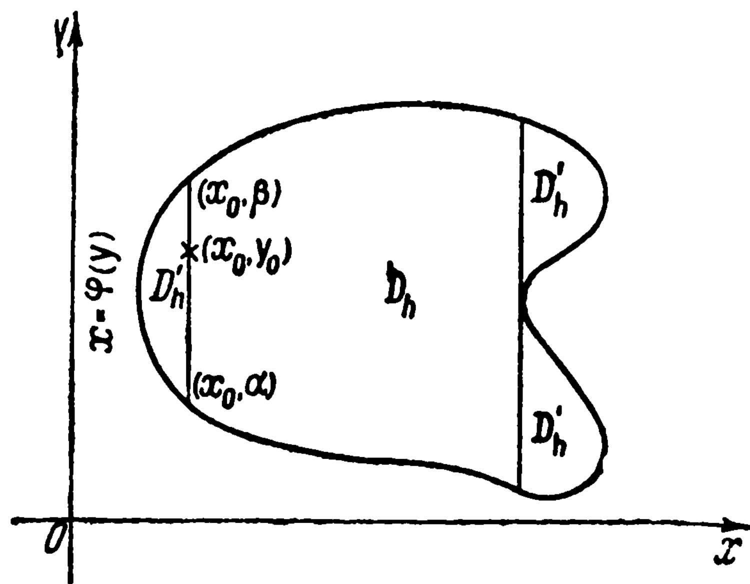


Рис. 28.

$$|\varphi(y) - x_0| < C_4(\beta - \alpha)^2,$$

где C_4 — постоянная, зависящая только от вида области. Имеем теперь, так как $\eta_n(y, \varphi(y)) = 0$ для $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$:

$$\int_\alpha^\beta \eta_n^2(x_0, y)\, dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi(y)}^{x_0} \frac{\partial \eta_n}{\partial x} dx\right)^2 dy \leqslant \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(y)}^{x_0} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x}\right)^2 dx\right] (\varphi(y) - x_0)\, dy \leqslant$$
$$\leqslant C_4(\beta - \alpha)^2 \iint_D \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x}\right)^2 dx\, dy \leqslant C_1 C_4 \varepsilon_n (\beta - \alpha)^2.$$

Возьмем число $p>0$ и обозначим через e систему тех интервалов, в которых $|\eta_n(x, y)|>p$, и через me их общую длину. Тогда имеем:

$$p^2 me \leqslant \int_\alpha^\beta \eta_n^2(x_0, y)\, dy \leqslant C_1 C_4 \varepsilon_n (\beta-\alpha)^2;$$

$$me \leqslant C_1 C_4 \frac{\varepsilon_n(\beta-\alpha)^2}{p^2}.$$

В точках, не принадлежащих e, имеем $|\eta_n(x_0, y)| \leqslant p$; если же точка (x_0, y_0) принадлежит e, то на расстоянии $\leqslant \frac{me}{2}$ от (x_0, y_0) имеется точка (x_0, y_1), не принадлежащая e. Поэтому, пользуясь еще первым из неравенств (65), находим:

$$|\eta_n(x_0, y_0)| \leqslant |\eta_n(x_0, y_1)| + \left|\int_{y_1}^{y_0} \frac{\partial \eta_n}{\partial y}\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant p + \sqrt{|y_1 - y_0|}\sqrt{\int_{y_1}^{y_0}\left(\frac{\partial \eta_n}{\partial y}\right)^2 dy} \leqslant$$

$$\leqslant p + \sqrt{2K_0 + \frac{(M_0+M_n)^2 8n^4}{\beta-\alpha}}\sqrt{me} \leqslant$$

$$\leqslant p + \sqrt{2K_0 + \frac{(M_0+M_n)^2 8n^4}{\beta-\alpha}}\sqrt{C_1 C_4}\frac{\sqrt{\varepsilon_n}(\beta-\alpha)}{p} \leqslant$$

$$\leqslant p + C_5 (M_0 + M_n) n^2 \sqrt{\varepsilon_n h}\,\frac{1}{p} = 2p, \qquad (67)$$

если принять

$$p = C_5^{1/2}(M_0+M_n)^{1/2} n \varepsilon_n^{1/4} h^{1/4}. \qquad (68)$$

Неравенство (67) справедливо для области D_h'. Сопоставляя неравенства (66) и (67), имеем неравенство

$$|\eta_n(x, y)| \leqslant C_2 \sqrt{\varepsilon_n \ln \frac{d(M_0+M_n)^2 8n^4 + 2hK_0 d}{h\varepsilon_n}} + C_3\sqrt{\varepsilon_n} + $$
$$+ 2C_5^{1/2}(M_0+M_n)^{1/2} n \varepsilon_n^{1/4} h^{1/4}, \qquad (69)$$

справедливое уже во всей области D. Теперь естественно принять $h = \varepsilon_n n^{-4}$. Тогда получим:

$$M_n \leqslant C_2 \sqrt{\varepsilon_n \ln\left(\frac{8d(M_0+M_n)^2 n^8}{\varepsilon_n^2} + \frac{2K_0 d}{\varepsilon_n}\right)} +$$
$$+ C_3\sqrt{\varepsilon_n} + 2C_5^{1/2}(M_0+M_n)^{1/2}\sqrt{\varepsilon_n}. \qquad (70)$$

Из неравенства (70) сразу следует, благодаря условию (59), что $M_n \to 0$. Поэтому величины M_0, M_n ограничены и $\leqslant M$. Принимая

это во внимание, неравенство (70) можем значительно упростить и придать ему вид

$$M_n \leqslant C_6 \sqrt{\varepsilon_n \ln \frac{n}{\varepsilon_n}}, \tag{71}$$

что и доказывает утверждение теоремы (60).

Замечание 1. В теореме 2 функция u_n предполагалась полиномом от y, однако все рассуждения теоремы сохраняют силу, если она, как функция y, будет некоторого другого определенного типа, важно только, чтобы имела место теорема типа теоремы А. А. Маркова. Так, например, $u_n(x, y)$ может представлять тригонометрический полином n-го порядка от y; вся разница будет тогда в том, что вместо теоремы А. А. Маркова придется использовать теорему С. Н. Бернштейна.[1])

Замечание 2. Некоторым усложнением доказательства теорема 2 могла бы быть усилена, именно достаточно предполагать, что $u_n(x, y)$ имеет вид

$$u_n(x, y) = \omega(x, y)(a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_n(x)y^n),$$

где $\omega(x, y)$ — функция, удовлетворяющая известным условиям. Условие (53) также могло бы быть существенно ослаблено.

3. Сходимость метода Ритца и метода приведения к обыкновенным уравнениям. В предыдущем номере были даны условия, обеспечивающие сходимость минимальной последовательности к решению. В них существенную роль, как мы видели, играла быстрота убывания ε_n. Теперь мы укажем, при каких условиях необходимая быстрота убывания ε_n обеспечена, если речь идет о методе Ритца и методе приведения к обыкновенным уравнениям. При этих условиях и будет обеспечена сходимость указанных методов.

Нам удобнее будет начать с доказательства сходимости второго метода. При этом для сокращения доказательства мы ограничимся случаем области простейшего вида.

Лемма 2. *Пусть D — область, ограниченная линиями $x = 0$; $x = l$; $y = g(x)$; $y = h(x)$, где функции $g(x)$ и $h(x)$ определены вместе с производными первого и второго порядка и последние ограничены для $0 \leqslant x \leqslant l$; $h(x) > g(x)$ для указанных значений x. Пусть $u(x, y)$ — функция, определенная в области D, равная 0 на границе области и такая, что $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ интегрируемы с квадратом в D; $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — некоторые ограниченные непрерывные функции. Тогда могут быть построены функции $\bar{u}_n(x, y)$ и $\tilde{u}_n(x, y)$ вида*

$$\bar{u}_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \sin \frac{k\pi(y - g(x))}{h(x) - g(x)}, \tag{72}$$

$$\tilde{u}_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y^{k-1}(y - g(x))(y - h(x)), \tag{72'}$$

[1]) См. В. Л. Гончаров [1], стр. 242 или И. П. Натансон [1], стр. 123.

где $f_k(x)$ — функции от x, равные 0 при $x=0$ и $x=l$, такие, что величины

$$\bar{\varepsilon}_n = \iint\limits_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial y}\right)^2 + c(u-\bar{u}_n)^2\right] dx\,dy, \tag{73}$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \iint\limits_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}\right)^2 + c(u-\tilde{u}_n)^2\right] dx\,dy \tag{73'}$$

имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Доказательство. Проведем сначала построение $\bar{u}_n$. Положим

$$v(x, z) = u\left(x,\ g + \frac{z}{\pi}(h-g)\right), \quad 0 \leqslant z \leqslant \pi;\ 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{74}$$

$$\sigma(x, z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kz; \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v(x, z)\sin kz\,dz; \tag{75}$$

$$\rho(x, z) = v(x, z) - \sigma(x, z).$$

Тогда, выполняя еще интегрирование по частям и пользуясь тем, что $v=0$ при $z=0$ и $z=\pi$, находим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n} k a_k \cos kz =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{\pi}\int_0^\pi v(x, z)\sin kz\,dz\right)\cos kz =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial v}{\partial z}\cos kz\,dz\right)\cos kz.$$

Отсюда [ср. (12а)]:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 dz = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial v}{\partial z}\cos kz\,dz\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\sin kz\,dz\right)^2 \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 dz,$$

$$\int_0^l dx \int_0^\pi \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 dz \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}\int_0^l dx \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 dz. \tag{76}$$

Тот факт, что интеграл в правой части имеет конечное значение, мы устанавливаем ниже.

Таким же образом, опять пользуясь тем, что $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ при $z=0$ и $z=\pi$, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}-\sum_{k=1}^{n} a_k' \sin kz=\frac{\partial v}{\partial x}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial v}{\partial x}\sin kz\,dz\right)\sin kz,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 dz=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial v}{\partial x}\sin kz\,dz\right)^2=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\cos kz\,dz\right)^2\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\right)^2 dz,$$

$$\int_0^l dx\int_0^\pi\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 dz\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^l dx\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\right)^2 dz. \tag{77}$$

Наконец,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \rho^2\,dz=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(ka_k)^2=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 dz\leqslant\frac{1}{(n+1)^4}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 dz,$$

$$\int_0^l dx\int_0^\pi \rho^2\,dz\leqslant\frac{1}{(n+1)^4}\int_0^l dx\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 dz. \tag{78}$$

Сопоставляя эти неравенства, имеем:

$$\int_0^l\int_0^\pi\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2+\rho^2\right]dx\,dz\leqslant\frac{C_7}{(n+1)^2}. \tag{79}$$

От переменной z перейдем к y, принимая $z=\frac{\pi(y-g)}{h-g}$. Положим

$$S(x, y)=\sigma\left(x, \frac{\pi(y-g)}{h-g}\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k \sin\frac{k\pi(y-g)}{h-g}, \tag{80}$$

$$R(x, y)=u(x, y)-S(x, y)=\rho\left(x, \frac{\pi(y-g)}{h-g}\right). \tag{81}$$

Тогда, составляя выражения для производных от функций v и R, например

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\left[g'+\frac{z}{\pi}(h'-g')\right],$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\pi[-g'(h-g)-(y-g)(h'-g')]}{(h-g)^2}, \tag{82}$$

можно убедиться в том, что из предположенной конечности интегралов для $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и ограниченности $h'(x)$ и $g'(x)$ вытекает конечность интегралов, стоящих в правой части неравенств (76), (77) и (78), что окончательно устанавливает справедливость неравенства (79). С другой стороны, раз оно уже установлено, нетрудно из него преобразованием переменных, пользуясь формулами вида (82), получить неравенство

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 + R^2\right] dx\, dy < \frac{C_8}{(n+1)^2}. \tag{83}$$

Наконец, отсюда, ввиду ограниченности функций a, b, c, получаем

$$\iint_D \left[a\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 + cR^2\right] dx\, dy < \frac{C_9}{(n+1)^2}. \tag{84}$$

Последнее неравенство, если учесть (80) и (81), показывает, что можно принять $\bar{u}_n(x, y) = S(x, y)$, и тогда будет $\bar{\varepsilon}_n < \frac{C_9}{(n+1)^2}$, т. е. $\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. При этом из формулы (75), определяющей a_k, ясно, что $a_k(0) = a_k(l) = 0$, а потому и $f_k(0) = f_k(l) = 0$.

Перейдем теперь к построению $\tilde{u}_n(x, y)$. Положим $\cos\zeta = 4\left(\frac{z}{\pi}\right)^3 - 6\left(\frac{z}{\pi}\right)^2 + 1$ для $0 \leqslant z \leqslant \pi$, в соответствии с этим для $0 \leqslant \zeta \leqslant \pi$ определится функция $z = \varkappa(\zeta)$, относительно которой легко проверить, что она дифференцируема любое число раз и $\varkappa'(\zeta) \neq 0$ для $0 \leqslant \zeta \leqslant \pi$. Далее, положим

$$w(x, \zeta) = \frac{\sin\zeta}{z(\pi - z)}\, v(x, z), \text{ где } z = \varkappa(\zeta);\ 0 \leqslant \zeta \leqslant \pi. \tag{85}$$

Опять легко убедиться, что множитель при v в правой части—дифференцируемая функция для $0 \leqslant \zeta \leqslant \pi$. Положим теперь

$$\tau(x, \zeta) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\zeta; \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi w(x, \zeta)\sin k\zeta\, d\zeta. \tag{86}$$

Тогда аналогично (79), пользуясь тем, что производные w просто оцениваются через производные v, можно установить, что

$$\int_0^l dx \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}\right)^2 + (w - \tau)^2\right] d\zeta < \frac{C_{10}}{(n+1)^2}. \tag{87}$$

Далее, имеем

$$\tau(x, \zeta) = \sin\zeta\, P_{n-1}(\cos\zeta),$$

где P_{n-1} — полином указанной степени. Отсюда, заменяя $\cos\zeta$ его выражением через z, можем написать:

$$\tau(x, \zeta) = \frac{\sin\zeta}{z(\pi - z)} T(x, z),$$

где

$$T(x, z) = z(\pi - z) P_{n-1}(\cos\zeta) = z(\pi - z) P_{3n-3}(z). \tag{88}$$

Заменяя теперь в неравенстве (87) w его выражением через v (85) и τ выражением через T (88), получим, что

$$\int_0^l dx \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 + (v - T)^2\right] dz < \frac{C_{11}}{(n+1)^2}. \tag{89}$$

Возвращаясь теперь к переменной y, можем принять

$$\tilde{u}_{3n-2}(x, y) = \tilde{u}_{3n-1}(x, y) = \tilde{u}_{3n}(x, y) = T\left(x, \pi\frac{y - g(x)}{h(x) - g(x)}\right);$$

тогда легко убедиться [см. (88)], что $\tilde{u}_n$ имеют форму, указанную в (72′), а пользуясь (89) и рассуждая как при выводе (84), что

$$\tilde{\varepsilon}_n = \iint_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}\right)^2 + c(u - \tilde{u}_n)^2\right] dx\, dy < \frac{C_{12}}{n^2}, \tag{90}$$

и лемма доказана полностью.

Замечание. Условия леммы могли бы быть ослаблены в том отношении, что в ее формулировке вместо интегрируемости с квадратом $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ можно было бы потребовать интегрируемости с квадратом в области D производных $\frac{\partial^{1+p} u}{\partial x \partial y^p}$; $\frac{\partial^{1+p} u}{\partial y^{1+p}}$ $(0 < p < 1)$. Под производными $\frac{\partial^{1+p}}{\partial x \partial y^p}$ и $\frac{\partial^{1+p}}{\partial y^{1+p}}$ следует понимать производные дробного порядка, которые в свое время были введены Лиувиллем. В соответствии с этим мы получили бы только $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$. Доказательство также остается неизменным, только вместо элементарной оценки $\int_0^\pi \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) dz$ нужно воспользоваться теоремой Харди — Литльвуда, согласно которой, если $f(z)$ — функция, для которой производная порядка p суммируема с квадратом, то

$$\int_0^\pi (f - S_n)^2\, dx = O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

где S_n — n-я сумма Фурье для $f(x)$. [1])

---

[1]) Харди и Литльвуд [1]. См. также Кваде [1].

Теорема 3. *Если область D имеет вид, указанный в лемме 2, а функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и леммы 2, то имеет место равномерная сходимость последовательности приближений, найденных по методу приведения к обыкновенным уравнениям, если их искать в любой из двух форм:*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\sin\frac{k\pi(y-g)}{h-g};\quad \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)(y-g)(y-h)y^{k-1}, \tag{91}$$

при этом порядок погрешности n-го приближения есть $O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right)$.

Доказательство. Для определенности остановимся на случае, когда n-е приближение ищется в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)(y-g)(y-h)y^{k-1}. \tag{92}$$

Так как u_n дает минимум интегралу[1])

$$I(u) = \iint_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + cu^2 - 2fu\right] dx\,dy,$$

по сравнению со всеми другими функциями того же вида, то $I(u_n) \leqslant I(\tilde{u}_n)$, где $\tilde{u}_n$ — функция, построенная в лемме 2. Тогда

$$\varepsilon_n = I(u_n) - I(u) \leqslant I(\tilde{u}_n) - I(u) = \tilde{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

а потому на основании теоремы 2, так как, очевидно, $\varepsilon_n \ln n \to 0$, функции $u_n(x, y)$ равномерно сходятся к $u(x, y)$. При этом, как там указано,

$$|u - u_n| = O\left(\sqrt{\varepsilon_n \ln\frac{n}{\varepsilon_n}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right), \tag{93}$$

что и требовалось доказать.[2])

Замечание. Отметим, что налагая условия на производные более высокого порядка, можно было бы получить более высокий порядок малости $|u_n - u|$. Так, интегрируемость с квадратом производных порядка $p+1$ обеспечивает тот факт, что $|u_n - u| = O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^p}\right)$, если u_n ищется во второй из форм (91). Единственное изменение, которое надлежит внести в доказательство леммы 2 в таком случае, состоит в том, что в функции $v(x, z)$ нужно переменную z заменить на ζ так, чтобы обеспечить выполнение условий $\left.\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}\right|_{\zeta=\pi} = \left.\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}\right|_{\zeta=0}$ и т. д. Это позволило бы при преобразовании коэффициентов Фурье (стр. 367) применить интегрирование по частям многократно.

---

[1]) Следует обратить внимание на то, что уравнением Эйлера для интеграла $I(u)$ служит уравнение (51) [ср. § 1, (17b), стр. 268].

[2]) Доказательство сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям в случае третьей граничной задачи дано З. А. Власовой [1].

Переходим теперь к методу Ритца. Опять начнем с леммы: ввиду громоздкости доказательства, проводим его не во всех деталях.

Лемма 3. *Пусть $u(x, y)$—функция, определенная в области D, того же вида, что и в лемме 2, и такая, что частные производные третьего порядка от нее суммируемы с квадратом в D. Тогда можно подобрать функцию $u_n^*(x, y)$ вида*

$$u_n^*(x, y) = x(l-x)(y-g(x))(y-h(x)) \sum_{i,\,k \leqslant n} a_{ik} x^i y^k \tag{94}$$

так, что величина

$$\varepsilon_n^* = \iint_D \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_n^*}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_n^*}{\partial y}\right)^2 + c\,(u - u_n^*)^2 \right] dx\,dy \tag{95}$$

имеет порядок $O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\sigma(x, z)$ [см. (75)]:

$$\sigma(x, z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kz = 2 \sin z \sum_{k=1}^{n} a_k [\cos(k-1)z + {}$$
$$+ \cos(k-3)z + \ldots]\,^{1)} = (a_1 + a_3 + \ldots)\sin z + {}$$
$$+ 2\sin z \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} + a_{k+3} + \ldots)\cos kz = \sin z H(x, z), \tag{96}$$

при этом в последнюю сумму не следует включать a с индексами больше n. Оценим интеграл от H^2; имеем:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi H^2 dz \leqslant 4 \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} + a_{k+3} + \ldots)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4 \sum_{k=0}^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \ldots + |a_n|)^2 =$$
$$= 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{k+1}(k+1)|a_{k+1}| + \ldots + \frac{1}{n} n |a_n|\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{(k+1)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right]\left[(k+1)^2 a_{k+1}^2 + \ldots + n^2 a_n^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant 4\frac{\pi^2}{6}(1^2 a_1^2 + \ldots + n^2 a_n^2) + 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}[(k+1)^2 a_{k+1}^2 + \ldots + n^2 a_n^2] \leqslant$$
$$\leqslant 4\left(\frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2 < 4(\ln n + 3)\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dz,$$

1) Последнее слагаемое в скобках есть $\cos z$, если k—четное, и $1/2$, если k — нечетное.

откуда

$$\int_0^l dx \int_0^\pi H^2 dz \leqslant 4(\ln n + 3) \int_0^l dx \int_0^\pi \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dz. \tag{97}$$

Таким же образом можно оценить интегралы квадратов первых и вторых производных функции H через такие же интегралы от вторых и третьих производных функции v, и так как последние интегралы конечны, благодаря соответствующему предположению о функции u, то убеждаемся в том, что интегралы квадратов производных функции H имеют порядок $O(\ln n)$.[1])

Возвращаясь к переменной y, имеем:

$$S(x, y) = \sigma\left(x, \pi\frac{y-g}{h-g}\right) =$$

$$= (h-y)(y-g)\frac{\sin \pi \frac{y-g}{h-g}}{(h-y)(y-g)} H\left(x, \pi\frac{y-g}{h-g}\right). \tag{98}$$

Выбрав L достаточно большим и производя, если надо, трансляцию, можем, очевидно, считать, что $0 < g(x) < h(x) < L$. Определим теперь функцию $G(x, y)$, полагая

$$G(x, y) = \frac{\sin \pi \frac{y-g}{h-g}}{(h-y)(y-g)} H\left(x, \pi\frac{y-g}{h-g}\right) \quad \text{для} \quad g(x) \leqslant y \leqslant h(x), \tag{99}$$

и доопределим ее для $0 \leqslant y \leqslant L$ так, чтобы $G(x, 0) = G(x, L) = 0$.[2]) Благодаря сказанному выше о функции H, легко убедиться, что интегралы от квадратов G и ее производных первого и второго порядка по прямоугольнику $[0, l;\ 0, L]$ имеют порядок $\ln n$. Отметим еще, что, как легко проследить, $G(0, y) = G(l, y) = 0$.

Теперь, исходя из $G(x, y)$ вместо $w(x, z)$ и повторяя рассуждение, проведенное в лемме 2, мы можем построить $T(x, y)$ — полином от y степени меньше $3n$, так что

$$\int_0^l dx \int_0^L \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + (G - T)^2\right] dy < \frac{C_{18} \ln n}{n^2}. \tag{100}$$

---

[1]) Следует сказать, что по отношению ко вторым производным это будет верно, только если предварительно добились выполнения условия $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ при $y = 0$ и $y = \pi$. Если это не было сделано, то можно лишь показать, что этот интеграл порядка $O(n)$. Впрочем, и этого достаточно для дальнейшего доказательства сходимости метода Ритца.

[2]) Удобнее всего при определении $G(x, y)$ для значений y, лежащих вне промежутка $(g(x), h(x))$, воспользоваться тем же самым выражением (99), домноженным только (для $h(x) \leqslant y \leqslant L$) на функцию, гладко спускающуюся от значения 1 при $y = h(x)$ к значению 0 при $y = L$.

При этом по построению будем иметь, что $T(0, y) = T(l, y) = 0$. Также нетрудно проверить, что интегралы квадратов производных функции T имеют тот же порядок, что и для G, т. е. $O(\ln n)$. К функции $T(x, y)$ можем вновь применить тот же процесс, меняя только роли переменных. Тогда мы определим функцию $P(x, y)$ — полином от x степени меньше $3n$; легко проверить, что он будет, как и T, полиномом от y степени меньше $3n$ и, так как $T(0, y) = T(l, y) = 0$, будет иметь множителями x и $l - x$, т. е.

$$P(x, y) = x(l - x) \sum_{i,\, k < 3n} a_{i,\, k} x^i y^k, \tag{101}$$

и, наконец, будет справедливо неравенство

$$\int_0^L dy \int_0^l \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + (T - P)^2 \right] dx < C_{14} \frac{\ln n}{n^2}. \tag{102}$$

Теперь мы можем принять

$$u^*_{3n-1}(x, y) = u^*_{3n}(x, y) = u^*_{3n+1}(x, y) = \\ = (h(x) - y)(y - g(x)) P(x, y). \tag{103}$$

Действительно, как это ясно из предыдущих оценок и (84), тогда

$$\varepsilon^*_n = \iint_D \left[a \left(\frac{\partial u^*_n}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial u^*_n}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + c(u^*_n - u)^2 \right] dx\, dy < \frac{C_{15} \ln n}{n^2}, \tag{104}$$

что и доказывает утверждение леммы.

Теорема 4. *Если область D и функция $u(x, y)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то имеет место сходимость метода Ритца, если решение разыскивать в виде*

$$u_n(x, y) = x(l - x)(h(x) - y)(g(x) - y) \cdot \sum_{i,\, k \le n} a_{i,\, k} x^i y^k, \tag{105}$$

при этом $|u_n - u|$ *имеет порядок* $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Действительно, по лемме $\varepsilon^*_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$, тогда тем более для n-го приближения по Ритцу $\varepsilon_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$, а в таком случае по теореме 2 имеет место сходимость метода Ритца и $|u_n - u|$ имеет порядок

$$O\left(\sqrt{\varepsilon_n \ln n}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Замечание 1. Ранее вопрос о сходимости метода Ритца для случая задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа с двумя переменными был рассмотрен в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [2]. Однако из этих результатов сходимость метода вытекает лишь при наложении требований на производные высоких порядков (ограниченность седьмых производных).

Замечание 2. Метод рассуждений, приведший нас к теоремам 3 и 4, применим и в случае других граничных задач, кроме задачи Дирихле, а также для доказательства сходимости других вариационных процессов. В частности, в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям переход к последующим приближениям может осуществляться путем разбиения области на все более узкие полоски, в каждой из которых решение ищется в форме полинома фиксированной степени. Сходимость имеет место и для этого процесса и может быть исследована теми же методами.

Замечание 3. Результаты последних двух параграфов получили существенное усиление и широкое обобщение в работах В. П. Ильина [1, 2] и И. Ю. Харрик [1, 2].

В работах И. Ю. Харрик исследован вопрос о возможном порядке приближения выражениями вида $\omega(x, y) P_n(x, y)$ (P_n — полином n-й степени) в области D, ограниченной кривой $\omega(x, y)=0$, функции $u(x, y)$, обращающейся в нуль на контуре. Исследован также аналогичный вопрос для многомерных пространств.

Из результатов И. Ю. Харрик вытекает, например, при известных предположениях относительно $\omega(x, y)$, что если u имеет первые частные производные, удовлетворяющие условию Липшица с показателем α, то возможный порядок одновременной аппроксимации u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ есть $n^{-\alpha}$. В частности, можно было бы установить в лемме 3, что для такой функции $u(x, y)$ будет $\varepsilon_n = O(n^{-2\alpha})$. Благодаря этому и в теореме 4 сходимость метода Ритца могла быть получена при приведенном выше условии относительно u, которое значительно слабее, чем указанное в тексте теоремы. При этом $|u_n - u| = O(n^{-\alpha}\sqrt{\ln n})$. При более сильных предположениях относительно u для $|u_n - u|$ получается соответственно более высокий порядок.

В работах В. П. Ильина прежде всего систематически исследованы возможные оценки функции m переменных, заданной в некоторой области, если известны оценки интегралов ее частных производных по всей области и по ее сечениям низшей размерности (пример подобных оценок представляет лемма 1). С их помощью установлены, в случае задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа с m переменными, теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2. В частности, сопоставление этих результатов с упомянутыми результатами И. Ю. Харрик приводит к установлению равномерной сходимости метода Ритца для этой задачи, когда приближенное решение ищется в форме $\omega(x_1, \ldots, x_m) P_n(x_1, \ldots, x_m)$, если точное решение имеет m непрерывных производных.

В. П. Ильиным показано также, что аналогичные результаты имеют место и по отношению к задаче Неймана и смешанной задаче для эллиптического уравнения. Наконец, в этих работах получаются и условия равномерной сходимости метода Ритца для основной бигармонической задачи ($u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ на контуре) с m переменными, когда ее решение ищется в форме $\omega^2(x_1, \ldots, x_m) P_n(x_1, \ldots, x_m)$.

ГЛАВА V

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. Введение

1. Конформное преобразование и уравнение Лапласа. Весьма большое число стационарных задач математической физики сводится к решению простейшего из уравнений эллиптического типа — уравнения Лапласа

$$\Delta_{xy} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Сюда относятся, например, плоские стационарные задачи теории электричества, теории теплоты, задачи о движении совершенной несжимаемой жидкости и т. д. При этом искомая функция, решающая поставленную проблему, определяется, во-первых, областью, в которой она ищется, зависящей от формы изучаемого объекта, и, во-вторых, предельными условиями, которые должны быть выполнены на границе этой области.

Часто бывает, что для простейших областей — круга, квадрата, кругового кольца, плоскости с разрезами и т. п. — задача может быть относительно просто разрешена при сравнительно сложных предельных требованиях. Если же область имеет сложное строение, то решение задачи непосредственно для этой области представляет подчас весьма большие затруднения даже для такой простой задачи, какой является, например, проблема Дирихле. Поэтому пытаются предварительно преобразовать данную область к простейшему виду. При такого рода преобразованиях будет меняться, вообще говоря, не только область, для которой ищется решение, и предельные условия, но и дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция.

Наибольшее значение для уравнения Лапласа будет, очевидно, иметь такое преобразование, относительно которого само уравнение Лапласа остается инвариантным.

Пусть вместо переменных x и y мы ввели новые переменные ξ и η при помощи равенств:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \tag{2}$$

Когда переменные x, y меняются в области B, новые переменные ξ и η меняются в некоторой области G. Исследуем, как изменится уравнение при преобразовании:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Поэтому новое уравнение для функции u в переменных ξ и η будет

$$\Delta_{xy}u=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial \xi}\Delta_{xy}\xi+\frac{\partial u}{\partial \eta}\Delta_{xy}\eta=0.$$

Чтобы оно было уравнением Лапласа, нужно, очевидно, чтобы преобразование (2) удовлетворяло следующим требованиям:

$$\Delta_{xy}\xi=0,\quad \Delta_{xy}\eta=0,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=0,\quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Первые два из этих уравнений говорят о том, что ξ и η должны быть гармоническими функциями от x и y. Третье уравнение дает

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}:\frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial y}:\frac{\partial \xi}{\partial x}=-\mu;\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=-\mu\frac{\partial \xi}{\partial y},\ \frac{\partial \eta}{\partial y}=\mu\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Если подставить теперь вместо производных от η их значения в последнее уравнение, получим:

$$(1-\mu^2)\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]=0.$$

Отсюда видно, что $\mu=\pm 1$ и, стало быть, либо

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial x},\tag{3}$$

либо

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=-\frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}.\tag{3'}$$

Уравнение (3') отличается от (3) только тем, что ξ и η поменялись местами; мы остановимся поэтому только на первом из условий. Оно выражает то обстоятельство, что ξ и η суть сопряженные гармонические функции. Преобразования, даваемые такого рода функциями, будут конформными — переводящими бесконечно малые фигуры

плоскости x, y в подобные им фигуры плоскости ξ, η всюду, где $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$.

Образуем следующую комплексную функцию: $f(z) = \xi + i\eta$ комплексной переменной $z = x + iy$. Для нее (3) будут известными условиями моногенности Коши-Римана.

Таким образом, уравнение Лапласа остается инвариантным относительно преобразований, доставляемых моногенными функциями комплексной переменной.

Ниже нам будут полезны некоторые общие предложения, относящиеся к конформным преобразованиям. Мы приведем их сейчас без доказательства.

2. Преобразование односвязных областей. Простейшим случаем конформного преобразования будет тот, когда преобразуемые области односвязны. Первый вопрос, возникающий в связи с исследованием конформного преобразования их, — это вопрос о существовании голоморфной функции, совершающей взаимно однозначное преобразование их друг на друга.

Ответ дается следующим предложением, известным под именем теоремы Римана:

Если B и G суть односвязные однолистные области плоскостей комплексных переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$, отличные от всей плоскости и всей плоскости без одной точки, то существует функция $\zeta = f(z)$, голоморфная в B и совершающая конформное взаимно однозначное отображение B на G, при этом так, что заранее указанная точка a в области B переходит в произвольно избранную точку α из G и заданное направление в точке a перейдет в заданное направление в α.

Требованием соответствия внутренних точек и направлений в них преобразующая функция определяется вполне.

Таким образом, функция, преобразующая B в G, будет зависеть от трех параметров, ввиду того что точка α, задаваемая произвольно, определяется двумя параметрами и направление в ней — одним. Выбором этих трех параметров мы можем распорядиться иначе, чем в теореме Римана. Например, для областей, подчиненных некоторым ограничениям, которые для практически встречающихся случаев, наверное, выполняются, можно требовать, чтобы три наперед заданные точки границы области B перешли в три заданные точки границы G.

Остановим еще внимание читателя на некоторых фактах, относящихся к поведению преобразующей функции на границе L преобразуемой области B.

Будем предполагать, простоты ради, что области B и G ограничены. Для практических приложений нам достаточно считать границы

их — кусочно-гладкими кривыми. [1]) Мы не будем, однако, предполагать эти кривые простыми: одну и ту же комплексную координату z могут иметь несколько граничных точек.

Опишем около граничной точки с координатой z круг малого радиуса ε; он пересечется с B по некоторой совокупности областей. Возьмем те из них, которые имеют z своей граничной точкой. Пусть это будут $B_\varepsilon^{(1)}, B_\varepsilon^{(2)}, \ldots$ Точка z называется простой точкой границы L области B, если при всяких ε будет существовать только одна из областей B_ε. В противном случае точку называют кратной. Граничные точки с одной и той же комплексной координатой называют разными, если им при некотором ε будут соответствовать различные $B_\varepsilon^{(k)}$. Как индивидуум граничная точка определяется своей координатой и прилежащей к ней областью B_ε при произвольно малом ε; последнюю называют B_ε-окрестностью граничной точки.

Можно показать, что преобразующая функция $\zeta = f(z)$ будет стремиться к определенному пределу, если аргумент z будет приближаться к граничной точке. Больше того, если к области присоединить все ее граничные точки, то преобразующая функция будет непрерывна всюду в полученном замыкании области B.

Задача об эффективном построении функции, совершающей преобразование B на G, даже в простом случае преобразования области на круг или круга на область представляет очень часто весьма большие или даже непреодолимые затруднения. Достаточно вспомнить проблему определения постоянных в формуле Кристофеля — Шварца для функции, преобразующей круг на многоугольник, чтобы убедиться в этом. Даже если известен аппарат представления преобразующей функции, его строение порой бывает настолько сложным, что пользование им сопряжено с большой затратой труда.

Поэтому весьма большое значение имеют, для неточного разрешения задач, более простые методы приближенного представления преобразующей функции. Обычно пытаются приблизиться к искомой функции, составляя известные комбинации из хорошо изученных функций. Наиболее простыми и чаще всего употребляемыми функциями являются полиномы. Возможность применения их была исследована Рунге; им было установлено, что в области B всегда можно построить полином, который отличается от функции, преобразующей область на круг, как угодно мало в любой внутренней части B.

Если граница области B имеет кратные точки, то полиномы, очевидно, недостаточны для того, чтобы приблизиться к отображающей функции равномерно всюду в B. Если же граница области B есть простая кривая, т. е. кривая без кратных точек, то, как показали исследования Уолша, в B можно подобрать полином так, чтобы он

---

[1]) Кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа дуг с непрерывно изменяющейся касательной.

отличался от преобразующей функции как угодно мало всюду в B, включая и границу L.

3. Преобразование многосвязных областей. Конформное преобразование многосвязных областей подчинено бо́льшим ограничениям, чем преобразование односвязных. Для возможности взаимно однозначного преобразования одной области на другую необходимо, чтобы они были одинаковой связности. Но равная связность областей еще не является достаточной для возможности их преобразования, и не всякие две области одной и той же связности могут быть преобразованы друг в друга.

Мы остановимся сначала на случае двухсвязных областей и на их примере выясним идею построения аппарата, позволяющего определить преобразующую функцию с любой степенью точности. Сходным путем может быть построен аппарат в случае области любой связности. Простейшая среди двухсвязных областей есть кольцо между двумя концентрическими окружностями. Относительно преобразования на нее любой другой области известна следующая теорема:

Всякая двухсвязная область может быть конформно и взаимно однозначно преобразована на кольцо с конечным или бесконечным отношением радиусов его граничных окружностей.

Обозначим граничные кривые области через L_1, L_2 и радиусы соответствующих им окружностей через ρ_1 и ρ_2. Если указано, какая из граничных кривых области должна перейти во внешнюю и какая во внутреннюю окружность кольца, то отношение $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ радиусов ρ_1 и ρ_2 будет вполне определено. Разыскание этого отношения представляет одну из трудных задач теории конформного преобразования.

Можно просто видеть, что преобразование одного кольца в другое с тем же отношением радиусов без перемены местами внешней и внутренней окружностей сводится только к подобному преобразованию и вращению около центра. Поэтому, если начало координат лежит в центре кольца, функция, преобразующая область B на кольцо, определяется с точностью до произвольного комплексного множителя.

Для приближенного преобразования здесь могут быть использованы рациональные функции частного вида.

Пусть бесконечно далекая точка плоскости не принадлежит области. Внешний контур обозначим через L_2 и внутренний — через L_1. Поместим начало координат внутри или на L_1. Преобразующая функция есть, как известно, сумма двух слагаемых, одно из которых — $\varphi_0(z)$ голоморфно внутри внешнего контура, и другое — $\varphi_1(z)$ — вне внутреннего. К $\varphi_0(z)$ можно равномерно приблизиться в любой внутренней части области, ограниченной L_2, при помощи полинома вида

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n,$$

тогда как $\varphi_1(z)$ можно равномерно аппроксимировать как угодно точно в любой внутренней части области, лежащей вне L_1, при по-

мощи рациональной функции, имеющей форму:

$$Q_m(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{z^m}.$$

Таким образом, функция, преобразующая область B между L_1 и L_2 на кольцо, может быть в любой внутренней части B представлена равномерно с произвольной точностью при помощи рациональной функции типа:

$$\sum_{\nu=-m}^{n} a_\nu z^\nu.$$

Если бесконечно далекая точка и начало координат будут внешними точками B и кривые L_1 и L_2 не будут иметь кратных точек, то равномерная аппроксимация возможна всюду в B, включая и контур.

Немного иначе будет обстоять дело в том случае, когда бесконечно далекая точка будет принадлежать области. Тогда B будет внешностью двух кривых L_1 и L_2. Пусть a_1 и a_2 — две точки, лежащие внутри кривых или на них самих. Преобразующая функция здесь будет представляться суммой двух функций, одна из которых голоморфна вне L_1; к ней можно приблизиться произвольно близко в любой внутренней части области, внешней L_1, при помощи рациональной функции:

$$R_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{(z-a_1)} + \frac{\alpha_2}{(z-a_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{(z-a_1)^n};$$

вторая же будет голоморфна вне L_2 и к ней можно совершенно также приблизиться при помощи рациональной функции:

$$R_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{(z-a_2)} + \frac{\beta_2}{(z-a_2)^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{(z-a_2)^n}.$$

Поэтому преобразующая функция приближенно может быть представлена при помощи функции вида:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{\alpha_k}{(z-a_1)^k} + \frac{\beta_k}{(z-a_2)^k} \right\}.$$

Когда L_1 и L_2 — простые кривые и точки a_1 и a_2 лежат внутри их, то, как и выше, возможно равномерное приближение к $\varphi(z)$ в B, включая и границу.

Перейдем к преобразованию областей любой связности. Ради простоты мы будем иметь в виду область конечной связности n.

За каноническую область, на которую преобразуется всякая другая область, здесь принимают чаще всего всю плоскость с разрезами, параллельными некоторому направлению, например направлению вещественной оси.

При преобразовании мы можем задавать произвольно точку a области B плоскости z, которая должна перейти в бесконечно

далекую точку плоскости ζ изображения. Далее, можно задавать произвольно то направление в точке a, которое должно переходить в направление вещественной оси в точке $\zeta=\infty$. Если a лежит на конечном расстоянии, то преобразующая функция имеет вблизи нее разложение:

$$\zeta=\frac{c}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots, \tag{4}$$

когда же $a=\infty$, то

$$\zeta=cz+c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots \tag{4'}$$

В обоих случаях выбор указанного направления соответствует выбору аргумента коэффициента c главного члена ряда.

При умножении ζ на любое вещественное положительное число, что отвечает произвольному преобразованию подобия из начала координат плоскости ζ, разрезы, параллельные вещественной оси, не изменят, очевидно, своего направления и останутся опять параллельными вещественной оси. Но при умножении ζ на положительное число, на это число умножается модуль c. Значит, в нашей задаче мы должны произвольным считать не только аргумент c, но и его модуль. Наконец, разрезы не будут менять своего направления при любом параллельном переносе плоскости ζ, иначе говоря, при любом изменении свободного члена c_0.

Таким образом, при подобного рода преобразованиях в выражениях (4) или (4′) преобразующей функции остаются произвольными соответственно либо a, c, c_0, либо c, c_0.

Можно просто показать, что если эти величины заданы, то преобразующая функция определяется вполне. В самом деле, пусть кроме функции ζ область B преобразуется конформно на плоскость с разрезами, параллельными вещественной оси, при помощи функции ζ^*, имеющей разложение около a либо

$$\zeta^*=\frac{c}{z-a}+c_0+c_1^*(z-a)+c_2^*(z-a)^2+\ldots,$$

либо

$$\zeta^*=cz+c_0+\frac{c_1^*}{z}+\frac{c_2^*}{z^2}+\ldots$$

Составим разность между ζ и ζ^*:

$$\zeta-\zeta^*=p+iq.$$

Вблизи a она имеет разложение либо

$$\zeta-\zeta^*=(c_1-c_1^*)(z-a)+(c_2-c_2^*)(z-a)^2+\ldots,$$

либо

$$\zeta-\zeta^*=\frac{c_1-c_1^*}{z}+\frac{c_2-c_2^*}{z^2}+\ldots$$

Так как при вычитании главные члены в разложениях ζ и ζ^* сократятся, разность $\zeta - \zeta^* = \Phi(z)$ будет функцией регулярной и ограниченной всюду в B. [1]) На каждой граничной кривой мнимые части ζ и ζ^* сохраняют постоянные значения, ибо каждая такая кривая переводится функциями $\zeta = \zeta(z)$ и $\zeta = \zeta^*(z)$ в разрез, параллельный вещественной оси. Поэтому будет сохранять постоянное значение и мнимая часть $\Phi(z)$ на каждой из граничных кривых области.

Кроме того, так как при вычитании сократятся и свободные члены c_0 разложений, $\Phi(z)$ будет обращаться в точке a или, соответственно случаю (4′), в бесконечно далекой точке в нуль.

Предположим, что $\Phi(z)$ отлична от постоянной величины. Тогда она будет доставлять преобразование области B на некоторую ограниченную область, границей которой служат прямолинейные разрезы, параллельные вещественной оси. Но такая область, очевидно, невозможна и поэтому $\Phi(z) = \zeta - \zeta^* = \text{const}$. С другой стороны, из $\Phi(a) = 0$ или $\Phi(\infty) = 0$ вытекает, что постоянная, которой равна $\Phi(z)$, может быть только нулем и, следовательно, ζ и ζ^* обязаны совпадать.

§ 2. Свойство минимума площади при преобразовании области на круг

1. Экстремальное свойство функции, преобразующей область на круг. Среди функций, дающих конформное преобразование заданной односвязной однолистной области B на некоторую другую область, функция, отображающая на круг, обладает одним интересным экстремальным свойством, позволяющим дать сравнительно простой по идее, и в некоторых случаях также по вычислениям, метод приближенного конформного преобразования области на круг. [2])

Установим сначала минимальный принцип. Пусть функция

$$\zeta = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

регулярная в круге радиуса R с центром в начале координат, преобразует его в некоторую область комплексной переменной ζ.

---

[1]) Регулярность $\Phi(z)$ всюду в B очевидна. Ограниченность же ее вытекает из следующих соображений. Каждая из функций ζ и ζ^* ограничена вблизи контура области, так как каждая из них переводит граничные кривые в разрезы, лежащие на конечном расстоянии. Поэтому $\Phi(z) = \zeta - \zeta^*$ будет также ограниченной вблизи контура. Итак, оказывается, что $\Phi(z)$ регулярна в B и ограничена вблизи границы B. Но тогда она ограничена всюду в B.

[2]) Бибербах [1]. Аналогичное экстремальное свойство для функции, конформно преобразующей область на круговое кольцо, было рассмотрено Г. Я. Хажалия [1, 2].

Площадь ее, как известно, выражается интегралом вида:

$$I=\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} f'(z)\overline{f'(z)}r\,dr\,d\varphi,\ z=re^{i\varphi}. \tag{2}$$

После подстановки под знак интеграла вместо производной $f'(z)$ ее значения из (1) мы получим там сумму членов вида:

$$nka_n\overline{a}_k r^{n+k-1}e^{i(n-k)\varphi}.$$

При интегрировании по φ могут представиться два случая: если $n\neq k$,

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi}\,d\varphi=0,$$

если же $n=k$, то интегрирование по φ дает просто 2π, и

$$I=\int\limits_0^R\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 n^2 2\pi r^{2n-1}\,dr=\pi R^2|a_1|^2+\pi\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|^2R^{2n}, \tag{3}$$

откуда получается следующий результат.

При отображении круга радиуса R при помощи функции (1), регулярной внутри него и имеющей первую производную в центре, равную a_1, площадь отображенной области всегда больше, нежели $\pi R^2|a_1|^2$, и может совпадать с этим числом лишь в том случае, когда преобразование линейно: $\zeta=a_0+a_1z$.

Нас будет ниже особенно интересовать тот случай, когда $a_1=1$; здесь результат предыдущей теоремы говорит о том, что при таком преобразовании площадь увеличивается, если исключить случай параллельного переноса $\zeta=a_0+z$.

Допустим теперь, что нам нужно найти конформное преобразование однолистной области B на круг так, чтобы заданная внутренняя точка ее, которую мы всегда можем принять за начало координат, переходила в центр круга и определенное направление в этой точке, принимаемое нами за положительное направление вещественной оси, совпадало бы с положительным направлением вещественной оси преобразованной области. Эти условия равносильны требованиям:

$$f(0)=0, f'(0)=a_1>0.$$

Мы всегда можем добиться того, чтобы a_1 равнялось 1; для этого достаточно рассмотреть функцию $\frac{f(z)}{a_1}$, которая будет так же давать отображение B на круг, как и $f(z)$, но только, может быть, другого радиуса, что для нас не существенно. Поэтому мы всегда можем предположить:

$$f(0)=0 \text{ и } f'(0)=1. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь всевозможные конформные преобразования области B на некоторые другие области, даваемые функциями, удовлетворяющими тем же условиям (4). Можно без труда видеть, что из всех областей, в которые переводится B при помощи такого рода функций, круг будет обладать наименьшей площадью. Действительно, отображение B на некоторую область B' можно вообразить выполненным при помощи следующих двух шагов: сначала B мы отображаем на круг и затем круг на B'. При этом функция, совершающая последнее преобразование, будет удовлетворять требованиям (4). В самом деле, пусть функция, преобразующая область B на круг будет $\zeta = \varphi(z)$, и функция, преобразующая B на B', будет $t = f(z)$. Обе они удовлетворяют условиям (4). Обозначим, наконец, функцию, доставляющую преобразование круга на B' с сохранением начала координат, через $t = \psi(\zeta)$. Она удовлетворит первому требованию (4). Нам нужно, кроме того, установить равенство $\psi'(0) = 1$. Совершая упомянутое преобразование B на B' через круг, найдем $f(z) = \psi(\zeta)$. Продифференцировав это равенство по z и положив $z = 0$, найдем $f'(0) = \psi'(0)\,\varphi'(0)$, откуда и вытекает наше утверждение. Но, как мы только что видели, при таком преобразовании площадь круга может только увеличиться, и потому площадь B' всегда больше, нежели площадь круга. Поэтому искомая функция дает минимум интегралу

$$I = \iint\limits_{B} f'(z)\,\overline{f'(z)}\,dx\,dy, \tag{5}$$

выражающему площадь преобразованной области, по сравнению со всеми другими функциями, которые удовлетворяют требованиям (4).

Функцию, дающую требуемое конформное преобразование, можно искать, следовательно, как решение следующей вариационной задачи:

Среди функций, регулярных в области B и подчиненных условиям (4), *найти ту, которая дает минимум интегралу* (5).

В существовании и единственности решения поставленной экстремальной проблемы нас убеждает теорема Римана. Само собой разумеется, мы можем искать не непосредственно $f(z)$, а $f'(z)$, так как под знак интеграла $f(z)$ не входит, и по найденной $f'(z)$ восстановить $f(z)$.

2. Приложение метода Ритца. Формулированное только что свойство функции, преобразующей область на круг, позволяет применить к ее разысканию любой из многих приближенных методов решения вариационных задач. В названном нами выше мемуаре по этому вопросу Бибербах указывает на метод Ритца в частной его форме, разыскивая приближенно решение задачи в виде полинома. Мы не будем ограничивать себя с самого начала таким классом областей, для которых полиномы являются достаточными для приближенного представления искомой функции с любой степенью точности, ибо в практических задачах могут встретиться области, для которых

полиномы являются явно недостаточными. О такого рода областях мы будем иметь случай говорить ниже. С другой стороны, может оказаться, что вычисления с полиномами не всегда удобны, или, наконец, заданная область будет неограниченной и тогда апроксимация функции, ее преобразующей, при помощи полиномов становится невозможной, если следовать тому способу вычисления, который мы указываем здесь, так как интегралы, которые придется вычислять, тогда будут расходящимися. В последнем случае, естественно, разумеется, прибегнуть к иного рода функциям, нежели полиномы; выбор их, конечно, будет связан с видом области, если мы хотим добиться наибольшей простоты вычислений.

Возьмем поэтому произвольную систему линейно-независимых функций $u_0(z)$, $u_1(z), \ldots,$[1]) регулярных в области B и таких, что для них интегралы $\iint\limits_B \overline{u_i(z)}\, u_i(z)\, dx\, dy$ остаются конечными. Допустим, кроме того, что одна из них, например $u_0(z)$, отлична от нуля в точке $z=0$. Составим далее, как обычно, линейную комбинацию:

$$\varphi_n(z) = c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \ldots + c_n u_n(z), \tag{6}$$

где коэффициенты c_k есть некоторые комплексные числа $c_k = \gamma_k + i\delta_k$, и подчиним ее требованию

$$c_0 u_0(0) + c_1 u_1(0) + \ldots + c_n u_n(0) = 1, \tag{7}$$

удовлетворить которому при нашем предположении $u_0(0) \neq 0$ всегда можно, и внесем $\varphi_n(z)$ под знак интеграла (5) вместо $f'(z)$. После выполнения всех необходимых квадратур мы получим интеграл как функцию величин $\gamma_0, \ldots, \gamma_n, \delta_0, \ldots, \delta_n$:

$$I(\varphi_n) = \iint\limits_B \varphi_n \overline{\varphi}_n\, dx\, dy.$$

Численное значение его будет равно той площади, которую имеет изображение области B.

Выберем теперь числа c_k так, чтобы это значение было наименьшим по сравнению со значениями того же интеграла для всякой иной линейной комбинации ψ_n из функций $u_0(z), \ldots, u_n(z)$, значение которой в точке $z=0$ равно единице. Представим ее в виде:

$$\psi_n(z) = \varphi_n(z) + \varepsilon\eta_n(z),$$

где $\eta_n(z)$ есть линейная комбинация из $u_i(z)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ и ε — некоторое комплексное число. Чтобы при всяких ε было

[1]) Линейная независимость системы нами понимается здесь обычно: какое бы конечное число функций $u_0(z)$, $u_1(z), \ldots$ системы мы ни взяли, они оказываются линейно независимыми.

$\psi_n(0)=1$, нужно, очевидно, чтобы $\eta_n(z)$ равнялось нулю в точке $z=0$.

Значение интеграла, вычисленного для ψ_n, будет:

$$I(\psi_n)=\int_B\int \varphi_n\overline{\varphi_n}\,dx\,dy+\bar{\varepsilon}\int_B\int \varphi_n\overline{\eta_n}\,dx\,dy+$$
$$+\varepsilon\int_B\int \overline{\varphi_n}\eta_n\,dx\,dy+\varepsilon\bar{\varepsilon}\int_B\int \eta_n\overline{\eta_n}\,dx\,dy.$$

Знак разницы между ним и $I(\varphi_n)$ при малых ε будет зависеть от членов, содержащих линейно ε и $\bar{\varepsilon}$, ибо последний член будет величиной второго порядка малости, и чтобы $I(\psi_n)-I(\varphi_n)$ была не меньше нуля, нужно, чтобы

$$\int_B\int \varphi_n\overline{\eta_n}\,dx\,dy=0,\quad \int_B\int \overline{\varphi_n}\eta_n\,dx\,dy=0 \tag{8}$$

при всякой линейной комбинации η_n, удовлетворяющей условию $\eta_n(0)=0$. В противном случае выбором ε всегда можно распорядиться так, чтобы было $I(\psi_n)<I(\varphi_n)$, что противоречило бы минимальным свойствам $\varphi_n(z)$.

Одно из написанных выше равенств (8) является следствием другого, ибо в левых частях стоят сопряженные комплексные величины и мы можем по произволу пользоваться любым из них.

Наоборот, если $\varphi_n(z)$ удовлетворяет условию ортогональности (8) относительно всякой линейной комбинации $\eta_n(z)$ при $\eta_n(0)=0$, то $\varphi_n(z)$ даст интегралу $I(\varphi)$ минимальное значение по сравнению со всеми комбинациями $\psi_n(z)$ из того же числа функций $u_k(z)$, удовлетворяющих требованию $\psi_n(0)=1$, ибо тогда

$$I(\psi_n)-I(\varphi_n)=\varepsilon\bar{\varepsilon}\int_B\int \eta_n\overline{\eta_n}\,dx\,dy.$$ [1]

Соблюдение равенств (8) есть необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $\varphi_n(z)$. Мы перепишем их в несколько иной эквивалентной форме, выбрав $\eta_n(z)$ частным образом. Очевидно, каждая из следующих функций:

$$v_1(z)=u_1(z)-\frac{u_1(0)}{u_0(0)}u_0(z),\ \ldots,\ v_n(z)=u_n(z)-\frac{u_n(0)}{u_0(0)}u_0(z),\ \ldots \tag{9}$$

---

[1]) Отсюда же видно, что $\varphi_n(z)$ будет единственна, если она существует, так как интеграл в правой части равенства может быть равен нулю лишь только в том случае, когда $\eta_n=0$, т. е. $\psi_n=\varphi_n$. Что касается самого существования φ_n, то в нем можно убедиться на основании следующего простого замечания. Как видно из строения $I(\varphi_n)$, это — определенная положительная квадратичная форма от вещественных γ_k и мнимых δ_k частей коэффициентов c_k, и мы имеем здесь задачу о минимуме положительной квадратичной формы при линейной связи; но такая задача, как известно, всегда имеет решение.

удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на $\eta_n(z)$, и потому из (8) вытекают такие равенства:

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_{kj}c_j=0, \text{ где } \alpha_{kj}=\iint\limits_B u_j\overline{v_k}\,dx\,dy \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{10}$$

Если присоединить еще условия:

$$\sum_{k=0}^{n}u_k(0)\,c_k=1,$$

мы получим систему $n+1$ уравнений, из которой и должны быть найдены числа $c_0, \ldots, c_n$. Относительно возможности ее решения мы отсылаем читателя к сноске на стр. 387.

При приближенном разыскании функции, дающей конформное преобразование по изложенному здесь способу, существенную роль играют с вычислительной точки зрения следующие два обстоятельства. Во-первых, нахождение интегралов $\iint\limits_B u_j\overline{v_k}\,dx\,dy$, являющихся коэффициентами при c_j в уравнениях системы (10), и, во-вторых, решение самой этой системы. И то и другое при мало-мальски сложной форме области B и большом n представляет нелегкую задачу, и потому важно бывает воспользоваться оставшимся у вычислителя произволом, чтобы заранее внести все возможные упрощения.

Неопределенной осталась еще система функций $u_k(z)$. Кроме линейной независимости их и, как мы увидим ниже, известного требования полноты, они не подвергнуты никакому ограничению.

Нахождение написанных выше интегралов сразу же упростится, если заранее выбрать $u_k(z)$ так, чтобы все они, за исключением первой, обращались в нуль в точке $z=0$, первая же приводилась там к единице: $u_0(0)=1$. Тогда прежде всего $v_k(z)=u_k(z)$, затем интеграл $\iint\limits_B u_j\overline{v_k}dxdy$ привелся бы к $\iint\limits_B u_j\overline{u_k}dx\,dy$, наконец, уравнение связи $\sum\limits_{k=0}^{n}c_k u_k(0)=1$ выродилось бы в $c_0=1$, и число неизвестных сразу же понизилось бы на единицу.

Далее, если система функций $u_0(z)$, $u_1(z), \ldots$ ортогональна в области B в том смысле, что

$$\iint\limits_B u_j\overline{u_k}dx\,dy=0 \quad \text{при} \quad k\neq j,$$

то

$$\iint\limits_B u_j\overline{v_k}dx\,dy=0 \quad \text{для} \quad j\neq 0 \text{ и } k\neq j,$$

тогда как

$$\iint_B u_0 \overline{v_k}\, dx\, dy = -\frac{\overline{u_k(0)}}{\overline{u_0(0)}} \iint_B u_0 \overline{u_0}\, dx\, dy$$

и

$$\iint_B u_k \overline{v_k}\, dx dy = \iint_B u_k \overline{u_k}\, dx\, dy.$$

Уравнения системы значительно упростятся, приняв следующий вид:

$$c_k \iint_B u_k \overline{u_k}\, dx\, dy - c_0 \frac{\overline{u_k(0)}}{\overline{u_0(0)}} \iint_B u_0 \overline{u_0}\, dx\, dy = 0.$$

Поэтому выгодно бывает исходить из ортогональной системы, если она известна, либо приводить в некоторых случаях взятую систему функций $u_k(z)$ к ортогональной путем известного процесса ее ортогонализации. Об этом подробнее мы будем говорить при изложении применения ортогональных в смысле Бохнера полиномов к конформному преобразованию.

3. Минимизация при помощи полиномов. Остановимся более подробно на наиболее употребительной последовательности функций $u_n(z)$ — степенях z:

$$u_0(z) = 1, \quad u_1(z) = z, \; \ldots, \quad u_n(z) = z^n, \; \ldots, \tag{11}$$

$$\varphi_n(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n. \tag{12}$$

Система (10) для определения коэффициентов c_k здесь имеет форму:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{10} + \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \ldots + \alpha_{1n}c_n = 0, \\ &\alpha_{20} + \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \ldots + \alpha_{2n}c_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{n0} + \alpha_{n1}c_1 + \alpha_{n2}c_2 + \ldots + \alpha_{nn}c_n = 0, \\ &\alpha_{kj} = \iint_B \overline{z}^k z^j\, dx\, dy, \qquad \alpha_{kj} = \overline{\alpha_{jk}}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Точное вычисление коэффициентов α_{kj} даже для сравнительно простых случаев представляет значительные затруднения. Можно указать, однако, достаточно широкий класс областей, когда приближенное вычисление этих коэффициентов не представляет труда и может быть проведено по широко известным методам гармонического анализа.

Допустим, что область B звездообразна, т. е. контур ее пересекается каждым лучом, проведенным из начала, только в одной точке. Пусть уравнение контура будет $r = r(\varphi)$.

Преобразуем интеграл α_{kj} к полярным координатам, положив $z=re^{i\varphi}$:

$$\alpha_{kj}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r(\varphi)} r^{j+k}e^{i(j-k)\varphi}r\,dr\,d\varphi=\frac{1}{k+j+2}\int\limits_0^{2\pi} r^{k+j+2}(\varphi)\,e^{i(j-k)\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{k+j+2}\int\limits_0^{2\pi} r^{k+j+2}(\varphi)\cos(j-k)\varphi\,d\varphi+$$

$$+\frac{i}{k+j+2}\int\limits_0^{2\pi} r^{k+j+2}(\varphi)\sin(j-k)\varphi\,d\varphi. \qquad (14)$$

Отсюда видно, что вещественная и мнимая части α_{kj} будут отличаться от коэффициентов Фурье разложения $r^{k+j+2}(\varphi)$ только лишь множителем $\frac{\pi}{k+j+2}$ и поэтому вычисление их может быть проведено обычными методами.

4. О сходимости последовательных приближений. Полнота системы координатных функций. Мы пытались построить функцию $f(z)$, дающую преобразование области B на круг путем минимизации интеграла $I(\varphi)=\iint\limits_B \varphi\bar{\varphi}\,dx\,dy$ при условии $\varphi(0)=1$, строя последовательные приближения к искомой функции по методу Ритца. Для наших последующих рассуждений безразличен способ построения приближений. Пусть тем или иным путем нам удалось построить так называемую „минимизирующую последовательность“ приближений $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$, т. е. такую, что соответствующие этим функциям значения интеграла I: $I(\varphi_1)$, $I(\varphi_2), \ldots$ сходятся к наименьшему значению $I(\varphi)$:

$$\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n)=I(\varphi).$$

Покажем сейчас, что из факта сходимости значений интеграла к минимуму вытекает сходимость минимизирующий последовательности к функции, совершающей требуемое преобразование. Из последующих рассуждений, кроме того, будет видно, что сходимость будет равномерной во всякой внутренней части области B.

Нам предварительно потребуется изучение некоторых свойств функции $\varphi(z)$.

Рассмотрим следующую допустимую в нашей вариационной задаче функцию:

$$\Phi(z)=\varphi(z)+\varepsilon\omega(z), \quad \omega(0)=0,$$

где ε — произвольный параметр.

Важно отметить, что в такой форме может быть представлена любая допустимая функция $\psi(z)$, ибо в предыдущем равенстве для этого достаточно положить $\varepsilon = 1$ и $\omega(z) = \psi(z) - \varphi(z)$.

Имеем:

$$I(\Phi) - I(\varphi) = \iint\limits_B (\varphi + \varepsilon\omega)\overline{(\varphi + \varepsilon\omega)}\, dx\, dy - \iint\limits_B \varphi\bar{\varphi}\, dx\, dy =$$

$$= \bar{\varepsilon} \iint\limits_B \bar{\varphi}\omega\, dx\, dy + \varepsilon \iint\limits_B \bar{\varphi}\omega\, dx\, dy + \varepsilon\bar{\varepsilon} \iint\limits_B \omega\bar{\omega}\, dx\, dy.$$

Путем рассуждений, совершенно схожих с теми, при помощи которых были выведены равенства (8), отсюда приходим к заключению, что интегралы, стоящие множителями при ε и $\bar{\varepsilon}$, должны равняться нулю.

Таким образом, функция $\varphi(z)$, решающая вариационную задачу, обладает тем свойством, что при всяких $\omega(z)$, регулярных в области B и обращающихся в нуль при $z = 0$, интеграл

$$\iint\limits_B \varphi(z)\overline{\omega(z)}\, dx\, dy = 0.$$

Если $\varphi(z)$ удовлетворяет этому равенству, то в выражении разности $I(\Phi) - I(\varphi)$ сохранится лишь третий член. Внеся вместо $\varepsilon\omega(z)$ его значение $\Phi - \varphi$, получим следующее соотношение:

$$I(\Phi) - I(\varphi) = \iint\limits_B (\Phi - \varphi)\overline{(\Phi - \varphi)}\, dx\, dy.$$

Докажем утверждение:

Всякая минимизирующая последовательность $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$ *сходится во всей области B к производной $\varphi(z)$ от функции $f(z)$, совершающей конформное преобразование этой области на круг; сходимость будет равномерной в любой внутренней части области B.*

В самом деле, возьмем любую внутреннюю часть B' области B. Выберем положительное число η, меньшее, чем расстояние от точек B' до контура L области B. Окружность, описанная радиусом η около любой точки области B', лежит целиком внутри B.

Пусть теперь z — любая точка из B'. Опишем около нее окружность радиуса η и обозначим ее через C_η. по теореме Коши

$$[\varphi_n(z) - \varphi(z)]^2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{[\varphi_n(t) - \varphi(t)]^2}{t - z}\, dt.$$

Оценим интеграл. На окружности C_η переменная интегрирования будет $t = z + \eta e^{i\vartheta}$, следовательно,

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 d\vartheta.$$

Умножив обе части на $r\,dr$ и проинтегрировав в пределах от 0 до η, получим:

$$|\varphi_n(z)-\varphi(z)|^2\frac{\eta^2}{2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\eta}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi_n-\varphi)(\overline{\varphi}_n-\overline{\varphi})r\,dr\,d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_B(\varphi_n-\varphi)(\overline{\varphi}_n-\overline{\varphi})\;r\,dr\,d\vartheta.$$

Интеграл, взятый от квадрата модуля разности $\varphi_n-\varphi$ по всей области B, как нам известно, равен $I(\varphi_n)-I(\varphi)$. Поэтому имеем:

$$|\varphi_n(z)-\varphi(z)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\eta}\sqrt{I(\varphi_n)-I(\varphi)},$$

и так как $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, по предположению, есть минимизирующая последовательность, то $I(\varphi_n)\to I(\varphi)$ и, следовательно, $\varphi_n(z)$ будет равномерно сходиться к $\varphi(z)$.

Напомним, что $\varphi(z)$ есть производная от функции $f(z)$, преобразующей B на круг, так что

$$f(z)=\int\limits_0^z\varphi(z)\,dz.$$

Из факта равномерной сходимости $\varphi_n(z)$ к $\varphi(z)$ следует, разумеется, сходимость и приближений $f_n(z)=\int\limits_0^z\varphi_n(z)\,dz$ к искомой преобразующей функции $f(z)$, ибо

$$f_n(z)-f(z)=\int\limits_0^z[\varphi_n(z)-\varphi(z)]\,dz.$$

Не входя в подробности, выходящие за рамки книги, сделаем ряд замечаний о сходимости процесса последовательных приближений, построенных по Ритцу. Пусть, исходя из заранее избранной системы координатных функций $u_0(z)$, $u_1(z), \ldots$, мы построили последовательность функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$ Будут или не будут эти приближения образовывать минимизирующую последовательность, очевидно, зависит от того, какие функции $u_n(z)$ мы избрали и какова область B. Чтобы функции $\varphi_n(z)$ давали наверное минимизирующую последовательность, нужно, чтобы система функций $u_n(z)$ была достаточно полной для области B.

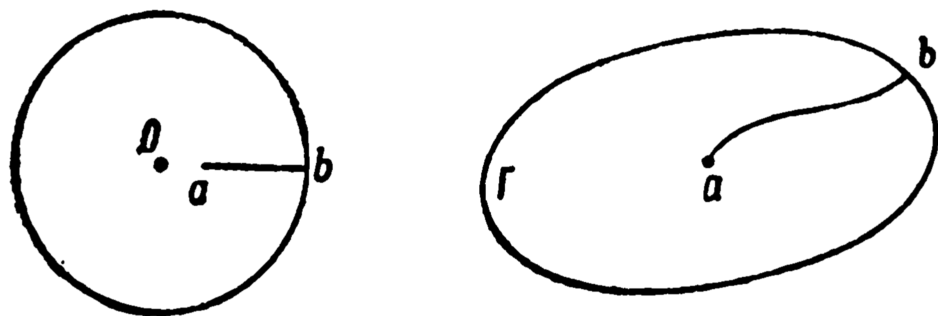


Рис. 29.

Приведем без доказательства наиболее важный и простой относящийся сюда результат. В своем уже цитированном мемуаре Бибербах показал, что для всякой области B, граница L которой будет одновременно границей и внешней области, целые положительные степени z: $1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots$ образуют полную систему функций. К такому классу областей будут принадлежать все области, ограниченные кривыми Жордана. Но если область B имеет входящие внутрь ее разрезы, как, например, изображенный на рис. 29 круг с входящим внутрь его разрезом вдоль радиуса, степени независимой переменной перестают давать полную систему функций. Причина этого весьма проста. Если бы за координатные функции мы избрали в этом случае не только степени z, но и любые однозначные в плоскости комплексной переменной функции, то входящие в область разрезы на величины интегралов $\iint\limits_B u_k \overline{u_j}\,dx\,dy$, которые участвуют в качестве коэффициентов в системе уравнений (10), не будут влиять, и поэтому все вычисления проходят так, как будто мы отображаем область без разрезов.

Мы остановились на случае входящих разрезов подробно по той причине, что этот случай представляет известный практический интерес. Поясним, чем должны быть здесь дополнены степени z, чтобы получить полную систему. Допустим, ради простоты, что граница L области B состоит из простой кривой Γ и одного разреза, идущего из точки a внутри кривой Γ в точку b, лежащую на этой кривой (рис. 29). Введем вместо переменной z новую переменную $w = \sqrt{a-z}$. На плоскости w изображением области B будет некоторая область Δ, ограниченная контуром без кратных точек; для нее степени w дают полную систему. Возвращаясь к прежней переменной z, мы видим, что полную систему для области B образуют степени переменной z и их произведения на корень $\sqrt{a-z}$.

5. Внешние области. Указанный выше метод может быть применен и к преобразованию внешности некоторой кривой на внутренность круга. В самом деле, пусть B — область, содержащая внутри себя бесконечно далекую точку. Рассмотрим функции, регулярные в ней и имеющие на бесконечности разложение вида:

$$t = f(z) = \frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \tag{15}$$

Они преобразуют B в некоторую область B', содержащую внутри себя начало координат, при этом нуль плоскости t будет соответствовать бесконечно далекой точке плоскости z. Среди этих функций будет заключаться и та, которая преобразует область B в круг с центром в начале координат. Обозначим ее через $\zeta = \varphi(z) = \frac{1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$, обратную ей — через $z = \psi(\zeta)$.

Площадь изображения B' области B будет равна интегралу

$$\iint\limits_B f'(z)\overline{f'(z)}\,dx\,dy. \tag{16}$$

Покажем, что эта площадь больше, чем площадь круга G, на который преобразуется B функцией $\varphi(z)$, т. е. $\varphi(z)$ обладает тем же экстремальным свойством, что и для конечных областей.

Рассмотрим для этой цели функцию $t=\Phi(\zeta)$, преобразующую G в B' и составленную следующим образом. Сначала при помощи $z=\psi(\zeta)$ преобразуем G в B и затем посредством $t=f(z)$ область B в B':

$$t=\Phi(\zeta)=f[\psi(\zeta)].$$

Очевидно, $\Phi(0)=0$. Легко можно установить, кроме того, что производная от $\Phi(\zeta)$ в начале координат равна единице. Действительно:

$$\Phi'(\zeta)=f'(z)\psi'(\zeta)=f'(z)\frac{1}{\varphi'(z)}=\frac{-\frac{1}{z^2}-\frac{2a^2}{z^3}-\dots}{-\frac{1}{z^2}-\frac{2b_2}{z^3}-\dots}=1+\frac{c_1}{z}+\dots$$

и при $z\to\infty$, что соответствует $\zeta\to 0$, $\Phi(\zeta)\to 1$.

Но если функция $\Phi(z)$, преобразующая G в B', имеет производную, равную единице при $\zeta=0$, то, по доказанному раньше, площадь B' должна быть больше площади круга.

Задача о разыскании $\varphi(z)$, таким образом, сводится к задаче о нахождении среди функции типа (15) той, которая дает минимум интегралу (16). Методы приближенного построения ее аналогичны методам, примененным в случае конечных областей, и мы на них останавливаться не будем.

§ 3. Свойство минимума длины контура при преобразовании области на круг

1. Экстремальное свойство преобразующей функции. Наряду с экстремальным свойством, характеризующим функцию, преобразующую конформно заданную область на круг, указанным в § 2, можно дать еще одну экстремальную характеристику этой функции, приводящую при практических приложениях к вычислениям, аналогичным тем, которые указаны в предыдущем параграфе.

Пусть круг радиуса R плоскости ζ преобразуется при помощи голоморфной в круге функции

$$z=f(\zeta),\quad f(0)=0,\quad f'(0)\neq 0,$$

на некоторую область B', природа которой нам сейчас безразлична.

Назовем контур ее L' и будем предполагать его спрямляемой кривой. Получим основную для нас зависимость между его длиной S' и значением $f'(0)$.

Применим к $f'(\zeta)$ формулу Коши

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{f'(t)}{t-\zeta}\, dt.$$[1])

Полагая здесь $\zeta = 0$ и имея в виду, что $t = Re^{\theta}$, найдем:

$$|f'(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|t|=R} |f'(t)|\,|dt| = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{L'} |dz|.$$

Но интеграл, стоящий справа, дает длину S' контура L' и потому

$$S' \geqslant 2\pi R\,|f'(0)|. \tag{1}$$

Знак равенства при этом может иметь место, как известно из теории функций комплексной переменной, только в том случае, когда $f'(\zeta) = \mathrm{const}$, т. е. когда преобразование будет линейным вида $z = \alpha\zeta$.

Допустим, что при преобразовании масштаб в начале координат не искажается, т. е. $|f'(0)| = 1$. Из неравенства (1) тогда следует, что длина L' во всяком случае не меньше длины $2\pi R$ окружности исходного круга и может ей равняться только в том случае, когда преобразование сводится к простому вращению круга около центра. Мы пришли, таким образом, к следующему основному для метода результату.

При преобразовании круга $|\zeta| < R$ с помощью регулярной функции

$$z = f(\zeta),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1,$$

длина контура отображаемой области увеличивается, если исключить тривиальный случай $f(\zeta) = \zeta$.

Рассмотрим теперь всевозможные конформные преобразования области B, совершаемые при помощи регулярных в B функций:

$$\zeta = f(z),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1. \tag{2}$$

Рассуждениями, совершенно подобными тем, которые мы проводили в n° 1 § 2, можно без затруднения установить, что *среди них функция, дающая конформное преобразование области B на круг,*

---

[1]) Под $f'(t)$ мы понимаем здесь предельное значение, к которому стремится $f'(\zeta)$, когда ζ приближается к точке t на окружности $|\zeta| = R$. Мы не будем выяснять возможность применения к $f'(\zeta)$ формулы Коши.

обладает тем свойством, что она дает наименьшее значение интегралу

$$I = \int_L |f'(z)|\,ds, \tag{3}$$

равному длине изображения контура L.

2. Применение метода Ритца. При вычислениях удобнее искать приближения не непосредственно к $f'(z)$, в виду линейности подынтегрального выражения относительно $|f'(z)|$, а к $\sqrt{f'(z)}$. Допустимыми к конкуренции будут все функции $\varphi(z)$, обращающиеся в единицу в начале координат. Среди них мы будем искать ту, которая дает наименьшее значение интегралу

$$I = \int_L |\varphi(z)|^2\,ds = \int_L \varphi(z)\overline{\varphi(z)}\,ds. \tag{4}$$

Если нам удастся разыскать решение нашей вариационной задачи, то функция, совершающая искомое преобразование, определится по формуле:

$$f(z) = \int_0^z \varphi^2(z)\,dz.$$

Рассуждения, связанные с применением метода Ритца к разысканию $\varphi(z)$, будут буквально те же, что и выше; достаточно слово в слово повторить все, что говорилось нами по этому поводу в n° 2 § 2, заменив, однако, все фигурирующие там двойные интегралы по области B на криволинейные интегралы по контуру L. Мы не будем их воспроизводить вторично и обратим внимание читателя только на те части изложения, которые представят известные расхождения с прежними.

Система уравнений (10) n° 2 § 2, из которой должны быть определены коэффициенты c_k линейной комбинации $\varphi_n(z)$, являющейся наилучшим приближением при закрепленном n к $\varphi(z)$, значительно упрощается, если исходить из ортогональной системы функций $u_k(z)$; но здесь ортогональность нужно понимать не по области B, как раньше, а по контуру L в смысле равенства:

$$\int_L u_k(z)\overline{u_j(z)}\,ds = 0 \quad \text{при } k \neq j. \tag{5}$$

Как конкретно осуществляется построение ортогональной системы при выборе за координатные функции $u_k(z)$ целых положительных степеней z и как полученные в результате ортогонализации полиномы применяются к конформному преобразованию, мы увидим позже, когда будем говорить об исследованиях Сеге. Примененный там аппарат определителей остается, разумеется при надлежащих видо-

изменениях, пригодным и для построения любой ортогональной системы функций.

Доказательство сходимости, которое мы приводили в n° 4 § 2, должно быть подвергнуто для излагаемого метода некоторым видоизменениям.

Пусть функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$ образуют минимизирующую последовательность, т. е. соответствующие им значения интеграла (4) сходятся к минимуму:

$$\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = I(\varphi).$$

Покажем, что тогда $\varphi_n(z)$ будут равномерно сходиться во всякой внутренней части области B к функции $\varphi(z)$, решающей задачу.

В самом деле, так же как и в n° 4 § 2, можно показать, что разность между значением интеграла $I(\Phi)$ для любой допустимой функции Φ и его минимальным значением $I(\varphi)$ имеет следующее выражение:

$$I(\Phi) - I(\varphi) = \int_L (\Phi - \varphi)(\bar{\Phi} - \bar{\varphi})\,ds.$$

Возьмем любую внутреннюю часть B' области B. Пусть z есть точка из B' и t — точка на контуре L. Разность $t - z$ по модулю будет не меньше некоторого η.

По формуле Коши имеем:

$$\varphi_n(z) - \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_n(t) - \varphi(t)}{t - z}\,dt,$$

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi\eta}\int_L |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\eta}\left(\int_L 1^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left[\int_L |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2\,ds\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{s}}{2\pi\eta}\sqrt{I(\varphi_n) - I(\varphi)}.$$

Так как, по предположению, $I(\varphi_n) \to I(\varphi)$, мы видим, что $\varphi_n(z)$ сходится к $\varphi(z)$ равномерно в области B'.

Таким образом, если взятая система координатных функций $u_k(z)$ достаточна полна в том смысле, что построенные при помощи ее последовательные приближения $\varphi_n(z)$ образуют минимизирующую последовательность, мы можем быть уверенными в том, что при достаточно большом n подойдем к $\varphi(z)$ внутри B как угодно близко.

Свойства, которыми должны обладать координатные функции для того, чтобы построенные по методу Ритца приближения образовали минимизирующую последовательность, будут зависеть от свойств контура L области B. Для подавляющего большинства практически

встречающихся контуров уже простейшие функции — целые степени z — образуют полную систему. Так, результаты исследований В. И. Смирнова [2] по теории ортогональных полиномов показали, что если L — простая кривая и логарифм модуля производной от функции, преобразующей единичный круг на область B, представим интегралом Пуассона, то полиномы образуют полную систему на контуре L. В частности, это имеет место для всех простых кусочно-гладких контуров.

Наконец, последнее замечание, касающееся вычислений для случая, когда за координатные функции взяты степени z:

$$\varphi_n(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n.$$

Коэффициенты c_k определяются из системы:

$$\alpha_{j0} + \alpha_{j1}c_1 + \alpha_{j2}c_2 + \ldots + \alpha_{jn}c_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\alpha_{jk} = \int_L \overline{z^j} z^k \, ds = \int_L r^{k+j} e^{i(k-j)\vartheta} \, ds =$$

$$= \int_L r^{k+j} \frac{ds}{d\vartheta} \cos(k-j)\, \vartheta d\vartheta + i \int_L r^{k+j} \frac{ds}{d\vartheta} \sin(k-j)\vartheta \, d\vartheta.$$

Вычисление коэффициентов системы приводит, следовательно, к определению коэффициентов Фурье для функций $r^{k+j} \dfrac{ds}{d\vartheta}$.

3. Преобразование внешних областей. Пусть B — односвязная область, содержащая внутри себя бесконечно далекую точку и ограниченная спрямляемым контуром L.

Рассмотрим функции $\zeta = f(z)$, голоморфные в B и имеющие вблизи бесконечно далекой точки разложение вида:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots \tag{6}$$

Прямым следствием результата, полученного нами в n° 1, является следующее утверждение.

Среди функций вида (6) будет содержаться функция, дающая конформное преобразование области B на круг плоскости ζ с центром в начале координат. От всех функций того же вида она будет отличаться тем, что дает минимальное значение интегралу

$$I = \int_L |f'(z)| \, ds.$$

Аналогичное свойство имеет место и в случае преобразования внешних областей друг в друга. В самом деле, пусть $z = f(\zeta)$ есть

функция, голоморфная вне круга $|\zeta| \leqslant R$ и имеющая разложение около бесконечно далекой точки вида:

$$f(\zeta) = c\zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \ldots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \ldots$$

Оценим длину S кривой, в которую преобразуется окружность $|\zeta| = R$ при помощи этой функции:

$$f'(\zeta) = c - \frac{c_1}{\zeta^2} - \frac{2c_2}{\zeta^3} - \ldots$$

Умножая это равенство на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta}$ и интегрируя по окружности $|\zeta| = R$, имеем:

$$c = f'(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta| = R} f'(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Отсюда путем оценки получаем:

$$|c| = |f'(\infty)| \leqslant \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta| = R} |f'(\zeta)||d\zeta| = \frac{S}{2\pi R}; \qquad S \geqslant 2\pi R|f'(\infty)|.$$

При этом знак равенства возможен только в случае, когда $f'(\zeta) = \text{const}$, т. е. когда преобразование будет линейным.

Если $f'(\infty) = 1$, $S \geqslant 2\pi R$. Таким образом, при такого рода преобразованиях длина изображения окружности будет больше длины самой окружности.

Тем же путем, что и прежде отсюда получаем следующую теорему.

Среди всех функций, голоморфных в B и имеющих вблизи бесконечно далекой точки разложение вида

$$\zeta = f(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots, \tag{7}$$

функция, доставляющая конформное преобразование области B на внешность окружности с центром в начале координат плоскости ζ, отличается тем, что дает минимальное значение интегралу

$$I = \int\limits_L |f'(z)|\,ds.$$

Мы ограничимся этими краткими указаниями на экстремальное свойство функции, доставляющей искомое конформное преобразование, ибо методы ее приближенного нахождения весьма сходны с теми, которые мы применяли для случая ограниченных областей, и читатель без труда сможет перенести их на разбираемый случай.

§ 4. Ортогональные полиномы и конформное преобразование

1. Полиномы, ортогональные на контуре. Ряд Тэйлора, являющийся универсальным орудием аналитического представления функций, голоморфных в некотором круге, становится, однако, совершенно недостаточным в случае, когда область не будет кругом, и поэтому возникает вопрос о создании аналитического аппарата, играющего такую же роль для заданной области, как и ряд Тэйлора в круге. Более точно — нужно указать такую последовательность функций, зависящую только от вида области, что всякую функцию, голоморфную в этой области, в частности и функцию $\zeta = \varphi(z)$, конформно преобразующую область B на круг $|\zeta| < R$, которая для нас сейчас представляет интерес, можно разложить в ряд по функциям последовательности. Само собой разумеется, к избираемым координатным функциям естественно предъявить условие их наибольшей простоты, требуя, например, чтобы за них были взяты некоторые специального вида полиномы или иного рода хорошо известные функции. В двадцатых годах текущего столетия Карлеманом [1], Сеге [1], Бохнером [1] и Бергманом [1] были сделаны две попытки построения такого аппарата.[1]) Они имеют тесное соприкосновение с задачей конформного преобразования, и мы их изложим лишь в той мере, в какой это нужно для приближенного практического осуществления таких преобразований.

Мы начнем наше изложение с полиномов, ортогональных на контуре. Пусть L — произвольная спрямляемая кривая длины l; нам нет пока необходимости предполагать ее замкнутой.

Построим систему полиномов:

$$P_0(z),\ P_1(z), \ldots,\ P_n(z), \ldots, \tag{1}$$

обладающих следующими свойствами:

1) $P_n(z)$ — полином степени n от z;

2) коэффициент при z^n в $P_n(z)$ положителен;

3) полиномы $P_n(z)$ — ортогональны и нормированы вдоль кривой L:

$$\frac{1}{l}\int_l P_m(z)\overline{P_n(z)}\,ds = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } n = m \end{cases} \tag{2}$$

Такие полиномы могут быть последовательно найдены по известному процессу ортогонализации Шмидта. Мы предпочтем дать сразу же готовое выражение для них в форме определителей, кото-

---

[1]) См. также В. И. Смирнов [2].

рые легко могут быть вычислены, ибо все переменные величины в них сосредоточены в одной строке.

Введем следующие обозначения:

$$h_{pq}=\frac{1}{l}\int\limits_{L} z^p\bar{z}^q \cdot ds. \tag{3}$$

Очевидно,

$$h_{pq}=\bar{h}_{qp}.$$

Составим определители D_n из чисел h_{pq} следующим способом:

$$D_0=1,\ D_n=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \ldots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \ldots & h_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{0n} & h_{1n} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

Они будут определителями следующих определенных положительных квадратичных форм Эрмита:

$$H_n(t)=\sum_{p,\ q=0}^{n} h_{pq}t_p\bar{t}_q=\frac{1}{l}\int\limits_{L}|t_0+t_1\zeta+\ldots+t_n\zeta^n|^2\,ds,$$

и поэтому все наверное будут вещественными положительными числами:

$$D_n>0.$$

Полином Сеге можно представить в следующем виде:

$$P_n(z)=\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \ldots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \ldots & h_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{0,\,n-1} & h_{1,\,n-1} & \ldots & h_{n,\,n-1} \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix} \tag{4}$$

Убедиться в этом наиболее просто можно проверкой того, что функции (4) удовлетворяют перечисленным выше трем требованиям, определяющим полиномы Сеге.

Вопрос о разложении произвольной функции в ряд по ортогональным полиномам Сеге исследовал при очень ограничительных предположениях о виде контура L и о характере граничных значений разлагаемой функции, требуя их аналитичности. Несколько позже В. И. Смирнов в уже указанной нами работе весьма обстоятельно исследовал этот вопрос и дал общие критерии сходимости такого

рода разложений. Для нас явится достаточным следующий результат, приводимый нами без доказательства.

Если L — кусочно-гладкая замкнутая простая кривая, функция $f(z)$ голоморфна внутри L, имеет почти везде предельные значения на L и представима через них при помощи интеграла Коши, то $f(z)$ можно разложить в ряд по ортогональным полиномам вида:

$$f(z) = A_0 P_0(z) + A_1 P_1(z) + \ldots + A_n P_n(z) + \ldots, \tag{5}$$

равномерно сходящийся всюду внутри L, коэффициенты A_n которого определяются по формулам:

$$A_n = \frac{1}{l} \int_L f(z) \overline{P_n(z)}\, ds. \tag{6}$$

2. Приложение к конформному преобразованию. В плоскости комплексной переменной z дана односвязная область B, ограниченная кусочно-гладким контуром L. Назовем $\zeta = \gamma(z)$ функцию, конформно преобразующую ее на круг с центром в начале координат, так что точка a из B переходит в центр круга: $\gamma(a) = 0$ и $\gamma'(a) = 1$.

По доказанному в § 3 $\sqrt{\gamma'(z)}$ дает минимум интегралу

$$I = \frac{1}{l} \int_L |f(z)|^2 ds \tag{7}$$

по сравнению со всякими функциями $f(z)$, регулярными в B и нормированными в точке a:

$$f(a) = 1.$$

Разложим $f(z)$ в ряд по ортогональным в смысле Сеге полиномам:

$$f(z) = t_0 P_0(z) + t_1 P_1(z) + \ldots + t_n P_n(z) + \ldots$$

При этом предполагается, что для $f(z)$ выполняются формулированные в п° 1 достаточные условия разложимости ее в ряд по $P_n(z)$. В частности, для функции $f(z) = \sqrt{\gamma'(z)}$ эти условия, при нашем предположении о кусочной гладкости L, наверное выполняются, и ряд для нее будет равномерно сходящимся в B.

Ввиду $f(a) = 1$, коэффициенты разложения должны удовлетворять условию

$$t_0 P_0(a) + t_1 P_1(a) + \ldots + t_n P_n(a) + \ldots = 1. \tag{8}$$

Подставив вместо $f(z)$ ее разложение под знак интеграла (7), получим:

$$\frac{1}{l} \int_L f(z) \overline{f(z)}\, ds = t_0 \bar{t}_0 + t_1 \bar{t}_1 + \ldots + t_n \bar{t}_n + \ldots \tag{9}$$

Система коэффициентов, отвечающая случаю $f(z)=\sqrt{\gamma'(z)}$, должна давать минимальное значение сумме (9) при условии (8). Обозначим эти коэффициенты через δ и положим $t_\nu=\delta_\nu+\varepsilon\eta_\nu$. Так как для δ_ν наверное соблюдено условие $\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu P_\nu(a)=1$, числа η_ν должны удовлетворять требованию

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu P_\nu(a)=0. \tag{10}$$

Подстановка вместо t_ν их значений в (9) дает

$$\frac{1}{l}\int_L f(z)\overline{f(z)}\,ds=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu\overline{\delta_\nu}+\varepsilon\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu\overline{\delta_\nu}+\overline{\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{\eta_\nu}\delta_\nu+\varepsilon\overline{\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu\overline{\eta_\nu}.$$

Чтобы написанное выражение при всяких ε было не меньше $\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu\overline{\delta_\nu}$, равной минимальному значению интеграла, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при ε и $\overline{\varepsilon}$ были равны нулю при любых η_ν, подчиненных равенству (10):

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu\overline{\delta_\nu}=0,\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{\eta_\nu}\delta_\nu=0.$$

Внесем в первое из этих равенств вместо η_0 его значение из (10):

$$\eta_0=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu P_\nu(a),\ \text{ибо}\ P_0(z)=1,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu[\overline{\delta_\nu}-\overline{\delta_0}P_\nu(a)]=0.$$

Ввиду произвола $\eta_1, \eta_2, \ldots$, это равенство может иметь место лишь в том случае, когда:

$$\overline{\delta_\nu}=\overline{\delta_0}P_\nu(a).$$

Далее, подставляя вместо δ_ν найденные значения в условие

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu P_\nu(a)=1,$$

имеем:

$$\delta_0\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(a)\overline{P_\nu(a)}=1.$$

Следовательно, если положить

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{P_\nu(a)}\, P_\nu(z) = K(a, z),$$

будем иметь:

$$\overline{\delta_0} = \delta_0 = \frac{1}{K(a, a)} = \frac{\overline{P_0(a)}}{K(a, a)},$$

$$\delta_\nu = \frac{\overline{P_\nu(a)}}{K(a,a)},$$

$$\sqrt{\gamma'(z)} = \frac{1}{K(a, a)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{P_\nu(a)}\, P_\nu(z) = \frac{K(a, z)}{K(a, a)},$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{K^2(a, a)} \int_a^z K^2(a, z)\, dz. \tag{11}$$

Это и есть искомое выражение для преобразующей функции $\gamma(z)$.

Отсюда легко получается приближенная формула. Если известны лишь n полиномов $P_\nu(z)$ и $K_n(a, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{P_\nu(a)}\, P_\nu(a)$, получим:

$$\gamma(z) \cong \frac{1}{K_n^2(a, a)} \int_a^z K_n^2(a, z)\, dz. \tag{12}$$

Можно просто вычислить радиус R круга, на который отражается область B. Длина окружности круга имеет следующее выражение:

$$2\pi R = \int_L |\gamma'(z)|\, ds = \frac{1}{K^2(a, a)} \int_L K(a, s)\, \overline{K(a, z)}\, ds =$$

$$= \frac{l}{K^2(a, a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{P_\nu(a)}\, P_\nu(a) = \frac{l}{K(a, a)},$$

откуда

$$R = \frac{l}{2\pi} \frac{1}{K(a, a)}.$$

Чтобы получить функцию $\gamma^*(z)$, дающую преобразование B на единичный круг, достаточно разделить $\gamma(z)$ на R:

$$\gamma^*(z) = \frac{2\pi}{l} \frac{1}{K(a, a)} \int_a^z K^2(a, z)\, dz. \tag{13}$$

Пример. Вычислим полиномы Сеге для квадрата

$$-1 \leqslant x \leqslant +1, \quad -1 \leqslant y \leqslant +1.$$

Числа $h_{p,q}$ здесь будут иметь следующие значения:

$$h_{p,q} = \frac{1}{l} \int_L z^p \bar{z}^q \, ds = \frac{1}{8} \left\{ \int_{-1}^{+1} (x+i)^p (x-i)^q \, dx + \int_{-1}^{+1} (x-i)^p (x+i)^q \, dx + \int_{-1}^{+1} (1+iy)^p (1-iy)^q \, dy + \int_{-1}^{+1} (-1+iy)^p (-1-iy)^q \, dy \right\} = \frac{1+i^{p-q}}{4} \operatorname{Re} \int_{-1}^{+1} (x+i)^p (x-i)^q \, dx.$$

Отсюда видно, что

$$h_{p,q} = \begin{cases} 0, & \text{когда } p-q \neq 4k, \\ \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^q \operatorname{Re}\left[(x+i)^{p-q}\right] dx, & \text{когда } p-q = 4k. \end{cases}$$

Производя подсчеты этих величин, будем иметь таблицу их значений:

1	0	0	0	$-\frac{4}{5}\ldots$
0	$\frac{4}{3}$	0	0	$0\ldots$
0	0	$\frac{28}{15}$	0	$0\ldots$
0	0	0	$\frac{96}{35}$	$0\ldots$
$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$\frac{1328}{315}\ldots$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Исходя отсюда, по формуле (4) вычисляем полиномы Сеге для нашего квадрата:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{7}} z^2,$$

$$P_3(z) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{6}} z^3, \quad P_4 = \frac{15}{16} \sqrt{\frac{7}{22}} \left(z^4 + \frac{4}{5}\right), \ldots$$

Найдем приближенно функцию $\zeta = \gamma(z)$, преобразующую прямоугольник на круг так, чтобы $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = 1$. Точное ее выражение дает равенство (11),

если в нем положить $a=0$. Мы определим приближенно $\gamma(z)$, сохраняя в $K(0,\ z)$ лишь пять первых членов:

$$K(0,\ z)=\sum_{\nu=0}^{1} P_\nu(0)\, P_\nu(z)=1+\frac{315}{1408}\left(z^4+\frac{4}{5}\right),\qquad K(0,0)=\frac{415}{352},$$

$$\gamma(z)=z+\frac{63}{830}z^5+\frac{441}{110224}z^9.$$

Сравним полученное нами приближенное значение $\gamma(z)$ с известным точным ее разложением в ряд. Для этого рассмотрим не самую функцию $\zeta=\gamma(z)$, а ей обратную $z=\varphi(\zeta)$. Она будет давать преобразование круга некоторого радиуса $R: |\zeta|<R$ на наш квадрат, при этом так, что

$$\varphi(0)=0,\qquad \varphi'(0)=1.$$

Известно выражение функции $z=\varphi(\zeta)$ через эллиптический интеграл лемнискатного типа: [1])

$$z=\int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{1+\alpha^4 t^4}}=\zeta-\frac{\alpha^4}{10}\zeta^5+\frac{\alpha^8}{24}\zeta^9-\ldots,$$

где

$$\alpha=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=0{,}926.$$

Обращая эту функцию, мы и найдем нужное нам точное выражение $\gamma(z)$:

$$\zeta=\gamma(z)=z+\frac{\alpha^4}{10}z^5+\frac{\alpha^8}{120}z^9+\ldots$$

Точное значение для коэффициента при z^5 есть

$$\frac{\alpha^4}{10}=0{,}074,$$

приближенное же значение, найденное нами,

$$\frac{63}{830}=0{,}076$$

отличается от точного меньше, чем на 3%.

Построенный нами полином будет преобразовывать контур квадрата в некоторую кривую, не совпадающую с окружностью. Чтобы охарактеризовать близость этой кривой к окружности, мы вычислим значение модуля нашего полинома в средине стороны квадрата в точке $z=1$ и в вершине квадрата $z=1+i$:

$$|\gamma(1)|=1{,}078;\qquad |\gamma(1+i)|=1{,}089.$$

Точное значение радиуса окружности, на которую отображается наш квадрат, равно

$$R=1{,}080.$$

Найденные нами значения модуля $\gamma(z)$ отличаются от этого точного значения на 0,002 и 0,009, что составляет 0,2 и $0{,}9\%$ от значения радиуса.

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов [1], т. III, ч. 2, стр. 152.

3. Полиномы, ортогональные в области. Обратимся к теории ортогональных полиномов в области.

Пусть B — односвязная область плоскости комплексной переменной z, ограниченная кривой Жордана. Построим систему полиномов

$$\Pi_0(z), \Pi_1(z), \ \ldots, \ \Pi_n(z), \ \ldots,$$

удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $\Pi_n(z)$ есть полином степени n;

2) коэффициент при z^n в $\Pi_n(z)$ есть положительное число;

3) полиномы $\Pi_n(z)$ ортогональны и нормированы в области B:

$$\frac{1}{S}\iint\limits_B \Pi_m(z)\cdot\overline{\Pi_n(z)}\,dx\,dy=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n,\\ 1 & \text{при } m=n,\end{cases} \tag{14}$$

где S — площадь области B.

Как и полиномы Сеге, полиномы, ортогональные в области, могут быть представлены в форме определителей. Разница будет заключаться только в том, что в образовании их вместо интегралов по контуру будут участвовать интегралы по области.

Введем постоянные:

$$\gamma_{pq}=\frac{1}{S}\iint\limits_B z^p\overline{z^q}\,dx\,dy \tag{15}$$

и составим из них определители Δ_n, аналогичные D_n из n° 1:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}\gamma_{00} & \gamma_{10} & \cdots & \gamma_{n0}\\ \gamma_{01} & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{n1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{0n} & \gamma_{1n} & \cdots & \gamma_{nn}\end{vmatrix} \tag{16}$$

Полиномы $\Pi_n(z)$ имеют форму

$$\Pi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\cdot\Delta_n}}\begin{vmatrix}\gamma_{00} & \gamma_{10} & \cdots & \gamma_{n0}\\ \gamma_{01} & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{n1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{0,\,n-1} & \gamma_{1,\,n-1} & \cdots & \gamma_{n,\,n-1}\\ 1 & z & \cdots & z^n\end{vmatrix} \tag{17}$$

Можно показать, что построенные таким способом полиномы образуют для областей, ограниченных простыми кривыми Жордана, полную замкнутую систему и всякая функция $f(z)$, голоморфная в B, для которой интеграл

$$\iint\limits_B f(z)\overline{f(z)}\,dx\,dy$$

имеет конечное значение, разложима единственным способом в ряд по полиномам $\Pi_n(z)$:

$$f(z) = A_0\Pi_0(z) + A_1\Pi_1(z) + \ldots + A_n\Pi_n(z) + \ldots, \tag{18}$$

коэффициенты A_n которого определяются равенствами:

$$A_n = \frac{1}{S}\iint\limits_B f(z)\overline{\Pi_n(z)}\,dx\,dy. \tag{19}$$

4. Приложение к конформному преобразованию. Из § 2 нам известно, что функция $\zeta = \gamma(z)$, доставляющая конформное преобразование области B на круг с центром в начале координат так, что точка a переходит в центр и $\gamma'(a) = 1$, дает минимальное значение интегралу

$$I = \iint\limits_B f'(z)\overline{f'(z)}\,dx\,dy$$

по отношению ко всяким функциям $f(z)$, голоморфным в B и удовлетворяющим условиям

$$f(a) = 0,\ f'(a) = 1.$$

Совершенно аналогично тому, как мы это делали в n° 2, можно установить, что $\gamma(z)$ выражается через полиномы $\Pi_n(z)$ следующим образом:

$$\gamma(z) = \frac{1}{\varkappa(a,a)}\int\limits_a^z \varkappa(a, z)\,dz, \tag{20}$$

где

$$\varkappa(a, z) = \overline{\Pi_0(a)}\,\Pi_0(z) + \overline{\Pi_1(a)}\,\Pi_1(z) + \ldots$$

Площадь круга, являющегося изображением области B, будет

$$\pi R^2 = \iint\limits_B \gamma'(z)\overline{\gamma'(z)}\,dx\,dy = \frac{S}{\varkappa^2(a,a)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{\Pi_\nu(a)}\,\Pi_\nu(a) = \frac{S}{\varkappa(a,a)},$$

следовательно,

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi\varkappa(a, a)}}.$$

Функция $\gamma^*(z)$, преобразующая область B на единичный круг, поэтому имеет вид:

$$\gamma^*(z) = \sqrt{\frac{\pi}{S\varkappa(a, a)}}\int\limits_a^z \varkappa(a, z)\,dz.$$

§ 5. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования области на круг[1])

1. Постановка задачи. Приведение к системе уравнений. Рассмотрим в плоскости z семейство простых замкнутых кривых, зависящее от одного вещественного параметра λ. Пусть параметрическое уравнение этого семейства есть

$$z = z(t, \lambda).$$

Каждому значению параметра λ отвечает некоторая кривая семейства. Будем считать, что все эти кривые содержат внутри себя начало координат $z=0$. Возьмем какое-нибудь значение параметра λ и соответствующую ему кривую L_λ. Рассмотрим функцию

$$\zeta = \varphi(z, \lambda), \tag{1}$$

совершающую конформное преобразование области B_λ, ограниченной этой кривой, на круг плоскости ζ с центром в начале координат.

Для определенности будем при этом считать, что $\varphi(z, \lambda)$ подчинена требованиям

$$\varphi(0, \lambda) = 0 \text{ и } \varphi'_z(0, \lambda) = 1. \tag{2}$$

Геометрический смысл этих условий очевиден. Преобразующая функция $\varphi(z, \lambda)$ будет зависеть, разумеется, от λ, так как от λ зависит граница L_λ области B_λ.

Если функция $z(t, \lambda)$, стоящая в правой части уравнения граничной кривой L_λ, есть аналитическая функция параметра λ в окрестности какого-либо значения λ, например вблизи $\lambda=0$, то можно, по крайней мере в некоторых случаях, ожидать, что преобразующая функция (1) будет также аналитической функцией от λ в окрестности $\lambda=0$.

В какой мере оправдывается это ожидание, мы увидим в следующем параграфе, где нами будут даны достаточные условия для аналитического характера зависимости преобразующей функции от λ.

---

[1]) Излагаемые в настоящем и следующем параграфах методы приближенного построения функции, выполняющей нужное конформное преобразование, по существу дела дают возможность выделения из такой функции ее главной части того или иного порядка точности путем разложения ее в ряд по степеням „малого“ параметра, входящего в уравнение границы области.

Академиком М. А. Лаврентьевым был указан способ построения главной части преобразующей функции, основанный не на разложении ее в ряд — по степеням параметра, а на результатах изучения зависимости ее от геометрических свойств области и интегральных представлениях аналитических функций. См. М. А. Лаврентьев [1].

Но если $\varphi(z, \lambda)$ при всяких z из B_λ есть аналитическая функция от λ вблизи $\lambda=0$, то ее можно разложить в степенной ряд по степеням λ:

$$\varphi(z, \lambda)=\varphi_0(z)+\lambda\varphi_1(z)+\lambda^2\varphi_2(z)+\ldots, \tag{3}$$

сходящийся при $|\lambda|$ достаточно малом. Построение функции $\varphi(z, \lambda)$ сводится поэтому к вычислению коэффициентов $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z), \ldots$ этого ряда

Ввиду условий (2), которые должны выполняться при всех значениях λ, эти коэффициенты должны будут удовлетворять следующим требованиям:

$$\varphi_n(0)=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$\varphi'_0(0)=1,\ \varphi'_n(0)=0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Первый из коэффициентов $\varphi_0(z)$ имеет очень простое значение. Он, очевидно, будет равен $\varphi(z, \lambda)$ при $\lambda=0$, и поэтому функция $\zeta=\varphi_0(z)$ должна давать конформное преобразование области B_0, ограниченной кривой L_0, на круг плоскости ζ.

Ниже, в n° 2, мы покажем, как по известному коэффициенту $\varphi_0(z)$ в некоторых частных случаях уравнения границы L_λ могут быть последовательно вычислены все дальнейшие коэффициенты $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$ ряда (3). Сейчас же мы встанем на несколько иную точку зрения и покажем, как разыскание преобразующей функции может быть сведено к решению системы уравнений.

Выясним идею этого сведения путем следующих нестрогих общих соображений. Рассмотрим бесконечную систему функций

$$u_1(z),\quad u_2(z), \ldots,$$

удовлетворяющих условиям

$$u_n(0)=0 \qquad (n=1,\ 2, \ldots),$$
$$u'_1(0)=1,\quad u'_n(0)=0 \qquad (n=2,\ 3, \ldots).$$

Мы будем считать, что $u_n(z)$, во-первых, регулярны в некоторой области D, содержащей в себе все B_λ при $|\lambda|$ достаточно малом и, во-вторых, что всякую функцию $f(z)$, регулярную в D, можно разложить в ряд по этим функциям $u_n(z)$. В частности, можно в такой ряд разложить и функцию $\varphi(z, \lambda)$, доставляющую искомое преобразование:

$$\varphi(z, \lambda)=u_1(z)+\alpha_2(\lambda)u_2(z)+\alpha_3(\lambda)u_3(z)+\ldots \tag{4}$$

Коэффициенты $\alpha_n(\lambda)$ этого разложения будут зависеть от параметра λ. К разысканию их и сводится задача построения $\varphi(z, \lambda)$. Можно указать бесконечную систему уравнений, которой они должны удовлетворять и из которой они должны быть найдены.

Предположим, что параметр t, определяющий положение точки z на границе L_λ, изменяется в пределах $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим любую функцию $f(z)$, подчиненную требованиям

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1$$

и регулярную в B_λ.

Если в нее вместо z внести его выражение через t для L_λ, мы получим предельные значения $f(z)$ на контуре области как функцию от параметра t. Функция $f[z(t, \lambda)]$ будет периодической функцией от t периода 2π. Разложим $|f[z(t, \lambda)]|^2$ в тригонометрический ряд по кратным дугам:

$$|f[z(t, \lambda)]|^2 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos nt + C'_n \sin nt).$$

Но если $f(z)$ совпадает с функцией $\varphi(z, \lambda)$, дающей преобразование B_λ на круг, то квадрат модуля ее граничных значений на L_λ будет величиной постоянной, так что в предыдущем равенстве должен будет сохраниться только один первый член C_0, который будет равен квадрату радиуса круга, а все остальные коэффициенты C_n и C'_n должны равняться нулю:

$$\left.\begin{array}{l} C_n = 0, \\ C'_n = 0. \end{array}\right\} (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Если составить C_n и C'_n для $\varphi(z, \lambda)$, используя ее выражение (4), то будет ясно, что C_n и C'_n будут некоторыми квадратичными функциями от $\alpha_j(\lambda)$, и предыдущие равенства дадут бесконечную систему квадратных уравнений, которой должны будут удовлетворять все $\alpha_j(\lambda)$.

В практических вычислениях приближенно представляют функцию $\varphi(z, \lambda)$ посредством суммы конечного числа членов ряда (4). Тогда получают не бесконечную систему для определения $\alpha_j(\lambda)$, о которой только что говорилось, а некоторую конечную систему.

Поступим так: составим линейную комбинацию из первых n функций $u_j(z)$:

$$U_n(z, \lambda) = u_1(z) + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j(\lambda) u_j(z)$$

и рассмотрим квадрат модуля $U_n(z, \lambda)$ на границе L_λ. Коэффициенты $C_n(\alpha_j)$ и $C'_n(\alpha_j)$ разложения его в тригонометрический ряд по t будут квадратичными функциями от $\alpha_j(\lambda)$. Выбором их мы не можем обратить в нуль все коэффициенты $C_n(\alpha_j)$, $C'_n(\alpha_j)$ $(n=1, 2, \ldots)$, как это должно быть при точном разыскании $\varphi_n(z, \lambda)$. Но, однако, мы их можем подобрать так, чтобы первые $n-1$ коэффициентов $C_k(\alpha_j)$ и $C'_k(\alpha_j)$ обратились в нуль.

Приравнивая нулю эти коэффициенты, мы получим систему $2n-2$ уравнений

$$C_k(\alpha_j)=0; \quad C'_k(\alpha_j)=0 \quad (k=1,2,\ldots, n-1)$$

для определения $n-1$ комплексных неизвестных $\alpha_j(\lambda)=\alpha'_j(\lambda)+i\alpha''_j(\lambda)$. Вид ее будет зависеть от того, какую систему функций $u_n(z)$ мы берем.

Чтобы иметь в виду что-либо определенное, мы рассмотрим наиболее удобный в практических приложениях случай, когда

$$u_1(z)=z, \quad u_2(z)=z^2,\ldots, \quad u_n(z)=z^n,\ldots$$

и $U_n(z,\lambda)$ есть полином:

$$U_n(z,\lambda)=P_n(z)=z+\alpha_2(\lambda)z^2+\ldots+\alpha_n(\lambda)z^n.$$

Мы будем дальше предполагать, что контур L области есть кривая, близкая к кругу, определенная уравнением

$$z(t)=e^{it}[1+\lambda F(e^{it},\lambda)], \tag{5}$$

где $F(\tau,\lambda)$ есть аналитическая функция своих аргументов, регулярная при $|\tau|$, близком к единице, и λ, близком к нулю. Мы можем разложить ее в ряд Лорана по $\tau=e^{it}$, коэффициенты $\tilde{\beta}_\nu$ которого будут аналитическими функциями от λ:

$$z(t)=e^{it}[1+\lambda\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\tilde{\beta}_\nu(\lambda)e^{it\nu}]. \tag{6}$$

Для упрощения обозначений ряд (6) мы ниже будем писать в форме

$$z(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\beta_\nu^{(1)}(\lambda)e^{it\nu}, \tag{7}$$

где положено

$$\lambda\tilde{\beta}_{\nu-1}(\lambda)=\beta_\nu^{(1)}(\lambda) \text{ при } \nu\neq 1 \text{ и } \beta_1^{(1)}(\lambda)=1+\lambda\tilde{\beta}_0(\lambda). \tag{7'}$$

Нам потребуются дальше еще степени $z(t)$. После возведения $z(t)$ в степень k мы получим ряд Лорана вида

$$z^k(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\beta_\nu^{(k)}(\lambda)e^{i\nu t},$$

коэффициенты которого легко могут быть выражены через $\beta_\nu^{(1)}(\lambda)$. Относительно них можно утверждать следующее: так как при $\lambda=0$, $z(t)=e^{it}$ и $z^k(t)=e^{itk}$, все $\beta_\nu^{(k)}(\lambda)$ обращаются в нуль при $\lambda=0$, если $\nu\neq k$, и $\beta_k^{(k)}(\lambda)$ обращается в единицу:

$$\beta_\nu^{(k)}(0)=0 \quad \text{при } \nu\neq k \text{ и } \beta_k^{(k)}(0)=1.$$

Рассмотрим теперь квадрат модуля полинома:

$$P_n(z)\overline{P_n(z)} = \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j \cdot z^k \overline{z}^j, \; \alpha_1 = 1.$$

Подставляя сюда вместо z его значение на контуре области B, получаем:

$$P_n(z)\overline{P_n(z)} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j \sum_{\substack{p,q=-\infty \\ p-q=\nu}}^{+\infty} \beta_p^{(k)}(\lambda) \overline{\beta}_q^{(j)}(\lambda) e^{i\nu t}.$$

В правой части равенства стоит тригонометрический ряд, коэффициенты которого зависят от α_k; приравняв в этом выражении свободный член ρ^2, получим приближенное равенство для определения радиуса круга, на который отображается наша область:

$$\rho^2 = \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \alpha_j \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p^{(k)} \overline{\beta}_p^{(j)}. \tag{8}$$

Числа $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выбираем так, чтобы коэффициенты при $e^{it}, e^{2it}, \ldots, e^{(n-1)it}$ обращались в нуль:

$$\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p^{(k)} \beta_{p-m}^{(j)} = 0 \quad (m = 1, \ldots n-1). \tag{9}$$

Коэффициенты при $e^{-it}, e^{-2it}, \ldots, e^{-(n-1)it}$, очевидно, также обратятся в нуль, ибо они являются величинами, сопряженными со взятыми нами коэффициентами.

Система (9) и есть нужная нам. Пусть нам удалось каким-либо путем найти из нее $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. По ним мы составим линейную комбинацию $U_n(z, \lambda)$ и приближенно положим

$$\varphi(z, \lambda) = U_n(z, \lambda) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n.$$

Можно ожидать, по крайней мере в частных случаях, что разница между $\varphi(z, \lambda)$ и $U_n(z, \lambda)$ с увеличением n будет стремиться к нулю.

Когда это будет, т. е. при каких условиях построенные нами приближения $U_n(z, \lambda)$ будут сходиться к $\varphi(z, \lambda)$ при $n \to \infty$, мы увидим в следующем параграфе. Сейчас же мы рассмотрим более подробно вычислительный процесс для частного случая областей, когда система (9) и вычисления, связанные с ее решением, значительно упрощаются.

Пусть контур области будет таким, что соответствующее ему уравнение имеет форму

$$z(t) = e^{it} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|} \delta_\nu^{(1)}(\lambda) e^{i\nu t} =$$

$$= e^{it} \left\{ \delta_0^{(1)}(\lambda) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \left[\delta_\nu^{(1)}(\lambda) e^{i\nu t} + \delta_{-\nu}^{(1)}(\lambda) e^{-i\nu t} \right] \right\}, \tag{10}$$

где $\delta_\nu^{(1)}(\lambda)$ — голоморфные функции от λ при $|\lambda|$, близком к нулю, и $\delta_0^{(1)}(0)=1$.

Ряд

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|}\delta_\nu^{(1)}(\lambda)\tau^\nu = 1+\lambda F(\tau, \lambda),$$

ввиду предположения, сделанного о функции $F(\tau, \lambda)$, входящей в уравнение (5) контура L_λ, будет сходиться при всех τ, достаточно близких по модулю к единице.

Несколькими строками ниже нам придется иметь дело со степенями $z(t)$. Мы проделаем необходимые нам вычисления сейчас. Рассмотрим квадрат написанного выше ряда $1+\lambda F(\tau, \lambda)$. Он будет аналитической функцией, регулярной по λ при $|\lambda|$, достаточно малом, и по τ при $|\tau|$, достаточно близком к 1. Разложение этой функции в степенной ряд может быть получено из ряда для $1+\lambda F(\tau, \lambda)$ с помощью обычного правила умножения степенных рядов. При этом коэффициенты при степенях τ в ряду будут регулярными функциями от λ вблизи точки $\lambda=0$.

Простые подсчеты показывают, что коэффициентом при τ^ν в разложении $[1+\lambda F(\tau, \lambda)]^2$ будет

$$\sum_{\substack{p,\, q=-\infty \\ p+q=\nu}}^{+\infty} \lambda^{|p|+|q|}\delta_p^{(1)}(\lambda)\,\delta_q^{(1)}(\lambda).$$

Так как $|p|+|q|\geqslant|p+q|=|\nu|$, все члены этой суммы будут иметь общий множитель $\lambda^{|\nu|}$ и сам коэффициент поэтому может быть представлен в форме $\lambda^{|\nu|}\delta_\nu^{(2)}(\lambda)$, где $\delta_\nu^{(2)}(\lambda)$ есть голоморфная функция от λ вблизи $\lambda=0$. Отсюда мы приходим к заключению, что $z^2(t)$ представимо в форме

$$z^2(t)=e^{2it}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|}\delta_\nu^{(2)}(\lambda)e^{i\nu t},$$

причем $\delta_\nu^{(2)}(\lambda)$ обладают указанным выше свойством регулярности, и ряд сходится при любых τ, по модулю близких к 1.

Если применить эти соображения несколько раз, найдем, что $z^k(t)$ представимо в форме

$$z^k(t)=e^{ikt}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|}\delta_\nu^{(k)}(\lambda)e^{i\nu t},$$

где $\delta_\nu^{(k)}(\lambda)$ — голоморфные функции от λ вблизи $\lambda=0$ и $\delta_0^{(k)}(0)=1$.

Посмотрим теперь, какой вид примет система (9) для контура типа (10). В этом случае

$$\beta_\nu^{(k)}(\lambda)=\lambda^{|\nu-k|}\delta_{\nu-k}^{(k)}(\lambda),$$

и, стало быть, уравнения системы (9) примут вид:

$$\sum_{k,\, j=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_j \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|p-k|} \lambda^{|p-m-j|} \delta_{p-k}^{(k)}(\lambda)\, \delta_{p-m-j}^{(j)}(\lambda) = 0$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n-1). \quad (9_1)$$

Рассмотрим свободный член этого уравнения, не зависящий от $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Он получается при $k=1$, $j=1$ и равен

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p^{(1)} \beta_{p-m}^{(1)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|p-1|+|p-m-1|} \delta_{p-1} \bar{\delta}_{p-m-1}^{(1)}.$$

Так как $|p-1|+|p-m-1|$ ни для каких p не меньше нежели m,[1]) свободный член будет, наверное, содержать множитель λ не ниже чем в степени m. Этот факт нам будет важен в последующих рассуждениях.

Члены уравнений (9_1), содержащие искомые коэффициенты линейно, получаются либо при $j=1$, либо при $k=1$. В первом случае мы получаем α_k с коэффициентом

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|p-k|+|p-m-1|} \delta_{p-k}^{(k)}(\lambda)\, \bar{\delta}_{p-m-1}^{(1)}(\lambda).$$

Выясним, в каком случае разложение в ряд по степеням λ написанного выражения будет иметь члены, свободные от λ.

Чтобы это было так, нужно, чтобы показатель степени $|p-k|+$ $+|p-m-1|$ у λ был равен нулю, откуда видно, что должно быть

$$k = p = m+1.$$

Соответствующее слагаемое в сумме будет равно

$$\delta_0^{(k)}(\lambda)\, \bar{\delta}_0^{(1)}(\lambda).$$

При $\lambda = 0$ оно обращается в единицу, так как $\delta_0^{(k)}(0) = 1$ при любых k.

Во втором случае, когда $k=1$, получаем $\bar{\alpha}_j$ с коэффициентом

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|p-1|+|p-m-j|} \delta_{p-1}^{(1)}(\lambda)\, \bar{\delta}_{p-m-j}^{(j)}(\lambda).$$

Так как

$$|p-1|+|m+j-p| \geqslant |p-1+m+j-p| = m+j-1 > 0,$$

ибо $m \geqslant 1$ и $j \geqslant 1$, все члены написанной суммы будут содержать множитель λ по меньшей мере в первой степени, и разложение в ряд

[1]) В самом деле, $|p-1|+|m-p+1| \geqslant |(p-1)+(m-p+1)| = |m| = m$.

по степеням λ этого коэффициента не будет содержать члена, свободного от λ.

Выделим в лѐвой части (9_1) слагаемое, соответствующее $k = m+1$, $j = 1$. Оно имеет вид:

$$\alpha_{m+1}[1 + \lambda Q_{n,\, m+1}(\lambda)],$$

где $Q_{n,\, m+1}(\lambda)$ есть некоторый степенной ряд от λ. Поэтому уравнение (9_1) можно переписать в форме:

$$\alpha_{m+1} = -\alpha_{m+1}\lambda Q_{n,\, m+1}(\lambda) - \\ - \sum_{k,j=1}^{n}{}' \alpha_k \alpha_j \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|p-k|+|p-m-j|} \delta_{p-k}^{(k)}(\lambda) \overline{\delta}_{p-m-j}^{(j)}(\lambda). \quad (11)$$

Знак $'$ у суммы $\sum\limits_{k,j=1}^{n}$ указывает на то, что в ней должно быть выпущено слагаемое $k = m+1$, $j = 1$.

К решению системы (11) с удобством может быть применен метод последовательных приближений. Приняв за исходные приближения $\alpha_2^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \ldots = \alpha_n^{(0)} = 0$, подставим их в правые части системы (11); они приведутся к свободным членам, о. которых говорилось выше. Найденные таким способом выражения принимаем за первые приближения $\alpha_2^{(1)}$. $\alpha_3^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}, \ldots$, подставляем их вновь в правые части, находим вторые приближения и т. д.

Само собой разумеется, при разыскании первых приближений мы можем все вычисления вести лишь с точностью до первой степени λ. При нахождении вторых приближений отбрасываем все степени λ выше второй и т. д. В результате мы получаем разложения коэффициентов $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ в ряды по степеням λ. Как мы уже говорили, свободный член уравнения (11) будет содержать множителем λ^m, и, стало быть, первое приближение для α_{m+1} будет содержать степени λ не ниже m.

Можно установить без особых затруднений, что тогда всякое приближение для α_{m+1} будет содержать степени λ не ниже чем m. Нам достаточно показать, что если это верно для s-го приближения, то оно будет верно и для следующего, так как оно справедливо для первого.

Рассмотрим для этого правую часть равенства (11) и подставим туда вместо α_k, $\overline{\alpha}_j$ s-е приближения к ним. Первый член правой части будет содержать, как видно из его строения, λ не ниже чем в степени $m+1$. Выясним низшую степень λ, входящую в члены суммы $\sum\limits_{k,j=1}^{n}{}'$ правой части. Произведение $\alpha_k\overline{\alpha}_j$ содержит, по предположению, λ множителем в степени не ниже чем $k+j-2$.

В общий член суммы $\sum_{k,j=1}^{n}{}'$ параметр λ войдет множителем по меньшей мере в степени $k+j-2+|p-k|+|p-m-j|=N$. Оценим теперь эту величину:

$$N=k+j-2+|p-k|+|m+j-p|\geqslant$$
$$\geqslant k+j-2+|(m+j-p)+(p-k)|\geqslant$$
$$\geqslant k+j-2+m+j-k=m+2(j-1)\geqslant m.$$

Таким образом, если в правую часть (11) вместо α_k подставить s-е приближения, то все члены будут содержать λ в степени не ниже m. Это и доказывает, что $(s+1)$-е приближение к α_{m+1} также будет в своем разложении по λ содержать степени λ не ниже m.

Дадим сейчас несколько примеров приближенного определения преобразующей функции по указанному здесь способу.

Пример. Найдем функцию, дающую конформное преобразование внутренности эллипса

$$x=(1+\lambda^2)\cos t;\quad y=(1-\lambda^2)\sin t$$

на круг.

Уравнение эллипса в комплексной форме

$$z=e^{it}(1+\lambda^2 e^{-2it})$$

будет как раз того типа, о котором мы только что говорили. Поставим перед собой задачу разыскать преобразующую функцию с точностью до десятых степеней λ. Согласно сказанному, последний коэффициент, который мы принимаем во внимание, будет α_{11}, так как все α_k с большими номерами будут содержать λ только в степенях, больших нежели десятая. Ввиду того, что эллипс имеет две оси симметрии, все α_k будут вещественными и α_k с четными номерами равны нулю:

$$P(z)=z+\alpha_3 z^3+\alpha_5 z^5+\alpha_7 z^7+\alpha_9 z^9+\alpha_{11} z^{11},$$
$$P(z)\,\overline{P(z)}=z\bar{z}+\alpha_3(z^3\bar{z}+\bar{z}^3 z)+[\alpha_5(z^5\bar{z}+\bar{z}^5 z)+\alpha_3^2 z^3\bar{z}^3]+$$
$$+[\alpha_7(z^7\bar{z}+\bar{z}^7 z)+\alpha_5\alpha_3(z^5\bar{z}^3+\bar{z}^5 z^3)]+$$
$$+[\alpha_9(z^9\bar{z}+\bar{z}^9 z)+\alpha_7\alpha_3(z^7\bar{z}^3+\bar{z}^7 z^3)+\alpha_5^2 z^5\bar{z}^5]+$$
$$+[\alpha_{11}(z^{11}\bar{z}+\bar{z}^{11}z)+\alpha_9\alpha_3(z^9\bar{z}^3+\bar{z}^9 z^3)+\alpha_7\alpha_5(z^7\bar{z}^5+\bar{z}^7 z^5)].$$

Будем теперь составлять комбинации $z^k\bar{z}^j+\bar{z}^k z^j$, входящие в квадрат модуля полинома. Коэффициент α_3 наверное содержит множителем λ^2, и поэтому мы при вычислении $z^3\bar{z}+\bar{z}^3 z$ можем принимать во внимание степени λ лишь до восьмой. В нашем случае z^3 будет содержать λ не выше чем в шестой степени:

$$z^3=e^{3it}+3\lambda^2 e^{it}+3\lambda^4 e^{-it}+\lambda^6 e^{-3it}.$$

Коэффициент α_5 содержит λ не ниже чем в четвертой степени, и поэтому мы в z^5 сохраняем степени λ только до шестой:

$$z^5=e^{5it}+5\lambda^2 e^{3it}+10\lambda^4 e^{it}+10\lambda^6 e^{-it};$$

при вычислении комбинации $\alpha_3^2 z^3 \bar{z}^3$ мы сохраняем в произведении $\bar{z}^3 z^3$ степени не выше шестой, ибо α_3^2 содержит множителем λ^4 и т. д.

Если принять во внимание все подобного рода упрощающие обстоятельства, мы для наших комбинаций получим следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= 1 + \lambda^4 + 2\lambda^2 \cos 2t, \\
z^3\bar{z} + \bar{z}^3 z &= 2\,[(\lambda^6 + \lambda^2)\cos 4t + (\lambda^8 + 6\lambda^4 + 1)\cos 2t + (3\lambda^6 + 3\lambda^2)], \\
z^5\bar{z} + \bar{z}^5 z &= 2\,[\lambda^2 \cos 6t + (5\lambda^4 + 1)\cos 4t + (20\lambda^6 + 5\lambda^2)\cos 2t + 10\lambda^4], \\
z^3\bar{z}^3 &= 2\left[\lambda^6 \cos 6t + 3\lambda^4 \cos 4t + (9\lambda^6 + 3\lambda^2)\cos 2t + \frac{1}{2}(9\lambda^4 + 1)\right], \\
z^7\bar{z} + \bar{z}^7 z &= 2\,[\lambda^2 \cos 8t + (7\lambda^4 + 1)\cos 6t + 7\lambda^2 \cos 4t + 21\lambda^4 \cos 2t], \\
z^5\bar{z}^3 + \bar{z}^5 z^3 &= 2\,[3\lambda^4 \cos 6t + 3\lambda^2 \cos 4t + (25\lambda^4 + 1)\cos 2t + 5\lambda^2], \\
z^9\bar{z} + \bar{z}^9 z &= 2\,[\lambda^2 \cos 10t + \cos 8t + 9\lambda^2 \cos 6t], \\
z^7\bar{z}^3 + \bar{z}^7 z^3 &= 2\,[3\lambda^2 \cos 6t + \cos 4t + 7\lambda^2 \cos 2t], \\
z^5\bar{z}^5 &= 2\left[5\lambda^2 \cos 2t + \frac{1}{2}\right], \\
z^{11}\bar{z} + \bar{z}^{11} z &= 2\cos 10t, \\
z^9\bar{z}^3 + \bar{z}^9 z^3 &= 2\cos 6t, \\
z^7\bar{z}^5 + \bar{z}^7 z^5 &= 2\cos 2t.
\end{aligned}
$$

Подставляя полученные выражения в $P(z)\,\overline{P(z)}$ и приравнивая свободный член квадрату радиуса круга ρ^2, а коэффициенты при различных косинусах нулю, получим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&1 + \lambda^4 + 2\alpha_3(3\lambda^6 + 3\lambda^2) + 2\alpha_5 10\lambda^4 + \alpha_3^2(9\lambda^4 + 1) + 2\alpha_3\alpha_5 5\lambda^2 + \alpha_5^2 = \rho^2, \\
&\lambda^2 + \alpha^3(1 + 6\lambda^4 + \lambda^8) + \alpha_3(5\lambda^2 + 20\lambda^6) + \alpha_3^2(3\lambda^2 + 9\lambda^6) + \\
&\qquad + \alpha_7 21\lambda^4 + \alpha_3\alpha_5(1 + 25\lambda^4) + \alpha_3\alpha_7 7\lambda^2 + \alpha_5^2 5\lambda^2 + \alpha_5\alpha_7 = 0, \\
&\alpha_3(\lambda^2 + \lambda^6) + \alpha_5(1 + 5\lambda^4) + \alpha_3^2 3\lambda^4 + \alpha_7 7\lambda^2 + \alpha_3\alpha_5 3\lambda^2 + \alpha_3\alpha_7 = 0, \\
&\alpha_5\lambda^2 + \alpha_3^2\lambda^6 + \alpha_7(1 + 7\lambda^4) + \alpha_3\alpha_5 3\lambda^4 + \alpha_9 9\lambda^2 + \alpha_3\alpha_7 3\lambda^2 + \alpha_3\alpha_9 = 0, \\
&\alpha_7\lambda^2 + \alpha_9 = 0, \\
&\alpha_9\lambda^2 + \alpha_{11} = 0.
\end{aligned}
$$

Перенося в уравнениях этой системы, начиная с второго, последовательно α_3, α_5... в другую часть равенства, получим:

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\,[\lambda^2 + \alpha_3(6\lambda^4 + \lambda^8) + \alpha_5(5\lambda^2 + 20\lambda^6) + \alpha_3^2(3\lambda^2 + 9\lambda^6) + \\
&\qquad + \alpha_7 21\lambda^4 + \alpha_3\alpha_5(1 + 25\lambda^4) + \alpha_3\alpha_7 7\lambda^2 + \alpha_5^2 5\lambda^2 + \alpha_5\alpha_7], \\
\alpha_5 &= -\,[\alpha_3(\lambda^2 + \lambda^6) + \alpha_5 5\lambda^4 + \alpha_3^2 3\lambda^4 + \alpha_7 7\lambda^2 + \alpha_3\alpha_5 3\lambda^2 + \alpha_3\alpha_7], \\
\alpha_7 &= -\,[\alpha_5\lambda^2 + \alpha_3^2\lambda^6 + \alpha_7 7\lambda^4 + \alpha_3\alpha_5 3\lambda^4 + \alpha_9 9\lambda^2 + \alpha_3\alpha_7 3\lambda^2 + \alpha_3\alpha_9], \\
\alpha_9 &= -\alpha_7\lambda^2, \\
\alpha_{11} &= -\alpha_9\lambda^2.
\end{aligned}
\right\} \quad (*)
$$

При решении этой системы, как и всегда, исходим из нулевого приближения; первое же приближение, поскольку система содержит только четные степени λ, вычисляем с точностью до λ^2, второе приближение с точностью до λ^4 и т. д. Результаты вычислений сведены нами в следующей таблице:

Коэффициент	Исходное значение	Приближения				
		первое	второе	третье	четвертое	пятое
α_3	0	$-\lambda^2$	$-\lambda^2$	$-\lambda^2-\lambda^6$	$-\lambda^2-\lambda^6$	$-\lambda^2-\lambda^6-4\lambda^{10}$
α_5	0	0	λ^4	λ^4	$\lambda^4+3\lambda^8$	$\lambda^4+3\lambda^8$
α_7	0	0	0	$-\lambda^6$	$-\lambda^6$	$-\lambda^6-5\lambda^{10}$
α_9	0	0	0	0	λ^8	λ^8
α_{11}	0	0	0	0	0	$-\lambda^{10}$

Таким образом, с точностью до λ^{10} мы имеем:

$$P(z)=z-(\lambda^2+\lambda^6+4\lambda^{10})z^3+(\lambda^4+3\lambda^8)z^5-(\lambda^6+5\lambda^{10})z^7+\lambda^8z^9-\lambda^{10}z^{11}.$$

Что же касается приближенного значения для ρ^2, то его мы получим, подставив в найденное нами раньше выражение для свободного члена $P(z)\overline{P(z)}$ вместо $\alpha_3, \alpha_5, \ldots$ их значения. Простые вычисления показывают, что

$$\rho^2=1-4\lambda^4+10\lambda^8.$$

Укажем на один способ проверки вычисления. Если в $P(z)$ вместо z подставить его значение для контура области и затем положить t равным какому-либо значению, например $t=0$, мы должны получить число, модуль которого с точностью до λ^{10} должен совпадать с ρ.

В нашем случае при $t=0$ имеем

$$z=1+\lambda^2$$

и

$$P(1+\lambda^2)=1-2\lambda^4+3\lambda^8,$$

что вполне совпадает с

$$\rho=(1-4\lambda^4+10\lambda^8)^{\frac{1}{2}}=1-2\lambda^4+3\lambda^8.$$

Если уравнение контура задано с численным значением параметра λ, то часто бывает проще решать систему уравнений для коэффициентов α_k прямо численным путем, не вводя буквенного параметра, избегая таким образом затруднений, связанных с алгебраическим характером выкладки при неопределенном параметре λ.

Поясним это на примере. Возвратимся к задаче об отображении эллипса, рассмотренного в предыдущем примере. Пусть дело идет об эллипсе с отношением полуосей 3:2:

$$x=\frac{6}{5}\cos t, \quad y=\frac{4}{5}\sin t.$$

Это случится при $\lambda^2 = \frac{1}{5}$. Подставляем значение λ в систему (*); она примет вид:

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= -[0{,}2 + 0{,}241\alpha_3 + 1{,}16\alpha_5 + 0{,}672\alpha_3^2 + 0{,}84\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_5 + 1{,}4\alpha_3\alpha_7 + \alpha_5^2 + \alpha_5\alpha_7],\\
\alpha_5 &= -[0{,}208\alpha_3 + 0{,}2\alpha_5 + 0{,}12\alpha_3^2 + 1{,}4\alpha_7 + 0{,}6\alpha_3\alpha_5 + \alpha_3\alpha_7],\\
\alpha_7 &= -[0{,}2\alpha_5 + 0{,}008\alpha_3^2 + 0{,}28\alpha_7 + 0{,}12\alpha_3\alpha_5 + 1{,}8\alpha_9 + 0{,}6\alpha_3\alpha_7 + \alpha_3\alpha_9],\\
\alpha_9 &= -0{,}2\alpha_7,\\
\alpha_{11} &= -0{,}2\alpha_9.
\end{aligned}$$

Отправляясь, как обычно, от $\alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 0$, применяем метод последовательных приближений. Получаем:

Коэффициент	Исходное значение	Приближения			
		первое	второе	третье	четвертое
α_3	0	−0,2	−0,179	−0,210	−0,198
α_5	0	0	0,037	0,030	0,046
α_7	0	0	0	−0,008	−0,010
α_9	0	0	0	0	0,002
α_{11}	0	0	0	0	0

$$P(z) = z - 0{,}198z^3 + 0{,}046z^5 - 0{,}010z^7 + 0{,}002z^9.$$

2. Метод последовательных приближений. При исследованиях настоящего параграфа мы будем предполагать, что контур области задан уравнением вида:

$$z = e^{it} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|} \delta_\nu(\lambda)\, e^{i\nu t} \tag{12}$$

где $\delta_\nu(\lambda)$ голоморфные функции от λ в окрестности $\lambda = 0$ и $\delta_0(0) = 1$. Допустим, что ряд $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|\nu|}\delta_\nu(\lambda)\,\zeta^\nu$ есть голоморфная функция от λ и ζ вблизи $\lambda = 0$ и $|\zeta| = 1$.

Функцию, совершающую конформное преобразование области на круг, будем искать в форме ряда

$$\zeta = P_1(z) + \lambda P_2(z) + \lambda^2 P_3(z) + \ldots + \lambda^n P_{n+1}(z) + \ldots, \tag{13}$$

где $P_n(z)$ регулярные функции от z, подлежащие определению. Мы будем считать, что начало координат плоскости z переходит в начало координат плоскости ζ. Соответственно этому должно быть $P_n(0) = 0$. Составим

$$\begin{aligned}
|\zeta|^2 = P_1(z)\overline{P_1(z)} + \lambda[P_2(z)\overline{P_1(z)} + \overline{P_2(z)}P_1(z)] + \ldots\\
\ldots + \lambda^n [P_{n+1}(z)\overline{P_1(z)} + P_n(z)\overline{P_2(z)} + \ldots + P_1(z)\overline{P_{n+1}(z)}] + \ldots
\end{aligned} \tag{14}$$

Если сюда вместо z подставить его значение (12) для контура области, мы должны будем для функции, совершающей искомое конформное преобразование, получить постоянную величину, равную квадрату радиуса того круга, на который отображается область.

Если степенной ряд (13) имеет по λ радиус сходимости, отличный от нуля, то результат подстановки будет, вообще говоря, голоморфной функцией от λ вблизи $\lambda = 0$, разложение которой в ряд Тэйлора по степеням λ мы получим, собирая в выражении (14) члены с одинаковыми степенями λ. Сумма этого ряда, как говорилось выше, должна сохранять постоянное значение, равное квадрату радиуса круга. Поэтому член его, свободный от λ, должен быть равен этой постоянной, а коэффициенты при всех степенях λ должны равняться нулю.

Будем считать, чтобы иметь в виду что-либо определенное, радиус круга равным единице. Приравнивая в выражении (14), куда вместо z внесено его значение (12), член, свободный от λ, единице, получим следующее равенство:

$$P_1(e^{it})\overline{P_1(e^{it})} = 1.$$

Функция $P_1(z)$ соответствует конформному преобразованию круга радиуса 1 с центром в начале координат, получающегося при $\lambda = 0$ из области, ограниченной контуром (12), на такой же круг плоскости ζ. Отбрасывая бесполезное вращение круга в плоскости ζ, положим

$$P_1(z) = z. \tag{15}$$

Приравняв теперь нулю коэффициент при первой степени λ в (14), будем иметь:

$$P_2(e^{it})\,e^{-it} + \overline{P_2(e^{it})}\,e^{it} + \left\{\frac{d}{d\lambda} z\bar{z}\right\}_{\lambda=0} = 0.$$

Из (13) видно, что

$$\left\{\frac{d}{d\lambda} z\bar{z}\right\}_{\lambda=0} = [\delta_1(0)\,e^{it} + \delta_0'(0) + \delta_{-1}(0)\,e^{-it}] + \\ + [\overline{\delta_1(0)}\,e^{-it} + \overline{\delta_0'(0)} + \overline{\delta_{-1}(0)}\,e^{it}] = -Q_1$$

есть линейный многочлен от e^{it} и e^{-it}:

$$2\mathrm{Re}\,[P_2(e^{it})\,e^{-it}] = Q_1.$$

Чтобы облегчить дальнейшую запись, условимся в следующих обозначениях и терминах: два тригонометрических ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt - b_n \sin nt),$$

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nt + a_n \sin nt)$$

будем называть сопряженными и обозначать это следующим образом:

$$\psi(t) = \widetilde{\varphi(t)}.$$

Задание одного из них, например $\varphi(t)$, определяет другой с точностью до постоянного слагаемого, в нашем примере b_0. Как уже отмечалось выше, все функции $P_n(z)$ должны обращаться в нуль при $z=0$. Поэтому $\frac{1}{z}P_2(z)$ должна быть голоморфной функцией. На границе же единичного круга, при $z=e^{it}$, удвоенная вещественная часть ее представляется тригонометрическим полиномом вида $Q_1 = a_0 + a_1\cos t - b_1 \sin t$. Перейдя к сопряженному полиному, мы найдем мнимую часть с точностью до постоянного слагаемого

$$2\mathrm{I}[P_2(e^{it})\, e^{-it}] = \widetilde{Q}_1, \quad P_2(e^{it})\, e^{-it} = \frac{1}{2}(Q_1 + i\widetilde{Q}_1). \tag{16}$$

Отсюда просто найдется функция $P_2(e^{it})$ в форме полинома второй степени от e^{it}. Мы будем предполагать, что при всяком λ направление вещественной оси в начало координат плоскости z переходит в направление вещественной оси в начале координат плоскости ζ. Коэффициенты при первой степени z в разложениях всех функций $P_n(z)$ должны быть вещественными. Поэтому постоянная, с точностью до которой найдется $\widetilde{Q}_1$ по известному Q_1, должна быть равна нулю.

Пусть, приравнивая нулю коэффициенты при $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ в выражении, которое мы получим после подстановки в (14) вместо z его значения (12), мы нашли $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$ в форме полиномов от z степеней не выше соответственно $1, 2, \ldots, n$ без свободных членов. Покажем сейчас, что при сравнении с нулем коэффициента при λ^n функция $P_{n+1}(z)$ определится как полином степени $n+1$ от z без свободного члена. Действительно, этот коэффициент имеет вид:

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{p=0}^{n}\lambda^p P_{p+1}(z)\sum_{q=0}^{n}\lambda^q\overline{P_{q+1}(z)}\right\}_{\lambda=0},$$

откуда следует, что

$$P_{n+1}(e^{it})\,e^{-it} + \overline{P_{n+1}(e^{it})}\,e^{it} = 2\,\mathrm{Re}\,[P_{n+1}(e^{it})\,e^{-it}] =$$
$$= -\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^p P_{p+1}(z)\cdot\sum_{q=0}^{n-1}\lambda^q\overline{P_{q+1}(z)}\right\}_{\lambda=0} = Q_n. \tag{17}$$

Определим старшие степени e^{it} и e^{-it}, входящие в правую часть. При вычислении ее мы должны будем взять n-ю производную по λ от выражений вида $\lambda^{p+q}z^k\bar{z}^l$, где

$$p,\ q \leqslant n-1; \quad 1 \leqslant k \leqslant p+1; \quad 1 \leqslant l \leqslant q+1,$$

и в результате дифференцирования положить $\lambda = 0$.

Перестроим ряд (12) по степеням λ. В результате мы получим ряд Тэйлора

$$z(t)=e^{it}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Pi_{\nu}^{(1)}(e^{it},\ e^{-it})\lambda^{\nu},$$

где $\Pi_{\nu}(e^{it},\ e^{-it})$ будет, очевидно, полиномом степени не выше ν от e^{it} и e^{-it}. Отсюда следует, что $z^k(t)=e^{ikt}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\Pi_{\nu}^{(k)}(e^{it},\ e^{-it})\lambda^{\nu}$, где $\Pi_{\nu}^{(k)}$ также полиномы от e^{it} и e^{-it} степени не выше ν. В силу этого

$$\lambda^{p+q}z^k\bar{z}^l=e^{i\,(k-l)t}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\nu}\Pi_m^{(k)}\overline{\Pi}_{\nu-m}^{(l}\lambda^{\nu+p+q};$$

коэффициентом при λ^n будет

$$e^{i\,(k-l)\,t}\sum_{m=0}^{n-p-q}\Pi_m^{(k)}\overline{\Pi}_{n-p-q-m}^{(l)}.$$

И так как произведение $\Pi_m^{(k)}\overline{\Pi}_{n-p-q-m}^{(l)}$ содержит e^{it}, e^{-it} в степени не выше чем $n-p-q$, что следует из строения этих функций, то и весь коэффициент будет содержать эти величины в степени не выше чем $k-l+n-p-q\leqslant p+1-1+n-p-q\leqslant n$.

Таким образом, Q_n должно быть тригонометрическим полиномом, содержащим дуги кратности не выше n.

Перейдя в равенстве (17) к сопряженным функциям и отбрасывая произвольную постоянную, входящую в состав $\widetilde{\widetilde{Q}}_n$, имеем:

$$2I\,[P_{n+1}(e^{it})\,e^{-it}]=\widetilde{\widetilde{Q}}_n,$$

откуда

$$P_{n+1}(e^{it})=\frac{e^{it}}{2}(Q_n+i\widetilde{\widetilde{Q}}_n). \tag{18}$$

$P_{n+1}(z)$ будет, следовательно, полиномом степени не выше чем $n+1$.

Вычисляя указанным путем последовательно $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., мы по ним можем построить ряд (13). Нам осталось определить, какими свойствами должна обладать правая часть уравнения (12) контура L_{λ} для того, чтобы построенный нами ряд (13) сходился, и оценить промежуток изменения λ, для которого можно гарантировать сходимость. Исследование этого вопроса мы сейчас оставим в стороне и отошлем читателя к n° 7 § 6, где этот вопрос исследуется.

Приведем пример такого расчета. Возьмем эллипс, рассмотренный нами в предыдущем номере:

$$z(t)=e^{it}(1+\lambda^2e^{-2it}).$$

Ввиду того, что в уравнение контура входит лишь λ^2, полагаем:

$$\zeta = z + \lambda^2 P_3(z) + \lambda^4 P_5(z) + \lambda^6 P_7(z) + \lambda^8 P_9(z) + \ldots,$$
$$\zeta\bar{\zeta} = z\bar{z} + \lambda^2 [P_3\bar{z} + \bar{P}_3 z] + \lambda^4 [P_5\bar{z} + P_3\bar{P}_3 + \bar{P}_5 z] + \ldots$$

Будем искать приближенно преобразующую функцию, ограничиваясь восьмой степенью λ. Сообразно с этим во всех вычислениях мы будем отбрасывать все степени λ выше восьмой. Так как на контуре

$$z\bar{z} = 1 + \lambda^4 + 2\lambda^2 \cos 2t,$$

сравнение с нулем коэффициента при λ^2 дает

$$P_3(e^{it})\, e^{-it} + \overline{P_3(e^{it})}\, e^{it} = -2 \cos 2t,$$

откуда

$$P_3(e^{it})\, e^{-it} = -e^{2it} \text{ и } P_3(z) = -z^3.$$

Будем искать $P_5(z)$. На контуре

$$z^3 = e^{3it}(1 + 3\lambda^2 e^{-2it} + 3\lambda^4 e^{-4it} + \lambda^6 e^{-6it}),$$

поэтому, если отбросить степени выше шестой,

$$P_3(z)\,\bar{z} + \overline{P_3(z)}\, z =$$
$$= -2\,[3\lambda^2 + 3\lambda^6 + (1 + 6\lambda^4) \cos 2t + (\lambda^2 + \lambda^6) \cos 4t].$$

При вычислении $P_3(z)\,\overline{P_3(z)}$ нам достаточно ограничиться лишь четвертой степенью λ, ибо результат мы должны будем умножить на λ^4. Аналогичное замечание имеет место для всех последующих вычислений, и мы не будем его повторять, отбрасывая просто лишние степени λ. Имеем:

$$P_3(z)\,\overline{P_3(z)} = 1 + 9\lambda^4 + 6\lambda^2 \cos 2t + 6\lambda^4 \cos 4t.$$

Собирая подобные члены и приравнивая нулю коэффициент при λ^4, получаем уравнение для нахождения $P_5(z)$;

$$P_5 e^{-it} + \bar{P}_5 e^{it} = 4 + 2 \cos 4t, \qquad P_5(z) = 2z + z_5.$$

Перейдем к $P_7(z)$. На границе области

$$z^5 = e^{5it}[1 + 5\lambda^2 e^{-2it} + 10\lambda^4 e^{-4it}],$$
$$P_5 e^{-it} + \bar{P}_5 e^{it} = 2\,[2 + 12\lambda^4 + 9\lambda^2 \cos 2t + (1 + 5\lambda^4) \cos 4t + \lambda^2 \cos 6t],$$
$$P_5\bar{P}_3 + \bar{P}_5 P_3 = -2\,[11\lambda^2 + 3 \cos 2t + 5\lambda^2 \cos 4t].$$

Собрав коэффициенты при λ^6 и приравняв результат нулю, имеем уравнение для P_7:

$$P_7 e^{-it} + \bar{P}_7 e^{it} = -6 \cos 2t - 2 \cos 6t,$$
$$P_7(z) = -(3z^3 + z^7).$$

Наконец, находим $P_9(z)$.

$$P_7e^{-it}+\overline{P}_7e^{it}=-2\,[9\lambda^2+3\cos 2t+10\lambda^2\cos 4t+\cos 6t+\lambda^2\cos 8t],$$

$$P_7\overline{P}_3+\overline{P}_7P_3=6+2\cos 4t,$$

$$P_5\overline{P}_5=5+4\cos 4t,$$

откуда для P_9 получаем такое уравнение:

$$P_9e^{-it}+\overline{P}_9e^{it}=2+10\cos 2t+2\cos 8t,$$

следовательно,

$$P_9(z)=z+5z^5+z^9,$$

$$\zeta=z-\lambda^2z^3+\lambda^4(2z+z^5)-\lambda^6(3z^3+z^7)+\lambda^8(z+5z^5+z^9).$$

3. Конформное преобразование внешних областей. Вернемся вновь к контурам, определенным равенством (5) или (7), и будем искать функцию, конформно преобразующую внешность этого контура на внешность или внутренность некоторой окружности. При этом мы будем предполагать, что бесконечно далекая точка плоскости z переходит в бесконечно далекую точку или нуль плоскости ζ. Отображающая функция будет иметь разложение около бесконечно далекой точки в случае отображения на внешность окружности:

$$\zeta=z+\alpha_2+\frac{\alpha_3}{z}+\frac{\alpha_4}{z^2}+\ldots \tag{19}$$

Равенства единице коэффициента при первой степени z, как это указано в формуле (19), мы можем всегда достигнуть, выбирая надлежащим образом радиус окружности и устанавливая соответствие между направлениями вещественных осей плоскостей z и ζ в бесконечно далеких точках.

Если мы имеем в виду преобразование внешности контура на внутренность окружности, то преобразующей функции можно придать, по соображениям, аналогичным изложенным выше, следующий вид:

$$\zeta=\frac{1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\frac{\alpha_3}{z^3}+\ldots \tag{20}$$

В обоих случаях для приближенного построения функции, совершающей конформное преобразование, может быть применен тот же прием, что и раньше.

Рассуждения и выкладки при отображении на внешность и внутренность окружности сходны между собой и аналогичны исследованному случаю преобразования внутренних областей; поэтому мы ограничимся во всем последующем изложении, например, первым случаем. Как раньше, будем искать приближенно требуемую нам функцию, взяв n первых членов разложения (19):

$$\zeta=z+\alpha_2+\frac{\alpha_3}{z}+\ldots+\frac{\alpha_n}{z^{n-2}}. \tag{21}$$

Для нахождения квадрата модуля функции ζ на контуре (5) нам потребуется вычисление $\frac{1}{z}$. Эта величина на контуре может быть разложена в ряд типа (7):

$$\frac{1}{z}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\beta_\nu^{(-1)}(\lambda)e^{i\nu t}, \tag{22}$$

коэффициенты которого $\beta_\nu^{(-1)}$ суть регулярные функции параметра λ. Они, очевидно, должны удовлетворять следующим равенствам:

$$\beta_\nu^{(-1)}(0)=0 \text{ при } \nu\neq-1,\ \beta_{-1}^{(-1)}(0)=1.$$

Составим теперь $|\zeta|^2$. Если использовать формулу (19) и подставить вместо z и $\frac{1}{z}$ их выражения (7) и (22), мы получим некоторый тригонометрический ряд. Приравняем в нем постоянной ρ^2 свободный член и положим коэффициенты при первых n членах ряда равными нулю; получим систему уравнений, совершенно подобную той, о которой мы подробно говорили в n° 1. Из нее и должны быть найдены коэффициенты $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ и приближенное значение радиуса ρ окружности, на внешность которой отображается заданная область. Решается эта система теми же способами, что и (9). На изучении ее мы поэтому останавливаться не будем. Скажем еще несколько слов относительно того случая, когда контур области задан уравнением (10).

Покажем, что, как и прежде, разложения в ряды по степеням λ коэффициентов $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ в этом случае будут начинаться соответственно с первой, второй и т. д. степеней λ. Действительно, если

$$z=e^{it}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\,\delta_\nu^{(1)}\,e^{i\nu t},$$

то $\frac{1}{z}$ будет представляться рядом того же вида:

$$\frac{1}{z}=e^{-it}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\,\delta_\nu^{(-1)}e^{i\nu t}, \tag{23}$$

где $\delta_\nu^{(-1)}$, так же как и $\delta_\nu^{(1)}$, — голоморфные функции от λ. В самом деле, после перестройки ряда для z по степеням λ получим:

$$z=e^{it}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Pi_\nu^{(1)}\lambda^\nu,$$

причем $\Pi_\nu^{(1)}$ суть полиномы степени не выше ν относительно e^{it} и e^{-it}.

Будем искать теперь последовательно коэффициенты разложения $\frac{1}{z}$ по степеням λ. Положим

$$\frac{1}{z}=e^{-it}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Pi_{\nu}^{(-1)}\lambda^{\nu};$$

$$e^{-it}\Pi_0^{(-1)}=\left\{\frac{1}{z}\right\}_{\lambda=0}=\frac{1}{e^{it}}\cdot\Pi_0^{(-1)}=1,$$

$$e^{-it}\Pi_1^{(-1)}=\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{z}\right\}_{\lambda=0}=-\frac{\Pi_1^{(1)}}{e^{it}},$$

откуда

$$\Pi_1^{(-1)}=-\Pi_1^{(1)}.$$

$\Pi_1^{(-1)}$ есть наверное полином первой степени от e^{it} и e^{-it}. Далее,

$$e^{-it}\Pi_2^{(-1)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{1}{z}\right\}_{\lambda=0}=e^{-it}\left(\Pi_1^{(1)2}-\Pi_2^{(1)}\right).$$

Отсюда следует, что $\Pi_2^{(-1)}$ есть полином не выше второй степени от e^{it} и e^{-it} и т. д. Перестроив теперь разложение по степеням λ для $\frac{1}{z}$ в разложении Лорана по степеням e^{it}, получим требуемый результат (23). Таким образом, для любых целых положительных и отрицательных k будет

$$z^k(t)=e^{ikt}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|\nu|}\delta_{\nu}^{(k)}(\lambda)\,e^{i\nu t}$$

при голоморфных $\delta_{\nu}^{(k)}(\lambda)$. Для облегчения записи положим $\alpha_1=1$:

$$\zeta\bar{\zeta}=\sum_{k,j=-1}^{n-2}\frac{\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}}{z^k\bar{z}^j}=$$

$$=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\sum_{k,j=-1}^{n-2}\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|p|+|p-\nu|}\delta_p^{(-k)}\bar{\delta}_{p-\nu}^{(-j)}e^{i(\nu-k+j)t}.$$

Приравняв постоянному ρ^2 свободный от e^{it} член правой части, получаем приближенное уравнение для определения радиуса окружности, на внешность которой отображается область:

$$\sum_{k,j=-1}^{n-2}\alpha_{k+2}\bar{\alpha}_{j+2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^{|p|+|p-k+j|}\delta_p^{(-k)}\bar{\delta}_{p-k+j}^{(-j)}=\rho^2.$$

Если же приравнять нулю коэффициенты при e^{-it}, $e^{-2it}, \ldots, e^{-(n-1)it}$, получим систему уравнений для определения чисел $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$:

$$\sum_{k,j=-1}^{n-2} \alpha_{k+2}\overline{\alpha}_{j+2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|p|+|p+m+j-k|} \delta_p^{(-k)} \overline{\delta}_{p+m+j-k}^{(-j)} = 0$$

$$(m = 1, \ldots, n-1),$$

которая после простых преобразований может быть приведена к виду:

$$\alpha_{m+1} = -\alpha_{m+1}\lambda q_{n,m+1}(\lambda) - \\ - {\sum_{k,j=-1}^{n-2}}' \alpha_{k+2}\overline{\alpha}_{j+2} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|p|+|p+m+j-k|} \delta_p^{(-k)} \overline{\delta}_{p+m+j-k}^{(-j)},$$

где $q_{n,m+1}(\lambda)$ есть некоторый степенной ряд от λ и знак $'$ у суммы ${\sum\limits_{k,j=-1}^{n-2}}'$ поставлен потому, что в ней должно быть пропущено слагаемое, отвечающее $k = m-1$ и $j = -1$. Решаем эту систему последовательными приближениями, начиная с $\alpha_2^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \ldots = \alpha_n^{(0)} = 0$. Нам достаточно установить, что если предыдущее приближение будет иметь требуемое строение, т. е. $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ будут содержать степени λ не ниже соответственно $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$, то то же строение будет иметь и последующее приближение. В самом деле, если $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в правой части удовлетворяют нашим условиям, то первый член содержит наверное множитель не ниже λ^{m+1}. В общий же член суммы λ будет входить в степени не ниже чем $k+1+j+|p|+$ $+|p+m+j-k|$, относительно которой легко можно установить, что она ни для каких k, j, p не ниже чем m; поэтому следующее приближение для α_{m+1} будет содержать степени λ не ниже чем m. Наше утверждение доказано таким образом вполне.

Пример 1. Для иллюстрации изложенного приема мы рассмотрим преобразование внешности контура

$$z(t) = e^{it}(1 + \lambda^2 e^{2it})$$

на внешность круга.

В силу симметрии области относительно координатных осей, разложение преобразующей функции в области бесконечно далекой точки будет:

$$\zeta = z + \frac{a_3}{z} + \frac{a_5}{z_3} + \ldots,$$

где a_k — вещественные числа.

Будем искать преобразующую функцию с точностью до λ^8. Сообразно этому ζ мы берем в форме полинома вида:

$$\zeta = z + \frac{a_3}{z} + \frac{a_5}{z^3} + \frac{a_7}{z^5} + \frac{a_9}{z^7}.$$

Квадрат модуля ζ будет:

$$\zeta\bar{\zeta} = z\bar{z} + a_3\left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right) + \left[a_5\left(\frac{z}{\bar{z}^3} + \frac{\bar{z}}{z_3}\right) + a_3^2\frac{1}{z\bar{z}}\right] +$$
$$+\left[a_7\left(\frac{z}{\bar{z}^5} + \frac{\bar{z}}{z^5}\right) + a_3a_5\left(\frac{1}{z^3\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^3z}\right)\right] +$$
$$+\left[a_9\left(\frac{z}{\bar{z}^7} + \frac{\bar{z}}{z^7}\right) + a_3a_7\left(\frac{1}{z\bar{z}^5} + \frac{1}{z^5\bar{z}}\right) + a_5^2\frac{1}{z^3\bar{z}^3}\right].$$

Если при вычислении членов написанного выражения иметь в виду, что $a_3, \ldots$ содержат множителями $\lambda^2, \lambda^4, \ldots$ и отбросить слагаемые, дающие λ выше чем в восьмой степени, получим:

$$z\bar{z} = 2\lambda^2\cos 2t + 1 + \lambda^4,$$
$$\frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} = 2\left[(\lambda^2 - \lambda^6)\cos 4t + \cos 2t - (\lambda^2 - \lambda^6)\right],$$
$$\frac{z}{\bar{z}^3} + \frac{\bar{z}}{z^3} = 2\left[\lambda^2\cos 6t + (1 - 3\lambda^4)\cos 4t - 3\lambda^2\cos 2t + 6\lambda^4\right].$$
$$\frac{1}{z\bar{z}} = 2\left[\lambda^4\cos 4t - \lambda^2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \lambda^4)\right],$$
$$\frac{z}{\bar{z}^5} + \frac{\bar{z}}{z^5} = 2\left[\lambda^2\cos 8t + \cos 6t - 5\lambda^2\cos 4t\right],$$
$$\frac{1}{z^3\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^3z} = 2\left[-\lambda^2\cos 4t + \cos 2t - 3\lambda^2\right],$$
$$\frac{z}{\bar{z}^7} + \frac{\bar{z}}{z^7} = 2\cos 8t,$$
$$\frac{1}{z\bar{z}^5} + \frac{1}{\bar{z}z^5} = 2\cos 4t, \quad \frac{1}{z^3\bar{z}^3} = 1.$$

Внося полученные значения в $\zeta\bar{\zeta}$ и приравнивая ρ^2 член, не зависящий от e^{it}, и нулю коэффициенты при косинусах, получим следующую систему уравнений:

$$1 + \lambda^4 - 2(\lambda^2 - \lambda^6)a_3 + 12\lambda^4a_5 + (1 + \lambda^4)a_3^2 - 6\lambda^2a_3a_5 + a_5^2 = \rho^2,$$
$$\lambda^2 + a_3 - 3\lambda^2a_5 - \lambda^2a_3^2 + a_3a_5 = 0,$$
$$(\lambda^2 - \lambda^6)a_3 + (1 - 3\lambda^4)a_5 + \lambda^4a_3^2 - 5\lambda^2a_7 - \lambda^2a_3a_5 + a_3a_7 = 0,$$
$$\lambda^2a_5 + a_7 = 0,$$
$$\lambda^2a_7 + a_9 = 0.$$

Перепишем последние четыре уравнения в виде:

$$a_3 = -\lambda^2 + 3\lambda^2a_5 + \lambda^2a_3^2 - a_3a_5,$$
$$a_5 = 3\lambda^4a_5 - (\lambda^2 - \lambda^6)a_3 - \lambda^4a_3^2 + 5\lambda^2a_7 + \lambda^2a_3a_5 - a_3a_7,$$
$$a_7 = -\lambda^2a_5,$$
$$a_9 = -\lambda^2a_7$$

и применим метод последовательных приближений, сохраняя при вычислении во втором приближении степени λ до четвертой, в третьем — до шестой и т. д.:

Коэффициент	Исходное значение	Приближения			
		первое	второе	третье	четвертое
a_3	0	$-\lambda^2$	$-\lambda^2$	$-\lambda^2+5\lambda^6$	$-\lambda^2+5\lambda^6$
a_5	0	0	λ^4	λ^4	$\lambda^4-11\lambda^8$
a_7	0	0	0	$-\lambda^6$	$-\lambda^6$
a_9	0	0	0	0	λ^8

$$\zeta=z-\frac{\lambda^2-5\lambda^6}{z}+\frac{\lambda^4-11\lambda^8}{z^3}-\frac{\lambda^6}{z^5}+\frac{\lambda^8}{z^7}.$$

Подстановка найденных значений в уравнение для ρ^2 дает

$$\rho^2=1+4\lambda^4-2\lambda^8,\quad \rho=1+2\lambda^4-3\lambda^8.$$

Для контроля вычислений подставляем z в построенный приближенный полином для ζ и полагаем там $t=0$. После упрощений получаем для ρ значение

$$\rho=1+2\lambda^4-3\lambda^8,$$

что вполне согласуется с предыдущим результатом.

К решению той же задачи может быть применен и метод последовательных приближений. Будем, как и в n° 2, пытаться искать функцию, совершающую конформное преобразование, в форме ряда, расположенного по степеням λ. Пусть контур L области имеет уравнение типа (12). Положим

$$\zeta=z+\lambda P_0(z)+\lambda^2 P_1(z)+\ldots+\lambda^{n+1}P_n(z)+\ldots,$$

где $P_n(z)$ есть функция, голоморфная вне контура L и на нем самом, имеющая полюс первого порядка на бесконечности:

$$P_n(z)=\alpha_{n,-1}z+\alpha_{n,0}+\frac{\alpha_{n,1}}{z}+\ldots=\sum_{\nu=-1}^{\infty}\frac{\alpha_{n,\nu}}{z^\nu}.$$

Мы будем дальше предполагать, что направлению вещественной оси на бесконечности плоскости z соответствует также направление вещественной оси на бесконечности плоскости ζ. Поэтому коэффициенты $\alpha_{n,-1}$ при z в функциях $P_n(z)$ должны быть вещественными. Далее,

$$\zeta\bar{\zeta}=z\bar{z}+\lambda[P_0\bar{z}+\bar{P}_0 z]+\ldots+\lambda^n[P_{n-1}\bar{z}+\ldots+\bar{P}_{n-1}z]+\ldots$$

Подставим сюда вместо z его значение (12) на контуре L и приравняем нулю коэффициенты при λ, λ^2, ...:

$$P_0e^{-it}+\bar{P}_0e^{it}+\left\{\frac{d}{d\lambda}z\bar{z}\right\}_{\lambda=0}=0.$$

Отсюда

$$2\mathrm{Re}\,[P_0(e^{it})\,e^{-it}] = -[\delta_0'(0) + \bar{\delta}_0'(0) + \delta_1(0)\,e^{it} + \bar{\delta}_1(0)\,e^{-it} + \\ + \delta_{-1}(0)\,e^{-it} + \bar{\delta}_{-1}(0)\,e^{it}] = Q_0.$$

Но $P_0(e^{it})\,e^{-it}$ есть предельное значение функции $\frac{P_0(z)}{z}$ на окружности единичного круга. Вещественная часть ее есть линейный тригонометрический многочлен, как видно из предыдущего равенства. С другой стороны, эта функция имеет в своем разложении около бесконечно далекой точки только отрицательные степени z:

$$\frac{P_0(z)}{z} = \alpha_{0,\,-1} + \frac{\alpha_{0,\,0}}{z} + \ldots$$

Поэтому мнимая часть функции $\frac{P_0(z)}{z}$ на единичном круге будет равна взятому с обратным знаком тригонометрическому полиному, сопряженному с Q_0: [1])

$$2\mathrm{I}\,[P_0(e^{it})\,e^{-it}] = -\widetilde{\widetilde{Q}}_0.$$

Произвольную постоянную, с точностью до которой определяется $\widetilde{\widetilde{Q}}_0$ по известному полиному Q_0, мы отбрасываем, помня, что свободный член функции $\frac{P_0(z)}{z}$ должен быть вещественным.

Q_0 и $\widetilde{\widetilde{Q}}_0$ — линейные тригонометрические полиномы от t. Поэтому $Q_0 - i\widetilde{\widetilde{Q}}_0$ представимо в виде

$$Q_0 - i\widetilde{\widetilde{Q}}_0 = \alpha_{0,\,-1} + \alpha_{0,\,0}e^{-it}$$

и, стало быть,

$$P_0(e^{it}) = \frac{e^{it}}{2}(Q_0 - i\tilde{Q}_0) = \alpha_{0,\,-1}e^{it} + \alpha_{0,\,0}.$$

Сравнение с нулем коэффициента при λ^2 дает

$$\mathrm{Re}\,[P_1(e^{it})\,e^{-it}] = Q_1,$$

где Q_1 есть полином второй степени от e^{it} и e^{-it}, откуда

$$P_1(e^{it}) = \frac{e^{it}}{2}(Q_1 - i\widetilde{\widetilde{Q}}_1).$$

---

[1]) Пусть, в самом деле, функция $\Phi = \frac{a+ib}{z^n}$. На границе единичного круга

$$\Phi = a\cos nt + b\sin nt + i\,(b\cos nt - a\sin nt),$$

и потому

$$\mathrm{I}\,[\Phi] = b\cos nt - a\sin nt = -\widetilde{\widetilde{\mathrm{Re}\,[\Phi]}},$$

Произвольную постоянную, входящую в $\tilde{Q}_1$, мы вновь отбрасываем на том основании, что и у $\tilde{Q}_0$. Так как Q_1 и $\tilde{Q}_1$ тригонометрические полиномы второй степени от t, комбинация $Q_1 - i\tilde{Q}_1$ представима в форме

$$Q_1 - i\tilde{Q}_1 = \alpha_{1,-1} + \alpha_{1,0}e^{-it} + \alpha_{1,1}e^{2it}$$

и, стало быть,

$$P_1(e^{it}) = \alpha_{1,-1}e^{it} + \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}e^{-it}$$

и т. д.

Идя таким путем, мы определим функцию $P_n(e^{it})$ как полином, линейный относительно e^{it} и n-й степени относительно e^{-it}:

$$P_n(e^{it}) = \alpha_{n,-1}e^{it} + \alpha_{n,0} + \frac{\alpha_{n,1}}{e^{it}} + \ldots + \frac{\alpha_{n,n}}{e^{int}}.$$

Пример 2. Будем искать функцию, совершающую преобразование внешней области контура $z(t) = e^{it}(1 - \lambda e^{it})$.

Положим, что нам нужно определить требуемую функцию до четвертых степеней параметра λ включительно. Согласно с этим полагаем:

$$\zeta = z + \lambda P_0(z) + \lambda^2 P_1(z) + \lambda^3 P_2(z) + \lambda^4 P_3(z).$$

Во всех последующих выкладках мы отбрасываем без оговорок все члены, которые либо сами содержат λ выше чем в четвертой степени, или такие, которые после требуемого по ходу рассуждений умножения их на некоторые выражения дают вновь степень λ выше четвертой.

Составим $|\zeta|^2$:

$$\zeta\bar{\zeta} = z\bar{z} + \lambda[P_0\bar{z} + z\bar{P}_0] + \lambda^2[P_1\bar{z} + P_0\bar{P}_0 + z\bar{P}_1] + \lambda^3[P_2\bar{z} + P_1\bar{P}_0 + P_0\bar{P}_1 + z\bar{P}_2] + \lambda^4[P_3\bar{z} + P_2\bar{P}_0 + P_1\bar{P}_1 + P_0\bar{P}_2 + z\bar{P}_3].$$

Подставляем сюда вместо z его значение, собираем члены при λ в первой степени и коэффициент приравниваем нулю. Так как $z\bar{z} = 1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2$, то коэффициент при λ будет:

$$2\operatorname{Re}[P_0(e^{it})e^{-it}] - 2\cos t = 0,$$

откуда

$$P_0(e^{it})e^{-it} = e^{-it}.$$

Следовательно,

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_0\bar{z} + z\bar{P}_0 = 2[\cos t - \lambda\cos 2t]; \quad P_0\bar{P}_0 = 1.$$

Соберем теперь коэффициент при λ^2:

$$P_1(e^{it})e^{-it} + e^{it}\overline{P_1(e^{it})} + 1 - 2\cos 2t + 1 = 0.$$

Поэтому

$$P_1(e^{it})e^{-it} = e^{-2it} - 1; \qquad P_1(z) = \frac{1}{z} - z.$$

Далее,

$$P_1\bar{z} + z\bar{P}_1 + P_0\bar{P}_0 = -1 + 6\lambda\cos t + 2(1 - \lambda^2)\cos 2t - 2\lambda\cos 3t;$$

$$P_1\bar{P}_0 + P_0\bar{P}_1 = 2(\lambda + \lambda\cos 2t).$$

Приравняем теперь нулю коэффициент при λ^3, это даст:

$$P_2(e^{it})\,e^{-it}+e^{it}\overline{P_2(e^{it})}+6\cos t-2\cos 3t=0,$$
$$P_2(e^{it})\,e^{-it}=e^{-3it}-3e^{-it},$$
$$P_2(z)=\frac{1}{z^2}-3.$$

Стало быть,

$$P_2\bar z+P_1\bar P_0+P_0\bar P_1+z\bar P_2=2\,[\lambda-3\cos t+6\lambda\cos 2t+\cos 3t-\lambda\cos 4t],$$
$$\bar P_2P_0+P_0\bar P_2=2\,(\cos 2t-3),$$
$$P_1\bar P_1=2\,(1-\cos t).$$

Сравняв с нулем коэффициент при λ^4, найдем:

$$P_3(e^{it})\,e^{-it}+e^{it}\overline{P_3(e^{it})}+2\,(\cos 2t-3)+2\,(1-\cos t)+$$
$$+2\,[1+6\cos 2t-\cos 4t]-2\cos 2t=0,$$
$$P_3(e^{it})\,e^{-it}=1+e^{-it}-6e^{-2it}+e^{-4it},$$
$$P_3(z)=z+1-\frac{6}{z}+\frac{1}{z^3}.$$

Следовательно, отображающая функция с точностью до четвертых степеней λ есть

$$\zeta=z+\lambda+\lambda^2\left(\frac{1}{z}-z\right)+\lambda^3\left(\frac{1}{z^2}-3\right)+\lambda^4\left(\frac{1}{z^3}-\frac{6}{z}+1+z\right)=$$
$$=(1-\lambda^2+\lambda^4)\,z+(\lambda-3\lambda^3+\lambda^4)+(\lambda^2-6\lambda^4)\,\frac{1}{z}+\frac{\lambda^3}{z^2}+\frac{\lambda^4}{z^3}.$$

§ 6. Разложение в ряд по степеням малого параметра в случае преобразования круга на область

1. Нормальное представление контура. Изложенные нами до настоящего времени методы относились к построению функции, совершающей конформное преобразование заданной наперед области на круг. При решении же многих задач теории упругости, теории электричества и т. д. [1]) бывает полезно знать, наоборот, функцию, преобразующую круг на заданную область.

Если известна функция, совершающая преобразование области на круг, то новая задача, разумеется, решалась бы простым обращением ее. Однако в большинстве случаев идти таким путем бесполезно, ибо новая задача представляется, как мы узнаем ниже, вообще говоря, более простой, чем прежняя. Она в своей общей постановке мало привлекала до последнего времени внимание математиков и рассматривалась преимущественно для частных областей (линейные и круго-

[1]) См. например, Н. И. Мусхелишвили [1, 2].

вые многоугольники), главным образом по той причине, что функция, совершающая преобразование круга на область, не обладает такими простыми экстремальными свойствами, как обратная ей, и решалась в теории обычно именно как задача об обращении. И лишь в последние годы были даны практически удобные методы непосредственного решения этой задачи.

Мы остановимся сначала на методе, принадлежащем Л. В. Канторовичу.[1]) Исходным пунктом его является следующее простое соображение. Будем отображать круг единичного радиуса на область B, ограниченную простым замкнутым контуром L. Функция, совершающая требуемое преобразование, регулярна в единичном круге и может быть представлена там рядом Тэйлора:

$$z = x + iy = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \ldots, \tag{1}$$

$$\alpha_n = a_n + ib_n, \quad |\zeta| < 1.$$

Почти для всех встречающихся в практических вопросах областей B написанный степенной ряд будет сходится и на окружности круга, т. е. когда $|\zeta| = 1$. Соответствующая такому ζ точка z должна лежать на контуре L. Поэтому, положив в равенстве (1) $\zeta = e^{i\vartheta}$, мы должны получить уравнение контура L в комплексной форме в виде ряда:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{in\vartheta}. \tag{2}$$

Или, если отделить здесь вещественную часть от мнимой, мы получим x и y в форме двух сопряженных тригонометрических рядов:

$$\left.\begin{aligned} x = \varphi(\vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta), \\ y = \psi(\vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\vartheta + a_n \sin n\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Факт сопряженности рядов $\varphi(\vartheta)$ и $\psi(\vartheta)$ мы условились раньше обозначать следующим знакоположением:

$$\psi(\vartheta) = \widetilde{\varphi(\vartheta)}.$$

Параметрическое представление контура L в виде (2) или (3), при условии, что, когда ϑ изменяется от 0 до 2π, точка $z = x + iy$ обегает один раз контур L, мы будем называть ниже нормальным.

[1]) См. работы Л. В. Канторовича [1], [3], [5], [7], [9], [10].

Нормальное представление (2) и (3) указанием одной только кривой L, разумеется, не определяется вполне. Чтобы вполне определить коэффициенты рядов (2) и (3), достаточно указать, во-первых, в какую точку α_0 при преобразовании круга $|\zeta|<1$ на внутренность L перейдет начало координат. Это равносильно заданию свободных членов α_0, a_0, b_0 наших рядов, так как $z(0)=\alpha_0=a_0+ib_0$. Во-вторых, нужно указать направление в точке α_0, в которое при преобразовании перейдет направление вещественной оси плоскости ζ. Это направление определится указанием значения аргумента производной $z'(0)$ от преобразующей функции в начале координат. Но, как видно из разложения (1), $z'(0)=\alpha_1$, и поэтому мы должны будем задать еще $\arg\alpha_1$. Если α_0 и $\arg\alpha_1$ известны, то нормальные представления (2) и (3) определяются вполне.

Наоборот, если нам известно нормальное представление контура L, то аналитическую функцию, совершающую искомое конформное преобразование единичного круга на область, мы находим сразу же либо в виде ряда:

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n)\zeta^n, \tag{4}$$

либо в виде интеграла Коши:

$$z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\vartheta)+i\psi(\vartheta)}{e^{i\vartheta}-\zeta}e^{i\vartheta}d\vartheta. \tag{5}$$

Задача конформного преобразования круга на область, следовательно, эквивалентна, при надлежащих условиях сходимости рядов (3) и (4), отысканию специального параметрического представления контура L области — его нормального представления.

Для решения же последней проблемы мы разовьем здесь два метода, отличающихся друг от друга лишь формой, в которой проводятся вычисления, и приводящих к одному и тому же результату — метод бесконечных систем уравнений и метод последовательных приближений.[1])

2. Метод бесконечных систем. К нему можно прийти, например, когда кривая L задана неявным уравнением

$$F(x, y)=0, \tag{6}$$

где $F(x, y)$ есть аналитическая функция своих аргументов для значений x и y, лежащих на контуре L, если искать представление (3) кривой L по методу неопределенных коэффициентов. Именно, подста-

---

[1]) Другая численная реализация этого метода дана в работе Г. А. Николаевой [1].

вив в (6) вместо x и y их значения (3) и располагая результат по косинусам и синусам кратных дуг, найдем:

$$F(x, y) = F[\varphi(\vartheta), \psi(\vartheta)] =$$
$$= F_0(a_j, b_j) + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n(a_j, b_j)\cos n\vartheta + F_n^*(a_j, b_j)\sin n\vartheta].^{1)} \qquad (7)$$

Отсюда, приравнивая нулю коэффициенты при $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$, получим бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов a_j и b_j:

$$F_0(a_j, b_j) = 0, \quad F_n(a_j, b_j) = 0, \quad F_n^*(a_j, b_j) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (8)$$

Аналогичная система получается для случая, когда кривая задана в неявном виде, но в комплексной форме

$$\Phi(z, \bar{z}) = 0. \qquad (6')$$

Подставив в (6′) вместо z ряд (2) и расположив полученное выражение по положительным и отрицательным степеням $e^{i\vartheta}$, получим

$$\Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{in\vartheta}, \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\alpha}_n e^{-in\vartheta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n(a_j, b_j)\, e^{in\vartheta}, \qquad (7')$$

откуда вместо системы (8) будем иметь:

$$\Phi_n(a_j, b_j) = 0 \qquad (n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \qquad (8')$$

Для решения поставленной задачи о нормальном представлении контура L достаточно нахождение такой системы чисел $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$, которая удовлетворяла бы уравнениям (8) или (8′) и для которой все ряды, которыми мы были вынуждены пользоваться, сходились бы, и, кроме того, производная от ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$ не обращалась бы в нуль в круге.

Особенно простыми будут системы (8) и (8′) для частного случая областей B, близких к кругу, т. е. таких, для которых контур имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + \lambda P(x, y) = 1 \qquad (9)$$

или

$$z\bar{z} + \lambda \Pi(z, \bar{z}) = 1, \qquad (9')$$

где λ есть некоторый „малый“ параметр, а $P(x, y)$ и $\Pi(z, \bar{z})$ удовлетворяют тем же условиям, что $F(x, y)$ и $\Phi(z, \bar{z})$. Оба эти уравнения эквивалентны и одно из них переходит в другое, если z заменить через $x + iy$ или, наоборот, x и y заменить через $\frac{z+\bar{z}}{2}$ и $\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

[1]) Символом $F_n(a_j, b_j)$ мы обозначаем тот факт, что функция F_n зависит от чисел $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$

Поэтому нам безразлично, для какого из этих уравнений проводить вычисления. Система уравнений вида (8), которую мы найдем, проделывая выкладки для (9), получится, если в уравнениях вида (8′), найденных для (9′), отделить вещественную и мнимую части.

Рассмотрим, например, уравнение (9′) в комплексной форме. Очевидно,

$$z\bar{z} = \ldots + e^{-i\vartheta}(\alpha_0\bar{\alpha}_1 + \alpha_1\alpha_2 + \ldots) + (\alpha_0\bar{\alpha}_0 + \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \ldots) + \\ + e^{i\vartheta}(\alpha_1\alpha_0 + \alpha_2\alpha_1 + \ldots) + \ldots$$

В разложении функции $\Pi(z, \bar{z})$ в ряд по степеням $e^{i\vartheta}$ коэффициенты при сопряженных величинах $e^{i\vartheta}$ и $e^{-i\vartheta}$ должны быть также сопряженными, так как параметр λ вещественный и из равенства (9′) видно, что $\Pi(z, \bar{z})$ должно быть вещественным. Таким образом, $\Pi(z, \bar{z})$ будет иметь после подстановки вместо z и $\bar{z}$ их значений (2) форму:

$$\Pi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(a_j, b_j)e^{in\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\tau_n(a_j, b_j)}\, e^{-in\vartheta},$$

$$\tau_n(a_j, b_j) = t_n(a_j, b_j) + it_n^*(a_j, b_j), \quad t_0^*(a_j, b_j) = 0.$$

Если в (9′) подставить вместо $z\bar{z}$ и $\Pi(z, \bar{z})$ написанные выше ряды и сравнить коэффициенты при положительных степенях $e^{i\vartheta}$, придем к системе:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0\bar{\alpha}_0 + \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \ldots + \lambda t_0(a_j, b_j) = 1, \\ \alpha_1\bar{\alpha}_0 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \ldots + \lambda\tau_1(a_j, b_j) = 0, \\ \alpha_2\bar{\alpha}_0 + \alpha_3\bar{\alpha}_1 + \alpha_4\alpha_2 + \ldots + \lambda\tau_2(a_j, b_j) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Уравнения, которые мы получим, приравнивая коэффициенты при отрицательных степенях $e^{i\vartheta}$, будут сопряженными с уравнениями (10) и ничего нового по сравнению с ними не дадут.

Систему (10) можно записать в форме:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_0\alpha_0 - \alpha_2\alpha_2 - \ldots - \lambda t_0(a_j, b_j), \\ \alpha_2 = -\dfrac{\alpha_1\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_1} - \dfrac{\alpha_3\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} - \ldots - \dfrac{\lambda}{\bar{\alpha}_1}\tau_1(a_j, b_j), \\ \alpha_3 = -\dfrac{\alpha_2\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_1} - \dfrac{\alpha_4\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} - \ldots - \dfrac{\lambda}{\bar{\alpha}_1}\tau_2(a_j, b_j), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (11)$$

К решению ее может быть применен метод последовательных приближений.

Предположения, которые мы сейчас сделаем относительно кривой L_λ с уравнением (9′) и о преобразующей функции, не являются в нашей задаче необходимыми, и мы их делаем только для того, чтобы облегчить выкладки. Будем считать, что начало координат $\zeta=0$ лежит внутри всех кривых L_λ, когда λ изменяется в некотором промежутке около $\lambda=0$. Кроме того, будем искать преобразующую функцию, удовлетворяющую условиям

$$z(0)=0; \quad z'(0)>0. \tag{12}$$

Сообразно с этим, мы должны будем в системе (11) положить $\alpha_0=0$ и считать α_1 положительным вещественным числом.

За исходную систему значений для a_j в нашей задаче естественно взять ту, которая отвечает случаю $\lambda=0$. Тогда кривая L будет окружностью единичного радиуса и дело будет идти, следовательно, о тождественном преобразовании этой окружности:

$$z=\zeta.$$

Поэтому можно в вычислениях отправляться от следующих начальных значений α_i:

$$\alpha_1^{(0)}=1; \quad \alpha_2^{(0)}=\alpha_3^{(0)}=\ldots=0.$$

Подставив их в правую часть системы (11), мы получим первые приближения для α_j, которые будут отличаться от исходных первой поправкой порядка λ.

Известную особенность будет представлять первое уравнение, из которого мы сможем найти квадрат α_1:

$$\alpha_1^2=1-\lambda t_0(a_j^{(0)}, b_j^{(0)}).$$

Отсюда

$$\alpha_1=(1-\lambda t_0)^{1/2}.$$

При наших вычислениях, по-видимому, целесообразно разложить найденное значение α_1 в ряд по степеням λ и сохранить в разложении только члены со степенью λ не выше первой:

$$\alpha_1=1-\frac{1}{2}\lambda t_0(a_j^{(0)}, b_j^{(0)}).$$

Первое приближение вновь подставляем в правую часть и вычисляем второе приближение, в котором сохраняем лишь поправки до порядка λ^2. Продолжая этот процесс дальше, найдем k-е приближение в форме:

$$\alpha_1=1+\lambda\alpha_1^{(1)}+\ldots+\lambda^k\alpha_1^{(k)},$$
$$\alpha_j=\lambda\alpha_j^{(1)}+\ldots+\lambda^k\alpha_j^{(k)} \quad (j=2, 3, \ldots).$$

Относительно сходимости этого процесса можно показать, как мы увидим немного ниже, что она будет иметь место по крайней мере для малых значений параметра λ.

3. Примеры. *Пример 1.* Проиллюстрируем теперь наши рассуждения на некоторых примерах. Будем искать функцию, отображающую единичный круг на внутренность эллипса

$$x^2+y^2-\lambda(x^2-y^2)=1,$$

полуоси которого суть $(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ и $(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}$, так, чтобы центр переходил в центр и вещественная ось — в вещественную ось:

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_1 \text{ — вещественное число.}$$

В силу того, что ось x есть ось симметрии эллипса, все α_j будут вещественными числами:

$$b_1=b_2=\ldots=0.$$

Наконец, так как ось y есть также ось симметрии, все a_j с четными номерами должны равняться нулю:

$$a_2=a_4=\ldots=0.$$

Уравнение эллипса в комплексной форме есть:

$$\overline{zz}-\lambda\frac{z^2+\bar{z}^2}{2}=1,$$

$$\Pi(z,\bar{z})=-\frac{z^2+\bar{z}^2}{2},$$

и так как на контуре

$$z^2=(a_1e^{i\vartheta}+a_3e^{3i\vartheta}+\ldots)^2=a_1^2e^{2i\vartheta}+2a_1a_3e^{4i\vartheta}+(2a_1a_5+a_3^2)e^{6i\vartheta}+$$
$$+(2a_1a_7+2a_3a_5)e^{8i\vartheta}+(2a_1a_9+2a_3a_7+a_5^2)e^{10i\vartheta}+\ldots,$$

функции τ_j определятся равенствами:

$$\tau_0=\tau_1=\tau_3=\tau_5=\ldots=0;$$

$$\tau_2=-\frac{1}{2}a_1^2;\quad \tau_4=-a_1a_3;\quad \tau_6=-\left(a_1a_5+\frac{1}{2}a_3^2\right);\quad \tau_8=-(a_1a_7+a_3a_5);\ldots$$

Система (11) поэтому имеет вид:

$$a_1^2=1-a_3^2-a_5^2-a_7^2-a_9^2-a_{11}^2-\ldots,$$
$$a_3=-\frac{1}{a_1}\left(a_5a_3+a_7a_5+a_9a_7+a_{11}a_9+\ldots-\frac{\lambda}{2}a_1^2\right),$$
$$a_5=-\frac{1}{a_1}(a_7a_3+a_9a_5+a_{11}a_7+\ldots-\lambda a_1a_3),$$
$$a_7=-\frac{1}{a_1}\left[a_9a_3+a_{11}a_5+\ldots-\lambda\left(a_1a_5+\frac{1}{2}a_3^2\right)\right],$$
$$a_9=-\frac{1}{a_1}[a_{11}a_3+\ldots-\lambda(a_1a_7+a_3a_5)],$$
$$a_{11}=-\frac{1}{a_1}\left[a_{13}a_3+\ldots-\lambda\left(a_1a_9+a_3a_7+\frac{1}{2}a_5^2\right)\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Введем новые неизвестные

$$\rho_0 = a_1, \quad \rho_1 = \frac{a_3}{a_1}, \quad \rho_2 = \frac{a_5}{a_1}, \quad \rho_3 = \frac{a_7}{a_1}, \ \dots$$

Для них система принимает вид:

$$\rho_0 = (1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 + \rho_5^2 + \dots)^{-1/2},$$
$$\rho_1 = \frac{1}{2}\lambda - \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_3 - \rho_3\rho_4 - \rho_4\rho_5 - \dots,$$
$$\rho_2 = \lambda\rho_1 - \rho_1\rho_3 - \rho_2\rho_4 - \rho_3\rho_5 - \dots,$$
$$\rho_3 = \lambda\left(\rho_2 + \frac{1}{2}\rho_1^2\right) - \rho_1\rho_4 - \rho_2\rho_5 - \dots,$$
$$\rho_4 = \lambda(\rho_3 + \rho_1\rho_2) - \rho_1\rho_5 - \dots,$$
$$\rho_5 = \lambda\left(\rho_4 + \rho_1\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2^2\right) - \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Оставив пока неопределенным ρ_0 и отбросив первое уравнение системы, из остальных будем находить последовательными приближениями $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$, приняв за начальные:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = 0.$$

Результаты вычислений сведены нами в таблицу:

Величины	Начальное значение	Приближения				
		первое	второе	третье	четвертое	пятое
ρ_1	0	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3$	$\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3$	$\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{3}{32}\lambda^5$
ρ_2	0	0	$\frac{1}{2}\lambda^2$	$\frac{1}{2}\lambda^2$	$\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda^4$	$\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda^4$
ρ_3	0	0	0	$\frac{5}{8}\lambda^3$	$\frac{5}{8}\lambda^3$	$\frac{5}{8}\lambda^3 - \frac{9}{8}\lambda^5$
ρ_4	0	0	0	0	$\frac{7}{8}\lambda^4$	$\frac{7}{8}\lambda^4$
ρ_5	0	0	0	0	0	$\frac{21}{16}\lambda^5$

Пользуясь этими значениями $\rho_1, \rho_2, \ldots$, из первого уравнения найдем ρ с точностью до пятых степеней λ:

$$\rho_0 = 1 - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots)^2 + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{1}{8}\lambda^2 + \frac{3}{128}\lambda^4.$$

Отображающая функция с точностью до λ^5 дается формулой

$$z = \rho_0\zeta(1 + \rho_1\zeta^2 + \rho_2\zeta^4 + \ldots) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{8}\lambda^2 + \frac{3}{128}\lambda^4\right)\left[\zeta + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{3}{32}\lambda^5\right)\zeta^3 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda^4\right)\zeta^5 + \left(\frac{5}{8}\lambda^3 - \frac{9}{8}\lambda^5\right)\zeta^7 + \frac{7}{8}\lambda^4\zeta^9 + \frac{21\lambda^5}{16}\zeta^{11}\right].$$

В частном случае для эллипса

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = \frac{4}{15}$$

найдем $\lambda = \frac{1}{4}$, благодаря чему отображающая функция, если ограничиться двумя десятичными знаками в коэффициентах, будет:

$$z = 0{,}99\,[\zeta + 0{,}12\zeta^3 + 0{,}03\zeta^5 + 0{,}01\zeta^7].$$

Более точные подсчеты показывают, что кривая, являющаяся изображением окружности, отходит от эллипса на величину, не большую чем 0,02.

Пример 2. Развиваемый нами метод нахождения отображающей функции может быть применен во многих случаях, когда контур, ограничивающий область, составлен из кусков нескольких алгебраических кривых. В качестве подобного примера решим задачу об отображении круга на квадрат. Мы будем иметь в виду квадрат со сторонами длины 2, параллельными осям координат, и центром в начале координат.

Допускаем опять переход центра в центр:

$$\alpha_0 = 0$$

и сохранение вещественных осей:

$$\arg \alpha_1 = 0.$$

Уравнение сторон квадрата будет:

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$$

или

$$x^2 + y^2 - x^2y^2 = 1.$$

В комплексной же форме

$$z\bar{z} + \left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4}\right)^2 = 1.$$

Вводя параметр λ, рассмотрим семейство кривых, для которых квадрат получается при $\lambda = 1$:

$$z\bar{z} + \lambda\left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4}\right)^2 = 1.$$

Осями симметрии здесь будут не только координатные оси, но и биссектрисы координатных углов; поэтому кроме равенств $b_1=b_2=b_3=\ldots=0$ и $a_2=a_4=a_6=\ldots=0$ будут еще выполнены $a_3=a_7=a_{11}=\ldots=0$. Нормальное представление (2) для z поэтому ищем в виде:

$$z=a_1e^{i\vartheta}+a_5e^{5i\vartheta}+a_9e^{9i\vartheta}+a_{13}e^{13i\vartheta}+\ldots,$$

$$\Pi(z,\ \bar z)=\left(\frac{z^2-\bar z^2}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{16}[a_1^2e^{2i\vartheta}+2a_1a_5e^{6i\vartheta}+(2a_1a_9+a_5^2)\,e^{10i\vartheta}+\ldots-a_1^2e^{-2i\vartheta}-$$

$$-2a_1a_5e^{-6i\vartheta}-(2a_1a_9+a_5^2)\,e^{-10i\vartheta}+\ldots]^2,$$

откуда видно, что

$$\tau_0(a_j,\ b_j)=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2+(a_1a_5)^2+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)^2+(a_1a_{13}+a_5a_9)^2+\ldots\right],$$

$$\tau_4(a_j,\ b_j)=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2+(a_1a_5)\,\frac{a_1^2}{2}+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)(a_1a_5)+\ldots\right],$$

$$\tau_8(a_j,\ b_j)=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\,a_1^2(a_1a_5)+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)\frac{a_1^2}{2}+(a_1a_{13}+a_5a_9)(a_1a_5)+\ldots\right],$$

$$\tau_{12}(a_j,\ b_j)=-\frac{1}{2}\left[-\frac{a_1^2}{2}\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)-\frac{1}{2}\,(a_1a_5)^2+(a_1a_{13}+a_5a_9)\,\frac{a_1^2}{2}+\ldots\right].$$

Система уравнений (11) для определения a_j принимает вид:

$$a_1^2=1-a_5^2-a_9^2-a_{13}^2-\ldots+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2+(a_1a_5)^2+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)^2+(a_1a_{13}+a_5a_9)^2+\ldots\right],$$

$$a_5=-\frac{a_5a_9}{a_1}-\frac{a_9a_{13}}{a_1}-\ldots+\frac{\lambda}{2a_1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2+a_1a_5\,\frac{a_1^2}{2}+\right.$$
$$\left.+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)a_1a_5+(a_1a_{13}+a_5a_9)\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)+\ldots\right],$$

$$a_9=-\frac{a_5a_{13}}{a_1}-\ldots+$$
$$+\frac{\lambda}{2a_1}\left[-\frac{a_1^2}{2}\,(a_1a_5)+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)\frac{1}{2}\,a_1^2+(a_1a_{13}+a_5a_9)\,a_1a_5+\ldots\right],$$

$$a_{13}=-\frac{a_5a_{17}}{a_1}-\ldots+$$
$$+\frac{\lambda}{2a_1}\left[-\frac{a_1^2}{2}\left(a_1a_9+\frac{1}{2}\,a_5^2\right)-\frac{1}{2}\,(a_1a_5)^2+(a_1a_{13}+a_5a_9)\,\frac{a_1^2}{2}+\ldots\right].$$

Результат решения ее по методу последовательных приближений, если принять за начальные значения

$$a_1=1,\quad a_5=a_9=\ldots=0$$

и ограничиться тремя приближениями, сведен в следующую таблицу:

Величины	Начальное значение	Приближения		
		первое	второе	третье
a_1	1	$1+\frac{1}{16}\lambda$	$1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{3}{256}\lambda^2$	$1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{i}{256}\lambda^2+\frac{3}{1024}\lambda^3$
a_5	0	$-\frac{1}{16}\lambda$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2-\frac{11}{1024}\lambda^3$
a_9	0	0	$\frac{1}{64}\lambda^2$	$\frac{1}{64}\lambda^2+\frac{27}{2048}\lambda^3$
a_{13}	0	0	0	$-\frac{11}{2048}\lambda^3$

откуда видно, что приближенно отображающая функция дается формулой

$$z=\left(1+\frac{\lambda}{16}+\frac{3\lambda^2}{256}+\frac{3\lambda^3}{1024}\right)\zeta-\left(\frac{\lambda}{16}+\frac{7\lambda^2}{256}+\frac{11\lambda^3}{1024}\right)\zeta^5+$$
$$+\left(\frac{\lambda^2}{64}+\frac{27\lambda^3}{2048}\right)\zeta^9-\frac{11\lambda^3}{2048}\zeta^{13}.$$

Полагая, в частности, $\lambda=1$, найдем приближенно функцию, отображающую единичный круг на рассматриваемый квадрат:

$$z=1{,}077\zeta-0{,}1006\zeta^5+0{,}0288\zeta^9-0{,}0054\zeta^{13}.$$

Можно показать, что точное решение задачи дается следующим эллиптическим интегралом:

$$z=\frac{\int\limits_0^\zeta (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt}{\int\limits_0^1 (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt}=1{,}080\left(\zeta-\frac{1}{10}\zeta^5+\frac{1}{24}\zeta^9-\frac{5}{208}\zeta^{13}+\ldots\right).$$ [1])

Сравнение его с предшествующим показывает, что приближенное значение первого коэффициента отличается от точного не более чем на 0,003 и второго не более чем на 0,01.

В большинстве практических задач параметр λ бывает задан численно. Введение его в качестве неопределенного и затем разыскание разложений коэффициентов по степеням λ представляется не совсем удобным, так как нахождение этих разложений требует значительных

[1]) См., например, В. И. Смирнов [1], т. III, ч. 2, стр. 152.

алгебраических выкладок. Чтобы избежать этого неудобства, можно избрать несколько иной путь. Именно, сразу подставить вместо λ нужное в данной задаче его численное значение и затем, начав с определенной системы первых приближений искомых коэффициентов, подставлять их в правую часть системы, находить вторые приближения, опять подставлять их в правую часть, находить третьи приближения и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность вычислений коэффициентов.

Применим этот способ для решения системы уравнений примера 2, подставив туда значение $\lambda=1$ и производя вычисления с точностью до 0,0001. Результаты вычислений сведены нами в следующую таблицу:

Величины	Начальное значение	Приближения				
		первое	второе	третье	четвертое	пятое
a_1	1	1,0607	1,0748	1,0785	1,0795	1,0807
a_5	0	−0,0625	−0,0922	−0,1014	−0,1069	−0,1081
a_9	0	0	0,0181	0,0319	0,0402	0,0450
a_{13}	0	0	−0,0022	−0,0074	−0,0167	−0,0242
a_{17}	0	0	0	0,0021	0,0050	0,0174
a_{21}	0	0	0	−0,0003	−0,0013	−0,0126

$$z=1{,}0807\zeta-0{,}1081\zeta^5+0{,}0450\zeta^9-0{,}0242\zeta^{13}+0{,}0174\zeta^{17}-0{,}0126\zeta^{21}.$$

4. Метод последовательных приближений для областей, близких к кругу, контур которых задан неявным уравнением. Мы изложим метод последовательных приближений сначала в его простейшей форме применительно к областям, близким к кругу. Обобщение этого метода для областей иного вида мы дадим в следующих номерах. Пусть контур L_λ, ограничивающий область B_λ, зависит от параметра λ и имеет своим уравнением

$$x^2+y^2+\lambda P(x, y)=1 \tag{13}$$

или в комплексной форме

$$z\bar{z}+\lambda\Pi(z, \bar{z})=1; \quad \Pi(x+iy, x-iy)=P(x, y). \tag{13'}$$

$P(x, y)$ и $\Pi(z, \bar{z})$, как и раньше, суть аналитические функции от x и y вблизи точек окружности $x^2+y^2=1$.

Будем искать функцию, совершающую конформное преобразование единичного круга на область B_λ. Для этого достаточно, как мы знаем, найти нормальное представление кривой L_λ, т. е. такое ее параметрическое представление

$$x=x(\vartheta, \lambda), \quad y=y(\vartheta, \lambda), \tag{14}$$

что $x(\vartheta, \lambda)$ и $y(\vartheta, \lambda)$ суть сопряженные функции от ϑ.

Для отыскания требуемого представления применим метод последовательных приближений, но не для вычисления отдельных коэффициентов разложений этих функций в тригонометрические ряды по ϑ, а для нахождения разложений в ряды по степеням параметра λ самих функций $x(\vartheta, \lambda)$, $y(\vartheta, \lambda)$ или $z(\vartheta, \lambda) = x(\vartheta, \lambda) + iy(\vartheta, \lambda)$.

Положим для этой цели

$$\begin{aligned} x(\vartheta, \lambda) &= x_0(\vartheta) + \lambda x_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n x_n(\vartheta) + \ldots, \\ y(\vartheta, \lambda) &= y_0(\vartheta) + \lambda y_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n y_n(\vartheta) + \ldots, \\ z(\vartheta, \lambda) &= z_0(\vartheta) + \lambda z_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n z_n(\vartheta) + \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

где $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$ суть сопряженные функции:

$$y_n(\vartheta) = \widetilde{x_n(\vartheta)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

и $x_0(\vartheta) + iy_0(\vartheta) = z_0(\vartheta)$ — функция, с помощью которой дается нормальное представление кривой L_λ при $\lambda = 0$, т. е. окружности единичного радиуса. Вид этой функции будет зависеть от того, какое из преобразований единичного круга самого на себя мы избираем. Чтобы упростить все выкладки, мы остановимся сразу же на простейшем из таких преобразований — тождественном преобразовании $z = \zeta$; с преобразованиями общего вида мы встретимся в следующем номере. Тогда

$$x_0(\vartheta) = \cos\vartheta, \quad y_0(\vartheta) = \sin\vartheta \quad \text{и} \quad z_0(\vartheta) = e^{i\vartheta}.$$

Далее, ради простоты мы будем предполагать, что при всяком λ начало координат $\zeta = 0$ переходит в начало координат плоскости z. Все функции $z_n(\vartheta)$ будут тогда граничными значениями функций, регулярных в единичном круге и обращающихся в нуль при $\zeta = 0$. Кроме того, мы будем считать, что $z'(0) > 0$ при всяких λ. Поэтому в разложении $z_n(\vartheta)$ в ряд по степеням $e^{i\vartheta}$ коэффициент при $e^{i\vartheta}$ должен быть вещественным.

Будем искать теперь функции $x_n(\vartheta)$, $y_n(\vartheta)$ и $z_n(\vartheta)$ последовательными приближениями. Так как формулы для определения $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$ получатся из соответствующих формул для $z_n(\vartheta)$ путем отделения в них вещественной и мнимой частей, нам достаточно провести все вычисления для $z_n(\vartheta)$.

Подставим в уравнение (13') разложение для $z(\vartheta, \lambda)$ и сравним коэффициенты при λ:

$$\begin{gathered} (z_0 + \lambda z_1 + \ldots)(\bar{z}_0 + \lambda \bar{z}_1 + \ldots) + \\ + \lambda \Pi(z_0 + \lambda z_1 + \ldots, \; \bar{z}_0 + \lambda \bar{z}_1 + \ldots) = 1, \\ \bar{z}_0 z_1 + \bar{z}_1 z_0 = -\Pi(z_0, \bar{z}_0) = -\tau_1. \end{gathered}$$

В левой части равенства стоит сумма двух сопряженных чисел и оно, следовательно, может быть переписано в форме

$$2\,\mathrm{Re}\,[\bar{z}_0 z_1] = -\tau_1.$$

Для построения числа $\bar{z}_0 z_1$ нам осталось лишь указать его мнимую часть. Но сделать это очень легко. Так как каждое из z_k должно иметь вид

$$z_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{in\vartheta},$$

произведение любого z_k на $\bar{z}_0 = e^{-i\vartheta}$ не будет содержать отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ и поэтому для построения $\mathrm{I}(\bar{z}_0 z_1)$ нам достаточно взять лишь функцию $-\widetilde{\tau}_1$,[1]) сопряженную в нашем смысле слова с $-\tau_1$

$$2\,\mathrm{I}\,(\bar{z}_0 z_1) = -\widetilde{\tau}_1.$$

Следовательно,

$$2\bar{z}_0 z_1 = -(\tau_1 + i\widetilde{\tau}_1) \quad \text{и} \quad z_1 = -\frac{1}{2} e^{i\vartheta} (\tau_1 + i\widetilde{\tau}_1). \tag{17}$$

Тем же путем, каким мы нашли z_1, можно по известным $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ найти z_n. Для этой цели сравниваем коэффициенты при λ^n в равенстве (13′), после того как внесем в него вместо z ряд (15). Мы получим равенство вида:

$$\bar{z}_0 z_n + \bar{z}_n z_0 = -\tau_n,$$

где через τ_n обозначено

$$\tau_n = (\bar{z}_1 z_{n-1} + \ldots + \bar{z}_{n-1} z_1) + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \Pi (z_0 + \lambda z_1 + \ldots + \lambda^{n-1} z_{n-1},\ \bar{z}_0 + \\ + \lambda \bar{z}_1 + \ldots + \lambda^{n-1} \bar{z}_{n-1}) \right\}_{\lambda=0}.$$

По прежним соображениям

$$2\,\mathrm{Re}\,[z_0 z_n] = -\tau_n,$$
$$2\,\mathrm{I}\,[\bar{z}_0 z_n] = -\widetilde{\tau}_n, \tag{18}$$
$$z_n = -\frac{1}{2} e^{i\vartheta} (\tau_n + i\widetilde{\tau}_n).$$

---

[1]) Функция $\widetilde{\tau}_1$ будет заключать в себе одну произвольную величину, а именно свободный член в своем ряде Фурье. То же можно сказать и относительно всех других величин τ_n, которые будут нам встречаться ниже. Однако все эти постоянные равны нулю, в силу того что коэффициенты при $e^{i\vartheta}$ в разложении всех $z_n(\vartheta)$ по степеням $e^{i\vartheta}$ должны быть вещественными.

Укажем теперь формулы, следуя которым можно вычислить $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$. Для этого отделим вещественную и мнимую части в (17) и (18).

Так как $P(x, y) = \Pi(z, \bar{z})$, то

$$\tau_1 = \Pi(z_0, \bar{z}_0) = P(x_0, y_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tau_n = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big[(\lambda x_1 + \ldots + \lambda^{n-1}x_{n-1})^2 + (\lambda y_1 + \ldots \lambda^{n-1}y_{n-1})^2 + \right.$$
$$\left. + \lambda P(x_0 + \ldots + \lambda^{n-1}x_{n-1}, y_0 + \ldots + \lambda^{n-1}y_{n-1})\Big]\right\}_{\lambda=0}.$$

Поэтому формулы (17) и (18) дадут для $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$:

$$x_1 = -\frac{\tau_1\cos\vartheta - \tilde{\tau}_1\sin\vartheta}{2}; \quad y_1 = -\frac{\tau_1\sin\vartheta + \tilde{\tau}_1\cos\vartheta}{2}; \qquad (17')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = -\frac{\tau_n\cos\vartheta - \tilde{\tau}_n\sin\vartheta}{2}; \quad y_n = -\frac{\tau_n\sin\vartheta + \tilde{\tau}_n\cos\vartheta}{2}. \qquad (18')$$

Пример. Решим по методу последовательных приближений задачу об отображении круга на эллипс, рассматривавшуюся уже нами раньше (см. n° 3):

$$z\bar{z} - \frac{\lambda}{2}(z^2 + \bar{z}^2) = 1; \qquad z_0 = e^{i\vartheta};$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{2}(e^{2i\vartheta} + e^{-2i\vartheta}) = -\cos 2\vartheta,$$

$$\tilde{\tau}_1 = -\sin 2\vartheta = -\frac{1}{2i}(e^{2i\vartheta} - e^{-2i\vartheta}),$$

$$\tau_1 + i\tilde{\tau}_1 = -e^{2i\vartheta}, \quad z_1 = \frac{1}{2}e^{3i\vartheta};$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\left(e^{i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{3i\vartheta}\right)\left(e^{-i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{-3i\vartheta}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\lambda}{2}\left(e^{i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{3i\vartheta}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\left(e^{-i\vartheta} + \frac{\lambda}{2}e^{-3i\vartheta}\right)^2\right]\right\}_{\lambda=0} =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{4i\vartheta} - \frac{1}{2}e^{-4i\vartheta} = \frac{1}{4} - \cos 4\vartheta,$$

$$\tilde{\tau}_2 = -\sin 4\vartheta, \quad \tau_2 + i\tilde{\tau}_2 = \frac{1}{4} - e^{4i\vartheta},$$

$$z_2 = -\frac{1}{8}e^{i\vartheta} + \frac{1}{2}e^{5i\vartheta}.$$

Продолжая таким же способом дальше, найдем:

$$z = \zeta + \frac{\lambda}{2}\zeta^3 + \lambda^2\left(-\frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{2}\zeta^5\right) + \lambda^3\left(-\frac{5}{16}\zeta^3 + \frac{5}{8}\zeta^7\right) +$$
$$+ \lambda^4\left(\frac{3}{128}\zeta - \frac{5}{8}\zeta^5 + \frac{7}{8}\zeta^9\right) + \ldots,$$

что совершенно совпадает с полученным раньше результатом.

5. Метод последовательных приближений для областей, близких к таким, конформное преобразование круга на которые известно. Пусть

$$F(x, y, \lambda)=0 \tag{19}$$

или в комплексной форме

$$\Phi(z, \bar{z}, \lambda)=0 \tag{19'}$$

есть уравнение контура L_λ, ограничивающего конечную область B_λ, зависящую от параметра λ. При $\lambda=0$ кривая (19) обращается в кривую L_0:

$$F(x, y, 0)=0, \tag{20}$$

ограничивающую область B_0. Будем предполагать, что L_0 — простая замкнутая кривая без особых точек, т. е. такая, что

$$[F_x(x, y, 0)]^2+[F_y(x, y, 0)]^2 \neq 0,$$

если точка (x, y) лежит на L_0.

Допустим, далее, что нам известна функция $\chi(\zeta)$, совершающая конформное преобразование единичного круга на область B_0. Тогда мы сможем указать нормальное параметрическое представление контура L_0:

$$x=x_0(\vartheta), \quad y=y_0(\vartheta), \quad \text{где} \quad y_0(\vartheta)=\widetilde{\widetilde{x}}_0(\vartheta), \tag{21}$$

или

$$z=z_0(\vartheta).$$

Сделаем еще предположение о том, что $F(x, y, \lambda)$ есть аналитическая функция своих аргументов вблизи значений $\lambda=0$ и x и y, лежащих на кривой L_0. В теории функций комплексной переменной для контуров вида L_0 доказывается, что производная от функции, совершающей конформное преобразование, будет иметь отличный от нуля модуль не только внутри окружности, но и на ней самой, т. е. что

$$|z_0'|^2=x_0'^2(\vartheta)+y_0'^2(\vartheta)>0.^{1)} \tag{22}$$

Будем искать теперь функцию, совершающую конформное преобразование круга на область B_λ. Для нахождения нормального пара-

---

[1]) Здесь и всюду ниже в этом параграфе мы под z_0' подразумеваем предельные значения на единичной окружности производной $\frac{dz_0}{d\zeta}$ от функции $z_0=\chi(\zeta)$, дающей преобразование единичного круга на L_0:

$$z_0'=\frac{dz_0}{d\zeta}=\frac{dz_0}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{d\zeta}=-ie^{-i\vartheta}\frac{dz_0}{d\vartheta}=-ie^{-i\vartheta}(x_0'(\vartheta)+iy_0'(\vartheta)).$$

метрического представления контура ее L_λ мы полагаем, следуя методу предыдущего номера:

$$\begin{aligned} x(\vartheta, \lambda) &= x_0(\vartheta) + \lambda x_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n x_n(\vartheta) + \ldots, \\ y(\vartheta, \lambda) &= y_0(\vartheta) + \lambda y_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n y_n(\vartheta) + \ldots \end{aligned} \tag{22'}$$

или

$$z(\vartheta, \lambda) = z_0(\vartheta) + \lambda z_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n z_n(\vartheta) + \ldots \tag{22''}$$

Функции $x_0(\vartheta)$, $y_0(\vartheta)$, $z_0(\vartheta)$ соответствуют случаю $\lambda = 0$ и совпадают с указанными в равенстве (21).

Будем находить теперь последовательно $x_n(\vartheta)$, $y_n(\vartheta)$, $z_n(\vartheta)$. Вновь достаточно построить лишь формулы для определения $z_n(\vartheta)$, так как соответствующие равенства для $x_n(\vartheta)$ и $y_n(\vartheta)$ получаются путем отделения в них вещественных и мнимых частей.

Для упрощения вычислений будем считать, что точка $z = 0$ лежит внутри B_λ, начало координат плоскости ζ переходит в точку $z = 0$ и направление вещественной оси в точке $\zeta = 0$ переходит в направление вещественной оси в точке $z = 0$. Сообразно с этим в разложениях $z_n(\vartheta)$ по степеням $e^{i\vartheta}$ будут отсутствовать свободные члены и коэффициенты при первых степенях $e^{i\vartheta}$ будут вещественными.

Подставим сначала в равенство (19') вместо z разложение (22'') и приравняем нулю коэффициент при первой степени λ:

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\Phi(z_0 + \lambda z_1, \bar{z}_0 + \lambda \bar{z}_1, \lambda)\right\}_{\lambda = 0} = 0,$$

$$\Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0) z_1 + \Phi_{\bar{z}}(z_0, \bar{z}_0, 0) \bar{z}_1 + \Phi_\lambda(z_0, \bar{z}_0, 0) = 0.$$

Обозначив ради краткости

$$\Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0) = \Psi; \quad \Phi_{\bar{z}}(z_0, \bar{z}_0, 0) = \theta; \quad \Phi_\lambda(z_0, \bar{z}_0, 0) = \tau_1, \tag{23}$$

будем иметь

$$\Psi z_1 + \theta \bar{z}_1 = -\tau_1. \tag{24}$$

С другой стороны, подставляя вместо z и $\bar{z}$ в уравнение кривой L_0 z_0 и $\bar{z}_0$: $\Phi(z_0, \bar{z}_0, 0) = 0$, дифференцируя результат по ϑ и умножая на $-i$, получим:

$$\Psi z_0' e^{i\vartheta} - \theta \bar{z}_0' e^{-i\vartheta} = 0,$$

где z_0' есть граничное значение производной $\frac{dz}{d\zeta}$.

Пользуясь этим равенством, мы можем уравнение (24) переписать в форме:

$$\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_0' e^{-i\vartheta}} = -\frac{\tau_1}{\Psi z_0' e^{i\vartheta}} = -\frac{\tau_1}{\theta \bar{z}_0' e^{-i\vartheta}} = \Lambda_1$$

или

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}}\right) = \Lambda_1.$$

Функция z_0', в силу конформности преобразования, будет граничным значением функции, отличной от нуля всюду в единичном круге. Поэтому частное $\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}}$ будет представлять собой граничное значение регулярной функции:

$$I\left[\frac{z_1}{z_0' e^{i\vartheta}}\right] = \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_1,$$

и

$$z_1 = \frac{z_0' e^{i\vartheta}}{2}(\Lambda_1 + i\widetilde{\Lambda}_1). \tag{25}$$

$\widetilde{\Lambda}_1$ находится с точностью до постоянного слагаемого. Оно должно определиться из того условия, чтобы в разложении z_1 по степеням $e^{i\vartheta}$ коэффициент при первой степени $e^{i\vartheta}$ был вещественным. Если принять во внимание, что разложение z_0' по степеням $e^{i\vartheta}$ не содержит отрицательных степеней этой величины, то из предыдущей формулы будет ясно, что наше условие для определения постоянной равносильно следующему: если разложить $\widetilde{\Lambda}_1$ в тригонометрический ряд по ϑ, то в разложении должен отсутствовать свободный член.

Совершенно так же мы поступаем, когда хотим определить $z_n(\vartheta)$. Подставив в (19′) вместо z ряд (22″) и приравняв нулю коэффициент при λ^n в полученном выражении, найдем:

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(z_0 + \lambda z_1 + \ldots + \lambda^n z_n, \ \bar{z}_0 + \lambda\bar{z}_1 + \ldots + \lambda^n \bar{z}_n, \ \lambda)\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big[\Phi(z_0 + \ldots + \lambda^{n-1}z_{n-1}, \ \bar{z}_0 + \ldots + \lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1}, \ \lambda) +\right.$$

$$+ \Phi_z(z_0 + \ldots + \lambda^{n-1}z_{n-1}, \ \bar{z}_0 + \ldots + \lambda^{n-1}z_{n-1}, \ \lambda)\lambda^n z_n +$$

$$+ \Phi_{\bar{z}}(z_0 + \ldots + \lambda^{n-1}z_{n-1}, \ \bar{z}_0 + \ldots + \lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1}, \ \lambda)\lambda^n \bar{z}_n +$$

$$+ \Phi_{zz}(z_0 + \ldots + \lambda^{n-1}z_{n-1}, \ \bar{z}_0 + \ldots +$$

$$\left.+ \lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1}, \ \lambda)(\lambda^n z_n)^2 + \ldots\Big]\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \Phi_z(z_0, \ \bar{z}_0, \ 0)z_n + \Phi_{\bar{z}}(z_0, \ \bar{z}_0, \ 0)\bar{z}_n + \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(z_0 + \ldots +\right.$$

$$\left.+ \lambda^{n-1}z_{n-1}, \ \bar{z}_0 + \ldots + \lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1}, \ \lambda)\right\}_{\lambda=0},$$

или, если обозначить

$$\tau_n = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(z_0 + \ldots + \lambda^{n-1}z_{n-1}, \ \bar{z}_0 + \ldots + \lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1}, \ \lambda)\right\}_{\lambda=0},$$

$$\Psi z_n + \theta\bar{z}_n = -\tau_n.$$

Использовав опять уравнение $\Psi z_0' e^{i\vartheta} - \theta \bar{z}_0' e^{-i\vartheta} = 0$, будем иметь следующую, не нуждающуюся в пояснениях цепь равенств:

$$\frac{z_n}{z_0' e^{i\vartheta}} + \frac{\bar{z}_n}{\bar{z}_0' e^{-i\vartheta}} = -\frac{\tau_n}{\Psi z_0' e^{i\vartheta}} = -\frac{\tau_n}{\vartheta \bar{z}_0' e^{-i\vartheta}} = \Lambda_n,$$

$$2\operatorname{Re}\left[\frac{z_n}{z_0' e^{i\vartheta}}\right] = \Lambda_n, \quad 2\mathrm{I}\left[\frac{z_n}{z_0' e^{i\vartheta}}\right] = \widetilde{\widetilde{\Lambda}}_n$$

и окончательно получим:

$$z_n = \frac{z_0' e^{i\vartheta}}{2}\left(\Lambda_n + i\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_n\right). \qquad (26)$$

Постоянное слагаемое, с точностью до которого находится $\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_n$, вновь определится из того условия, чтобы в разложении z_n по степеням $e^{i\vartheta}$ коэффициент при первой степени был вещественным или, что то же, свободный член в разложении $\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_n$ в тригонометрический ряд по ϑ был равен нулю. Такими будут формулы, позволяющие последовательно вычислять $z_1, z_2, \ldots$ Для нахождения соответствующих формул для $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ отделим в них вещественную и мнимую части.

Так как $\Phi(z, \bar{z}, \lambda) = F(x, y, \lambda)$,

$$\tau_n = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi\left(z_0 + \ldots + \lambda^{n-1} z_{n-1}, \bar{z}_0 + \ldots + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda^{n-1}\bar{z}_{n-1}, \lambda\right)\right\}_{\lambda=0} = \frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n} F\left(x_0 + \ldots + \lambda^{n-1} x_{n-1}, y_0 + \ldots + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda^{n-1} y_{n-1}, \lambda\right)\right\}_{\lambda=0} = T_n$$

и, в силу очевидных равенств,

$$F_x = \Phi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \Phi_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \Phi_z + \Phi_{\bar{z}},$$

$$F_y = \Phi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \Phi_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i\Phi_z - i\Phi_{\bar{z}}.$$

Если ввести обозначения $F_x(x_0, y_0, 0) = u$, $F_y(x_0, y_0, 0) = v$, будем иметь:

$$\Psi = \Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0) = \frac{1}{2}(u - iv); \quad \theta = \frac{1}{2}(u + iv);$$

$$\Lambda_n = \frac{T_n}{\frac{i}{2}(u - iv)(x_0' + iy_0')} = -\frac{T_n}{\frac{i}{2}(u + iv)(x_0' - iy_0')};$$

но

$$\frac{y_0'}{x_0'} = -\frac{F_x(x_0, y_0, 0)}{F_y(x_0, y_0, 0)} = -\frac{u}{v},$$

и поэтому

$$\Lambda_n = 2\frac{T_n x_0'}{v(x_0'^2 + y_0'^2)} = 2S_n.$$

Равенства (25) и (26) тогда дают:

$$x_n = \mathrm{Re}\left[\frac{z_0' e^{i\vartheta}}{2}(2S_n + 2i\widetilde{S}_n)\right] = x_0'\widetilde{S}_n + y_0' S_n; \quad y_n = -x_0' S_n + y_0'\widetilde{S}_0$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

6. Метод последовательных приближений для кривых, заданных в параметрической форме. Мы разовьем сейчас метод последовательных приближений для случая, когда кривая, ограничивающая область, дается в параметрической форме. Ход рассуждений по основной своей идее близок к уже изложенному в предшествующем номере, однако в нем имеются свои специфические черты, которые заставляют провести рассуждения для этого случая вновь, хотя бы и более коротко. Мы выпускаем простейший случай области, близкой к кругу, переходя сразу к более общему случаю.

Итак, допустим, что простая замкнутая кривая L_λ, ограничивающая односвязную область B_λ, задана уравнениями:

$$x = \varphi(t, \lambda), \quad y = \psi(t, \lambda). \tag{27}$$

Мы можем предположить функции φ и ψ развернутыми в тригонометрические ряды

$$x = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_n \cos nt + r_n \sin nt),$$
$$y = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(q_n \cos nt - s_n \sin nt),$$

которые, вообще говоря, не будут сопряженными. Если поэтому мы составим величину

$$z = x + iy = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\pi_n \cos nt + \rho_n \sin nt),$$
$$\pi_n = p_n + iq_n, \quad \rho_n = r_n - is_n$$

и заменим в этом ряду $\cos nt$ и $\sin nt$ по формулам Эйлера через степени числа e^{it}, мы получим z как некоторую функцию от e^{it}, разложение которой в ряд будет содержать не только положительные, но и отрицательные степени e^{it}:

$$z = \omega(e^{it}, \lambda) = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi_n}{2} - \frac{\rho_n}{2}i\right)e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi_n}{2} + \frac{\rho_n}{2}i\right)e^{-int}. \tag{28}$$

Мы ниже будем предполагать кривую заданной именно в этой последней форме. Коэффициенты π_n и ρ_n будут, разумеется, зависеть от λ. Поставим условие, чтобы при $\lambda=0$ ряд (28) не содержал бы отрицательных степеней λ и разложение $\omega(e^{it}, 0)$ в тригонометрический ряд давало бы нормальное представление кривой L_0. Будем, кроме того, считать, что кривая L_0 не имеет особых точек. Относительно же функции $\omega(w, \lambda)$ предположим, что она аналитическая по λ и w вблизи значений $\lambda=0$ и $|w|=1$.

Если бы случилось, что параметр t был полярным углом в плоскости ζ, т. е. $\zeta=|\zeta|e^{it}$, то отрицательных степеней e^{it} в разложении (28) не было бы и мы имели бы нормальный ряд для z, по которому сразу построили бы отображающую функцию. Но взятый нами параметр t вообще не совпадает с полярным углом ϑ, и наша задача заключается в том, чтобы путем некоторой замены перейти от t к ϑ, т. е. так заменить параметр в (28), чтобы после замены ряд (28) стал бы нормальным. Зависимость между t и ϑ берем в форме

$$t=\vartheta+\lambda\varphi_1(\vartheta)+\lambda^2\varphi_2(\vartheta)+\ldots, \tag{29}$$

где $\varphi_1(\vartheta)$, $\varphi_2(\vartheta)$, ... суть некоторые вещественные периодические функции, определением которых мы займемся ниже. Член, свободный от λ, взят нами в виде ϑ по той причине, что по условию ряд (28) для $\lambda=0$ будет нормальным и тогда наверное t должно совпадать с ϑ.

Пусть все $\varphi_j(\vartheta)$ для $j\leqslant n-1$ определены так, чтобы коэффициенты при λ^j в разложении $\omega(e^{it}, \lambda)$ по степеням λ не содержали в своих рядах Фурье отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$. Подберем теперь $\varphi_n(\vartheta)$ так, чтобы это имело место и при $j=n$. Подставим в $\omega(e^{it}, \lambda)$ вместо t ряд (29) и вычислим коэффициент при λ^n. Он будет равен:

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{it}, \lambda)\right\}_{\lambda=0}=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\ldots+\lambda^n\varphi_n)}, \lambda)\right\}_{\lambda=0}=$$
$$=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\ldots+\lambda^{n-1}\varphi_{n-1})}(1+i\lambda^n\varphi_n+\ldots), \lambda)\right\}_{\lambda=0}.$$

Отсюда, обозначая

$$\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\omega(e^{i(\vartheta+\ldots+\lambda^{n-1}\varphi_{n-1})}, \lambda)\right\}_{\lambda=0}=A_n,$$

найдем, что искомый коэффициент будет:

$$\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)\,ie^{i\vartheta}\cdot\varphi_n+A_n=i\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)\,e^{i\vartheta}\left(\varphi_n+\frac{A_ne^{-i\vartheta}}{i\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)}\right).\,^{1})$$

---

[1]) Под символом ω_ζ мы понимаем производную $\frac{d\omega}{d\zeta}$.

Нам нужно выбором φ_n достигнуть того, чтобы полученное выражение для коэффициента не содержало бы отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ в своем ряду Фурье. Но это наверное будет так, если функция, стоящая в скобках, не будет содержать их, так как множитель, стоящий перед ней, по условию отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ не содержит. Пусть

$$\frac{A_n e^{-i\vartheta}}{i\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-in\vartheta}.$$

Отсюда видно, что в состав функции φ_n, если мы хотим достигнуть отсутствия отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ в скобках, должен входить ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-in\vartheta}$, содержащий все отрицательные степени $e^{i\vartheta}$ второго слагаемого скобки. С другой стороны, в силу вещественности функции φ_n, ее часть, содержащая положительные степени $e^{i\vartheta}$, должна непременно приводиться к $-\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}'_n e^{in\vartheta}$. Произвольным в выражении для φ_n, таким образом, остается лишь вещественный свободный член:

$$\varphi_n = \gamma_n - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}'_n e^{in\vartheta} - \sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-in\vartheta}. \tag{30}$$

Выбором его можно распорядиться так, чтобы достигнуть заданных условий соответствия точек. В решаемом ниже примере мы считаем $\gamma_n = 0$.

Пример. Возьмем кривую, заданную полярным уравнением $r = 1 + \lambda \cos nt$. Ее уравнение в комплексной форме будет:

$$z = e^{it} + \lambda\left(\frac{1}{2} e^{i(n+1)t} + \frac{1}{2} e^{-i(n-1)t}\right).$$

Подставляем сюда вместо t ряд (29) и собираем коэффициенты при одинаковых степенях λ:

$$e^{i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\dots)} + \frac{\lambda}{2}\left[e^{i(n+1)(\vartheta+\lambda\varphi_1+\dots)} + e^{-i(n-1)(\vartheta+\lambda\varphi_1+\dots)}\right] =$$

$$= e^{i\vartheta} + \lambda\left[e^{i\vartheta} i\varphi_1 + \frac{1}{2}\left(e^{i(n+1)\vartheta} + e^{-i(n-1)\vartheta}\right)\right] + \lambda^2\left[e^{i\vartheta}\left(-\frac{1}{2}\varphi_1^2 + i\varphi_2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} e^{i(n+1)\vartheta} i(n+1)\varphi_1 - \frac{1}{2} e^{-i(n-1)\vartheta} i(n-1)\varphi_1\right] + \dots,$$

откуда видно, что для того чтобы в первой скобке отсутствовали отрицательные степени $e^{i\vartheta}$, φ_1 должно равняться, если отбросить произвольное вещественное слагаемое,

$$\frac{i}{2} e^{-in\vartheta} - \frac{i}{2} e^{in\vartheta} = \sin n\vartheta.$$

Что касается φ_2, то для него получится равенство:

$$\varphi_2 = i\,\frac{2n-1}{8}\,(e^{-2in\vartheta} - e^{2in\vartheta}) = \frac{2n-1}{4}\,\sin 2n\vartheta$$

и т. д.

После подстановки в предыдущий ряд значений φ_1, φ_2, ... будем иметь, если ограничиться второй степенью λ, для граничного значения z следующее нормальное представление:

$$z = e^{i\vartheta} + \lambda e^{i(n+1)\vartheta} + \frac{2n+1}{4}\,\lambda^2\,(e^{i(2n+1)\vartheta} - e^{i\vartheta}).$$

Таким образом, с точностью до λ^2 отображающая функция приближенно будет равна

$$z = \left(1 - \frac{2n+1}{4}\,\lambda^2\right)\zeta + \lambda\zeta^{n+1} + \frac{2n+1}{4}\,\lambda^2\zeta^{2n+1}.$$

Замечание. В изложенном методе для составления функции, дающей конформное преобразование круга на область, нужно первоначально подыскать такое семейство кривых, зависящее от параметра λ, чтобы для кривой, получающейся из этого семейства при $\lambda = 0$, отображающая функция была известна и чтобы при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_1$ получалась заданная кривая. Такое семейство обычно можно подобрать различными способами. Отметим один из них, оказывающийся полезным при решении частных примеров. Мы рассмотрим случай, когда контур области может быть задан полярным уравнением:

$$\rho = f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Пусть a есть радиус некоторого круга с центром в полюсе, целиком помещающегося внутри L, тогда за искомое семейство можно взять следующее:

$$\rho = a + \lambda\,[f(t) - a] \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Действительно, при $\lambda = 0$ это семейство дает окружность, а при $\lambda = 1$ — данную кривую.

7. Доказательство сходимости процесса последовательных приближений.[1]) Мы докажем, что построенные нами ряды (15, 22′, 29) сходятся во всяком случае для значений параметра λ, достаточно малых по модулю, абсолютно и равномерно по отношению переменной ϑ. Займемся сначала случаем задания контура области в неявном виде.

---

[1]) На основании тех же идей, которые применяются в этом номере, проблема сходимости последовательных приближений была исследована Г. М. Голузиным [2].

Ввиду того что ряды (15) являются частным случаем рядов (22′) и, наконец, так как ряды (22′) получаются из ряда (22″) путем отделения вещественной и мнимой частей, нам достаточно установить сходимость только ряда (22″).

Введем прежде всего обозначение, которым нам придется пользоваться при доказательствах. Будем называть нормой функции $\varphi(t)$, разлагающейся в тригонометрический ряд:

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

сумму модулей ее коэффициентов Фурье:

$$\|\varphi(t)\|=\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n|+|b_n|).$$

Отметим некоторые свойства нормы, доказательство которых мы предоставляем читателю:

1) $\|\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\ldots\| \leqslant \|\varphi_1(t)\|+\|\varphi_2(t)\|+\ldots$,

2) $\|\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\| \leqslant \|\varphi_1(t)\|\cdot\|\varphi_2(t)\|$,

3) $\|\widetilde{\varphi(t)}\| \leqslant \|\varphi(t)\|$.[1])

Приведем еще следующую лемму, которая окажется также полезной для нас.

Лемма I. *Если у двух степенных рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\xi^n$$

коэффициенты удовлетворяют неравенствам:

$$|a_n| \leqslant \frac{A}{(n+1)^\alpha}, \quad |b_n| \leqslant \frac{B}{(n+1)^\alpha} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ \alpha>1),$$

то коэффициенты c_n степенного ряда, представляющего их произведение, удовлетворяют неравенствам:

$$|c_n| \leqslant \frac{AB}{(n+1)^\alpha}\cdot M_\alpha,$$

где M_α — постоянная, зависящая только от α.

---

[1]) Под $\widetilde{\varphi(t)}$ мы понимаем здесь тригонометрический ряд, сопряженный с тригонометрическим рядом для $\varphi(t)$, но без свободного члена.

В самом деле:

$$|c_n| = \left|\sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu b_{n-\nu}\right| \leqslant AB \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)^\alpha (n+1-\nu)^\alpha} =$$

$$= AB\left\{2\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{(\nu+1)^\alpha (n+1-\nu)^\alpha} + \frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^{2\alpha}}\right\} =$$

$$= \frac{AB}{(n+1)^\alpha}\left\{2\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{(\nu+1)^\alpha\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)^\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\alpha\left(1-\frac{n}{2(n+1)}\right)^\alpha}\right\} <$$

$$< \frac{AB}{(n+1)^\alpha}\cdot 2^{\alpha+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^\alpha} < \frac{2^{\alpha+1}AB}{(n+1)^\alpha}\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}AB}{(n+1)^\alpha(\alpha-1)} = \frac{AB}{(n+1)^\alpha} M_\alpha,$$

где $M_\alpha = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha-1}$. Это и требовалось доказать. В частности, при $\alpha = 2$ найдем $M_2 = 8$. Нетрудно проверить при более точной оценке, что эта постоянная может быть заменена на меньшую: $M_2 = 1{,}520$.

Выскажем теперь более подробно предположения о функции $\Phi(z, \bar{z}, \lambda)$, входящей в уравнение (19′) контура L_λ, при которых мы будем доказывать сходимость процесса последовательных приближений.

При $\lambda = 0$ уравнение (19′) дает кривую L_0, относительно которой мы считали, что она содержит начало координат внутри себя, лишена особых точек и что известна функция $\chi(z)$, конформно преобразующая круг $|\zeta| < 1$ на область B_0, ограниченную L_0, так, что

$$\chi(0) = 0; \quad \chi'(0) > 0.$$

Обозначим через D_0 некоторую окрестность кривой L_0 и через $\overline{D_0}$ — область, получающуюся из D_0 путем ее отражения около вещественной оси x, т. е. образованную точками, сопряженными с точками области D_0.

Мы будем считать, что $\Phi(z, w, \lambda)$ есть регулярная аналитическая функция своих аргументов, когда z изменяется в D_0, w в $\overline{D_0}$ и λ по модулю меньше некоторого λ_0:

$$z \in D_0, \quad w \in \overline{D_0}, \quad |\lambda| < \lambda_0.$$

Ввиду аналитичности контура L_0 и отсутствия на нем особых точек, функция $\chi(z)$ будет регулярной не только в единичном круге, но и в круге радиуса большего единицы. Граничные значения $\chi(z)$ на единичной окружности мы раньше обозначили $z_0(\vartheta)$:

$$z_0(\vartheta) = \chi(e^{i\vartheta}).$$

Рассмотрим функцию $\Phi(z_0(\vartheta)+\xi, \overline{z_0(\vartheta)}+\eta, \lambda)$. Она будет регулярной функцией от ξ и η, когда точки $z_0(\vartheta)+\xi$ и $\overline{z_0(\vartheta)}+\eta$ принадлежат соответственно D_0 и $\overline{D}_0$. Точка $z_0(\vartheta)$ лежит на L_0 и $\overline{z_0(\vartheta)}$ на $\overline{L}_0$. Обозначим через r_1 расстояние от L_0 до границы D_0. Точки $z_0(\vartheta)+\xi$ и $\overline{z_0(\vartheta)}+\eta$ будут, наверное, принадлежать соответственно D_0 и $\overline{D}_0$, если окажется, что ξ и η по модулю меньше чем r_1. Поэтому мы можем сказать, что при любых значениях ϑ рассматриваемая нами функция будет регулярной аналитической функцией от ξ, η и λ в области

$$|\xi| < r_1, \quad |\eta| < r_1, \quad |\lambda| < \lambda_0. \tag{31}$$

Разложим ее в степенной ряд по ξ, η, λ:

$$\Phi(z_0(\vartheta)+\xi, \overline{z_0(\vartheta)}+\eta, \lambda) = \sum_{i,\,j,\,k=0}^{\infty} A_{ik}^{(j)}(\vartheta)\,\xi^i \eta^k \lambda^j. \tag{31'}$$

Коэффициенты его будут некоторыми функциями от ϑ:

$$A_{ik}^{(j)}(\vartheta) = \frac{1}{i!\,k!\,j!}\left\{\frac{\partial^{i+k+j}\Phi}{\partial z^i \partial w^k \partial \lambda^j}\right\}_{z=z_0,\ w=\overline{z}_0,\ \lambda=0}.$$

Непосредственно видно, что эти коэффициенты есть аналитические периодические функции от ϑ. Они имеют конечную норму.

Лемма II. *Если функция $\Phi(z, w, \lambda)$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям, то ряд*

$$\sum_{i,\,j,\,k=0}^{\infty} \|A_{ik}^{(j)}(\vartheta)\|\,\xi^i \eta^k \lambda^j \tag{32}$$

сходится в области (31).

Возьмем произвольное положительное число r_2, меньшее r_1, и рассмотрим функцию $\Phi\left(\chi(\zeta)+\xi, \overline{\chi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\eta, \lambda\right)$.[1] Когда ζ изменяется

---

[1]) Если $\chi(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu$, то под $\overline{\chi}(\zeta)$ мы понимаем ряд

$$\overline{\chi}(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\alpha}_\nu \zeta^\nu.$$

в окрестности единичной окружности, точки $\chi(\zeta)$ и $\overline{\chi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ будут принадлежать окрестностям L_0 и $\overline{L_0}$. Мы можем выбрать настолько узкую кольцевую окрестность единичной окружности

$$\frac{1}{\rho}<|\zeta|<\rho, \quad \rho>1,$$

чтобы точки $\chi(\zeta)$ и $\overline{\chi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ удалялись от L_0 и $\overline{L_0}$ на расстояние меньшее чем r_1-r_2, когда ζ изменяется в этом кольце. При таком выборе ρ точки $\chi(\zeta)+\xi$ и $\overline{\chi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\eta$ будут заведомо принадлежать D_0 и $\overline{D_0}$, как только модули ξ и η будут меньше чем r_2.

Поэтому мы можем утверждать, что рассматриваемая функция будет регулярной аналитической функцией от ζ, ξ, η, λ в области

$$\frac{1}{\rho}<|\zeta|<\rho, \quad |\xi|<r_2, \quad |\eta|<r_2, \quad |\lambda|<\lambda_0.$$

Разложим ее в степенной ряд по всем этим переменным. При этом ряды по ξ, η, λ будут Тэйлоровыми, ряд же по ζ — типа Лорана:

$$\Phi\left(\chi(\zeta)+\xi, \ \overline{\chi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\eta, \ \lambda\right)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_{i,k,l}^{(j)}\xi^i\eta^k\lambda^j\zeta^l. \tag{33}$$

Если в этом ряду каждый из коэффициентов $A_{i,k,l}^{(j)}$ заменить его модулем, то полученный вновь степенной ряд

$$\sum_{i,k,l=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |A_{i,k,l}^{(j)}|\xi^i\eta^k\lambda^j\zeta^l$$

будет сходиться в той же области, что и предыдущий ряд. В частности, будет сходиться и следующий ряд, получающийся при $\zeta=1$:

$$\sum_{i,k,j=0}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |A_{i,k,l}^{(j)}|\right)\xi^i\eta^k\lambda^j. \tag{34}$$

Мы покажем, что этот последний ряд, умноженный на 2, является превосходящим для (32). В самом деле, при $\zeta=e^{i\vartheta}$ будет:

$$\chi(e^{i\vartheta})=z_0(\vartheta), \quad \overline{\chi}\left(\frac{1}{e^{i\vartheta}}\right)=\overline{\chi}(e^{-i\vartheta})=\overline{z_0(\vartheta)}.$$

Функция $\Phi\left(\chi(\zeta)+\xi,\ \overline{\chi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\eta,\ \lambda\right)$ приводится к $\Phi(z_0+\xi,\ \bar{z}_0+\eta,\ \lambda)$, и поэтому коэффициенты $A^{(j)}_{i,k}(\vartheta)$ и $A^{(j)}_{i,k,l}$ связаны между собой равенством

$$A^{(j)}_{i,k}(\vartheta)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} A^{(j)}_{i,k,l}e^{il\vartheta}.$$

Отсюда видно, что

$$\| A^{(j)}_{i,k}(\vartheta)\| \leqslant 2\sum_{l=-\infty}^{\infty} |A^{(j)}_{i,k,l}|,$$

и, следовательно, удвоенный ряд (34) является действительно превосходящим для (32).

Как мы говорили выше, ряд (34) сходится в области $|\xi|<r_2$, $|\eta|<r_2$, $|\lambda|<\lambda_0$, причем r_2 есть любое число, меньшее r_1. Коэффициенты его не зависят от r_2, и поэтому он будет также сходящимся и в области (31). Но если мажорантный ряд (34) сходится в этой области, то и наш ряд (32) будет сходиться по меньшей мере в той же области. Этим доказывается лемма II.

Одновременно с рядом (32) будет в той же области (31) сходиться и ряд

$$\Omega(\xi,\ \eta,\ \lambda)=\sum_{\substack{i,\,j,\,k=0\\ i+j+k>2}}^{\infty} B^{(j)}_{i,k}\,\xi^i\eta^k\lambda^j, \tag{32$_1$}$$

где

$$B^{(j)}_{i,k}=\| A^{(j)}_{i,k}\|(j+1)^{\alpha}.$$

Заметим, что функции $\dfrac{e^{-i\vartheta}}{z_0'\Phi_z(z_0,\ \bar{z}_0,\ 0)}$ и $z_0'e^{i\vartheta}$ представляют аналитические периодические функции ϑ. Поэтому нормы этих функций конечны;[1]) обозначим их через

$$\mu=\left\|\frac{e^{-i\vartheta}}{z_0'\Phi_z(z_0,\ \bar{z}_0,\ 0)}\right\|,\quad \mu_1=\| z_0'e^{i\vartheta}\|. \tag{35}$$

---

[1]) Относительно функции $\frac{1}{z_0'}$ это очевидно в силу $|z_0'|\neq 0$. Из равенства же $F(x,\ y,\ \lambda)=\Phi(z,\ \bar{z},\ \lambda)$ следует: $F_x=\Phi_z+\Phi_{\bar{z}}$; $F_y=i\Phi_z-i\Phi_{\bar{z}}$, откуда $\Phi_z=\frac{1}{2}(F_x-iF_y)$ и $|\Phi_z|^2=\frac{1}{4}(F_x^2+F_y^2)$, а поэтому из предположенного раньше неравенства $F_x^2(x_0,\ y_0,\ 0)+F_y^2(x_0,\ y_0,\ 0)>0$ следует справедливость утверждения.

Переходим теперь к самому доказательству сходимости ряда (22″), для чего оценим функции $z_n(\vartheta)$. Предположим, что для $l<n$ верна оценка

$$\| z_l(\vartheta) \| \leqslant \frac{CR^{l-1}}{(l+1)^{\alpha}} \quad (\alpha > 1), \tag{36}$$

и докажем, что эта оценка верна и для $l=n\geqslant 2$. О том, как должны быть выбраны постоянные величины C и R, мы скажем ниже.

Оценим прежде всего $\| \tau_n \|$. Пользуясь (31′) и (36), имеем:

$$\| \tau_n \| = \left\| \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi (z_0 + \ldots + \lambda^{n-1} z_{n-1}, \bar{z}_0 + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda^{n-1} \bar{z}_{n-1}, \lambda) \right\}_{\lambda=0} \right\| \leqslant \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \| A_{ik}^{(j)} \| \left\| \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{n!} (\lambda z_1 + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda^{n-1} z_{n-1})^i (\lambda \bar{z}_1 + \ldots + \lambda^{n-1} \bar{z}_{n-1})^k \lambda^j \right\}_{\lambda=0} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{i,\, j,\, k=0 \\ i+j+k \geqslant 2}}^{j \leqslant n} \| A_{ik}^{(j)} \| \left\{ \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{n-j}}{d\lambda^{n-j}} \left(\frac{C}{2^{\alpha}} \lambda + \frac{CR}{3^{\alpha}} \lambda^2 + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{CR^{n-2}}{n^{\alpha}} \lambda^{n-1} \right)^{i+k} \right\}_{\lambda=0}. \text{[1]}$$

Последняя стоящая под знаком суммы скобка представляет коэффициент при λ^{n-j} в выражении:

$$\left(\frac{C}{2^{\alpha}} \lambda + \frac{CR}{3^{\alpha}} \lambda^2 + \ldots + \frac{CR^{n-2}}{n^{\alpha}} \lambda^{n-1} \right)^{i+k} =$$

$$= \left(\frac{C}{R} \right)^{i+k} \left(\frac{R\lambda}{2^{\alpha}} + \frac{(R\lambda)^2}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{(R\lambda)^{n-1}}{n^{\alpha}} \right)^{i+k}.$$

На основании леммы I, если применить ее к случаю $i+k$ сомножителей, ясно что этот коэффициент будет не больше нежели

$$\left(\frac{C}{R} \right)^{i+k} \frac{R^{n-j}}{(n-j+1)^{\alpha}} M_{\alpha}^{i+k}.$$

---

[1]) При переходе к последней части неравенства условие $i+j+k\geqslant 0$ при знаке суммы заменено на $i+j+k\geqslant 2$ по той причине, что члены со степенями λ до $n-1$, получающиеся при $i+j+k<n$ при дифференцировании n раз по λ наверное пропадут, а n по условию не меньше 2.

Пользуясь этим, а также (32), мы можем продолжить оценку интересующего нас выражения $\|\tau_n\|$:[1]

$$\|\tau_n\| \leqslant \sum_{\substack{i,\, j,\, k=0 \\ i+j+k\geqslant 2}}^{j\leqslant n} \frac{1}{(j+1)^\alpha} B_{ik}^{(j)} R^{n-i-j-k} (CM_\alpha)^{i+k} \frac{1}{(n-j+1)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \sum_{\substack{i,\, j,\, k=0 \\ i+j+l\geqslant 2}}^{\infty} B_{ik}^{(j)} \left(\frac{1}{R}\right)^j \left(\frac{CM_\alpha}{R}\right)^i \left(\frac{CM_\alpha}{R}\right)^k =$$

$$= \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega\left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R}\right).$$

Далее, из равенства

$$\Lambda_n = -\frac{\tau_n e^{-i\vartheta}}{z_0'\Psi} = -\frac{\tau_n e^{-i\vartheta}}{z_0'\Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0)}$$

вытекает

$$\|\Lambda_n\| \leqslant \mu \|\tau_n\| \leqslant \mu \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega\left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R}\right),$$

и, следовательно [см. формулу (26)]:

$$\|z_n\| \leqslant \mu_1 \|\Lambda_n\| \leqslant \mu\mu_1 \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega\left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R}\right). \qquad (37)$$

Займемся теперь выбором величин C и R. Величину C мы возьмем настолько большой, чтобы было выполнено неравенство

$$\|z_1\| \leqslant \frac{C}{2^\alpha}, \qquad (38)$$

т. е. чтобы неравенство (36) выполнялось при $l=1$.

Чтобы это неравенство выполнялось при всяком l, достаточно выбрать, как это ясно из (37), R настолько большим, чтобы было:

$$\frac{CM_\alpha}{R} < r_1, \quad \frac{1}{R} < \lambda_0,$$

$$\mu\mu_1 \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega\left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R}\right) \leqslant \frac{CR^{n-1}}{(n+1)^\alpha}. \qquad (39)$$

Для выполнения последнего из этих неравенств требуется, чтобы удовлетворялось соотношение:

$$\Omega\left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R}\right) \leqslant \frac{C}{\mu\mu_1} \frac{1}{R}, \qquad (40)$$

[1]) Чтобы получить последнюю часть неравенства, мы заменили величину $\frac{1}{(j+1)(n-j+1)}$ не меньшей $\frac{1}{n+1}$.

которому всегда можно удовлетворить, выбрав R достаточно большим, так как при $\frac{1}{R}=0$ функция Ω, ряд (32_1) для которой содержит члены не ниже второго измерения, имеет двойной корень, справа же стоит $\frac{1}{R}$ в первой степени.

Таким образом, неравенство (36) установлено для всяких l при выбранных нами C и R и тем самым установлена сходимость ряда (22″)[1]) при

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{R}. \tag{41}$$

Пример. В n° 4 мы нашли функцию, конформно преобразующую круг на эллипс $z\bar{z}-\frac{\lambda}{2}(z^2+\bar{z}^2)=1$. Оценим в этой задаче область сходимости нашего алгорифма:

$$\Phi(z, \bar{z}, \lambda)=z\bar{z}-\frac{\lambda}{2}(z^2+\bar{z}^2)-1=(z-e^{it})(\bar{z}-e^{-it})+$$
$$+e^{it}(\bar{z}-e^{-it})+e^{-it}(z-e^{it})-\frac{\lambda}{2}(\bar{z}-e^{it})^2-\frac{\lambda}{2}(\bar{z}-e^{-it})^2-$$
$$-\lambda e^{it}(z-e^{it})-\lambda e^{-it}(\bar{z}-e^{-it})-\frac{\lambda}{2}(e^{2it}+e^{-2it}).$$

Отсюда находим, если взять $\alpha=2$:

$$\Omega(\xi, \eta, \lambda)=\xi\eta+2\lambda(\xi^2+\eta^2+2\xi+2\eta);$$

так как в данном случае, как мы раньше видели, $z_1=\frac{1}{2}e^{3i\vartheta}$, то можно взять $C=4$.

Далее, $z_0=e^{i\vartheta}$, $z_0'=1$, поэтому $\mu_1=2$; с другой стороны, $\Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0)=\bar{z}_0$ и, стало быть,

$$\mu=\left\| \frac{e^{i\vartheta}}{z_0'\Phi_z(z_0, \bar{z}_0, 0)} \right\|=2.$$

Раньше мы упоминали о том, что $M_2=1{,}52$, следовательно, неравенство (40) даст:

$$\frac{(1{,}52\cdot 4)^2}{R^2}+\frac{2}{R}\left[\frac{(1{,}52\cdot 4)^2}{R^2}+\frac{(1{,}52\cdot 4)^2}{R^2}+2\,\frac{1{,}52\cdot 4}{R}+2\,\frac{1{,}52\cdot 4}{R}\right]\leqslant\frac{1}{R},$$

что равносильно следующему:

$$\frac{147{,}9}{R^2}+\frac{85{,}61}{R}\leqslant 1,$$

для чего достаточно положить $R\geqslant 87{,}3$. Таким образом, последовательные приближения будут наверное сходиться при

$$|\lambda|\leqslant 0{,}011<\frac{1}{R}.$$

На самом деле граница сходимости будет, конечно, шире.

---

[1]) Другой метод установления сходимости ряда, использующий теорию функциональных уравнений, дан в работе Г. А. Николаевой [1]. См. также Б. А. Вертгейм [1].

Замечание. Отметим еще следующее. Пусть мы каким-либо иным путем нашли параметрическое представление контура L_λ в форме ряда, расположенного по степеням λ:

$$z(t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n z_n^*(t),$$

где $z_n^*(t)$ — функции, разложение которых в ряд Фурье содержит степени e^{it}, бóльшие нулевой. Мы видели выше, что в таком случае $z_n(t)$ определяются единственным образом, так как произвол происходит лишь от постоянных, входящих в Λ_n, которые здесь все принимаются равными нулю, и поэтому $z_n(t)$ должны совпадать с $z_n^*(t)$. В частности, тот способ бесконечных систем, который мы развивали в пп° 1—4, должен давать те же результаты; поэтому, установив сходимость рядов (22'), мы одновременно доказали и сходимость метода бесконечных систем, в котором мы находили ряды по степеням λ для коэффициентов разложения преобразующей функции в степенной ряд.

Перейдем к доказательству сходимости при достаточно малых λ разложения (29) для задачи в параметрической форме.

Разлагая $\omega(e^{it}, \lambda)$ в ряд по степеням λ и $t - \vartheta$, найдем:

$$\omega(e^{it}, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} A_{i,j}(\vartheta) \lambda^j (t-\vartheta)^i. \tag{42}$$

Полагая, далее,

$$B_{ij} = \| A_{ij}(\vartheta) \| (j+i)^\alpha,$$

составим функцию:

$$\Omega^*(\xi, \lambda) = \sum_{\substack{i, j=0 \\ i+j \geq 2}}^{\infty} B_{ij} \xi^i \lambda^j.$$

Как и в предыдущем случае, можно показать, что ряд в правой части будет сходиться при ξ, λ, достаточно малых по модулю.

Предположим теперь, что при $l < n$ установлено неравенство:

$$\| \varphi_l(\vartheta) \| \leq \frac{CR^{l-1}}{(l+1)^\alpha}. \tag{43}$$

Тогда, проводя преобразования, аналогичные тем, которые мы делали при оценке τ_n, найдем, что

$$\| A_n(\vartheta) \| \leq \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega^* \left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R} \right).$$

Вводя еще обозначение

$$\left\| \frac{e^{-i\vartheta}}{\omega_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)} \right\| = \gamma,$$

получим, согласно равенству (30), если вновь отбросить постоянную γ_n:

$$\| \varphi_n \| \leq 2\gamma \frac{R^n}{(n+1)^\alpha} \Omega^* \left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R} \right). \tag{44}$$

Выбирая C так, чтобы было выполнено неравенство:

$$C \geqslant 2^{\alpha} \| \varphi_1(\vartheta) \|,$$

а затем R настолько большим, чтобы было:

$$\Omega^* \left(\frac{CM_\alpha}{R}, \frac{1}{R} \right) \leqslant \frac{C}{2\gamma R}, \tag{45}$$

причем такой выбор, очевидно, всегда возможен, ибо Ω^* имеет при $\frac{1}{R} = 0$ нуль второго порядка, установим, что (43) имеет место и при $l = n$.

Неравенство (43) показывает, что ряд (29) сходится наверное для таких значений λ, при которых

$$|\lambda| < \frac{1}{R}.$$

Во всех случаях нам удалось установить сходимость лишь для малых значений λ, причем граница, даваемая неравенствами (41) и (45), которую мы нашли, вообще говоря, далеко отстоит от действительной области сходимости разложений по степеням λ. Действительная область сходимости будет значительно шире указанной нами. Попытки найти точную область сходимости полученных разложений до сих пор не привели к результатам, и этот вопрос остается открытым.

Может случиться, что входящее в вычисления значение параметра λ лежит вне полученных нами границ. Однако развитый здесь метод часто приводит к результату и в этом случае. Тогда после нахождения отображающей функции нужно проверить точность результата. Для этой цели требуется выяснить прежде всего, насколько кривая, которая получается в результате отображения единичной окружности с помощью найденной функции, отстоит от кривой, ограничивающей заданную область. Это можно сделать либо аналитически, пользуясь уравнениями этих кривых, либо графически, построив обе кривые и сравнив их друг с другом. По максимальному расстоянию между обеими кривыми судят о точности приближенного выражения.[1])

В § 5, где мы рассматривали метод разложения в ряд по степеням малого параметра функции, дающей конформное преобразование области на круг, мы не проводили исследования сходимости построенного там ряда по степеням параметра λ. Теперь мы имеем возможность без затруднений доказать это предложение.

Действительно, тот тип контуров, имеющий уравнение вида (12) § 5, который мы рассматривали в исследованиях названного параграфа, является частным случаем контуров, для которых мы проводим исследование сходимости процесса последовательных приближений в изло-

---

[1]) См. В. И. Смирнов [2].

женном только что методе для случая параметрического задания контура, когда последний будет близок к окружности.

Если λ мало по модулю, то контур будет простой аналитической кривой без угловых точек. Функция, совершающая преобразование круга на область внутри контура, будет голоморфной по ζ как внутри круга, так и на его границе. Мы можем обратить эту функцию однозначно в силу однолистности области. По известным теоремам о неявных функциях обратная функция будет регулярной относительно z во всей области B, включая и контур, и регулярной относительно λ при малых $|\lambda|$. Ее, следовательно, можно разложить в ряд по степеням λ, коэффициенты которого будут голоморфными функциями от z в области B.

Нам осталось, таким образом, доказать, что построенное нами в n° 2 § 5 разложение (13) совпадает с действительным разложением. Установить это не представляет никакого труда. В самом деле, будем предполагать, что при преобразовании начало координат переходит в начало и направление вещественной оси переходит опять в направление вещественной оси. Возьмем действительное разложение преобразующей функции в ряд по степеням λ. Оно будет иметь вид (13), причем $P_k(z)$ будут некоторыми функциями от z, регулярными в B_λ, включая и границу L_λ.

Составим квадрат модуля ζ на границе области B. Он должен быть там тождественно равен единице. Приравнивая нулю коэффициенты при λ, $\lambda^2, \ldots$, получим систему уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты разложения. Эту систему мы составили раньше в n° 2 § 5, и так как построенная система, как мы видели, имеет единственное решение, то построенное нами разложение будет совпадать с действительным разложением. Этим и доказывается его сходимость при малых значениях параметра λ.

8. Замечания об отображении круга на внешность кривой. Примеры. Та же идея может быть, разумеется, использована для построения функции, конформно преобразующей круг единичного радиуса на внешность некоторой кривой.

Пусть граничная кривая области обладает теми же свойствами, что и раньше, и задана уравнением вида (9), которое мы рассматривали в предыдущих номерах.

Функция, совершающая нужное преобразование круга на внешность кривой, если потребовать, чтобы центр круга переходил в бесконечно далекую точку, имеет здесь следующий вид:

$$z = x + iy = \alpha_1\zeta^{-1} + \alpha_2 + \alpha_3\zeta + \alpha_4\zeta^2 + \ldots, \quad \alpha_n = a_n + ib_n. \quad (46)$$

Мы можем, как и выше, считать $b_1 = 0$. При $|\zeta| = 1$ аффикс соответствующего значения z должен быть расположен на граничной кривой, и z поэтому удовлетворит уравнению контура (9′). Если в выражении

$$z = x + iy = \alpha_1 e^{-i\vartheta} + \alpha_2 + \alpha_3 e^{i\vartheta} + \ldots$$

отделить вещественную и мнимую части, то тригонометрические ряды для x и y должны будут удовлетворить уравнению контура (9). Производя подстановку ряда для z в (9′) или рядов для x и y в уравнение контура (9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\vartheta}$ или косинусах и синусах углов одинаковой кратности ϑ, получим систему уравнений для определения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, которая может быть решена прежним способом. Выкладки и исследование сходимости здесь мало отличаются от уже приведенных в предыдущих номерах. Поэтому мы ограничимся здесь лишь некоторыми примерами.

Пример 1. Будем отображать круг на внешность квадрата. Пусть это будет вновь квадрат со сторонами, параллельными осям координат, длины 2. Уравнение сторон его есть

$$(x^2-1)(1-y^2)=0, \quad x^2+y^2-x^2y^2=1,$$

или в комплексной форме

$$z\bar{z}+\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=1.$$

Вводим вспомогательное семейство кривых, зависящее от параметра λ:

$$z\bar{z}+\lambda\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}\right)^2=1,$$

в которое наш квадрат входит при $\lambda=1$.

Ввиду наличия у кривых четырех осей симметрии функцию z ищем в форме:

$$z=a_1e^{-i\vartheta}+a_5e^{3i\vartheta}+a_9e^{7i\vartheta}+\ldots,$$

где a_k — вещественные числа. Так как

$$\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}=\frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{1}{2}a_9^2+\ldots\right)e^{-14i\vartheta}-(a_5a_9+\ldots)e^{-10i\vartheta}-\right.$$
$$-\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)e^{-6i\vartheta}-\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)e^{-2i\vartheta}+\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)e^{2i\vartheta}+$$
$$\left.+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)e^{6i\vartheta}+(a_5a_9+\ldots)e^{10i\vartheta}+\left(\frac{1}{2}a_9^2+\ldots\right)e^{14i\vartheta}+\ldots\right\},$$

после подстановки в уравнение контура и сравнения коэффициентов будем иметь систему уравнений:

$$a_1^2+a_5^2+a_9^2+\ldots=1+\frac{\lambda}{2}\left[\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)^2+a_5^2a_9^2+\frac{1}{4}a_9^4+\ldots\right],$$

$$a_1a_5+a_5a_9+\ldots=-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{2}\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)^2-\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)-\right.$$
$$\left.-a_5a_9\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)-\frac{1}{2}a_9^2a_5a_9-\ldots\right],$$

$$a_1a_9+\ldots=-\frac{\lambda}{2}\left[\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1^2\right)\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)-a_5a_9\left(a_1a_5-\frac{1}{2}a_1\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}a_9^2\left(a_1a_9+\frac{1}{2}a_5^2\right)-\ldots\right].$$

Приняв за исходные значения $a_1 = 1$, $a_5 = a_9 = \ldots = 0$, решаем ее обычным методом последовательных приближений. Соответствующие шаги вычислений приведены в таблице:

Величины	Начальные значения	Приближения		
		первое	второе	третье
a_1	1	$1+\frac{1}{16}\lambda$	$1+\frac{\lambda}{16}+\frac{7}{256}\lambda^2$	$1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{7}{256}\lambda^2+\frac{9}{1024}\lambda^3$
a_5	0	$-\frac{1}{16}\lambda$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2$	$-\frac{1}{16}\lambda-\frac{7}{256}\lambda^2-\frac{19}{2048}\lambda^3$
a_9	0	0	0	$\frac{\lambda^3}{2048}$

Отображающая функция с точностью до λ^3, таким образом, будет:

$$z=\left(1+\frac{1}{16}\lambda+\frac{7}{256}\lambda^2+\frac{9}{1024}\lambda^3\right)\frac{1}{\zeta}-\left(\frac{1}{16}\lambda+\frac{7}{256}\lambda^2+\frac{19}{2048}\lambda^3\right)\zeta^3+\frac{\lambda^3}{2048}\zeta^7.$$

Полагая в этом выражении $\lambda = 1$, получим:

$$z=\frac{1125}{1024}\frac{1}{\zeta}-\frac{203}{2048}\zeta^3+\frac{1}{2048}\zeta^7.$$

Как и в nn° 4—5, мы можем искать разложение по степеням λ не отдельных коэффициентов рядов Фурье для $x(\vartheta)$ и $y(\vartheta)$, а непосредственно разложение в ряд по степеням λ самой комплексной координаты $z = x + iy$ точек контура.

Допустим, что контур L_λ области задан уравнением (19), или, что то же, (19′), и нам известна функция, совершающая преобразование единичного круга на внешность L_0. Положим:

$$z(\vartheta, \lambda) = z_0(\vartheta) + \lambda z_1(\vartheta) + \ldots + \lambda^n z_n(\vartheta) + \ldots \tag{47}$$

Разложение в ряд по степеням $e^{i\vartheta}$ каждого из коэффициентов должно содержать положительные степени этой величины и только первую отрицательную степень; $z_0(\vartheta)$, отвечающую случаю $\lambda = 0$, мы предположим известной.

Подставим ряд (47) в уравнение контура (19′) и приравняем нулю коэффициенты при степенях λ. Для коэффициента при первой степени λ получим:

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\Phi(z_0+\lambda z_1,\ \bar{z}_0+\lambda\bar{z}_1,\ \lambda)\right\}_{\lambda=0} = \Phi_z(z_0,\ \bar{z}_0,\ 0)\,z_1 + \Phi_{\bar{z}}(z_0,\ \bar{z}_0,\ 0)\,\bar{z}_1 + \Phi_\lambda(z_0,\ \bar{z}_0,\ 0) = 0,$$

или в обозначениях (23):

$$\Psi z_1 + \theta \bar{z}_1 = -\tau_1.$$

Если же продифференцировать по ϑ уравнение кривой L_0

$$\Phi(z_0, \bar{z}_0, 0) = 0,$$

найдем:

$$\Psi z'_0 e^{i\vartheta} - \theta z'_0 e^{-i\vartheta} = 0.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует:

$$\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}'_0 e^{-i\vartheta}} = -\frac{\tau_1}{\Psi z'_0 e^{i\vartheta}} = -\frac{\tau_1}{\theta \bar{z}'_0 e^{-i\vartheta}} = \Lambda_1.$$

Вспомним, что z_0, так же как и z_1, представляет предельные значения функций, голоморфных всюду в единичном круге за исключением точки $\zeta = 0$, где первая из них наверное имеет полюс первого порядка, вторая же только может его иметь. Поэтому отношение

$$\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}}$$

будет предельным значением функции, голоморфной всюду при $|\zeta| \leqslant 1$. Граничное значение ее вещественной части находится из предыдущего равенства, которое может быть переписано в форме:

$$2\mathrm{Re}\left[\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}}\right] = \Lambda_1.$$

Граничное же значение мнимой части будет:

$$\mathrm{I}\left[\frac{z_1}{z'_0 e^{i\vartheta}}\right] = \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_1.$$

Отсюда

$$z_1 = \frac{z'_0 e^{i\vartheta}}{2}(\Lambda_1 - i\widetilde{\Lambda}_1).$$

Приравнивая нулю коэффициент при λ^2, найдем $z_2(\vartheta)$ и т. д.

Совершенно так же решается вопрос о конформном преобразовании круга на внешность кривой в том случае, когда эта последняя задана параметрически. Мы вкратце повторим рассуждения. Пусть контур задан уравнениями:

$$x = \varphi(t, \lambda), \quad y = \psi(t, \lambda)$$

или

$$z = x + iy = F(e^{it}, \lambda).$$

Допустим, далее, что при $\lambda = 0$ получаем кривую $z = F(e^{it}, 0)$ такую, что разложение функции $F(e^{it}, 0)$ в ряд по степеням e^{it} содер-

жит положительные степени e^{it} и лишь первую отрицательную степень, т. е. имеет вид:

$$z = \alpha_1 e^{-it} + \alpha_2 + \alpha_3 e^{it} + \alpha_4 e^{2it} + \ldots; \ \alpha_1 \neq 0.$$

Если бы оказалось, что в такой же ряд по степеням $e^{it} = \zeta$ разлагается и функция $F(e^{it}, \lambda)$, то этот ряд, после замены в нем e^{it} на ζ, и давал бы нам отображающую функцию. Здесь параметр t был бы полярным углом плоскости ζ. Так как этого, вообще говоря, нет, то разложение $F(e^{it}, \lambda)$ может содержать отрицательные степени e^{it} выше первой, и нашей задачей будет так заменить параметр

$$t = \vartheta + \lambda\varphi_1(\vartheta) + \lambda^2\varphi_2(\vartheta) + \ldots,$$

где $\varphi_1(\vartheta), \varphi_2(\vartheta), \ldots$, суть вещественные функции от ϑ, чтобы эти отрицательные степени e^{it} в разложении пропали.

Подставим в $F(e^{it}, \lambda)$ вместо t его выражение через ϑ. Свободный от λ член разложения по степеням λ полученного выражения есть $F(e^{it}, 0)$ и по условию содержит лишь первую отрицательную степень $e^{i\vartheta}$.

Найдем коэффициент при λ в первой степени:

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\left[F\left(e^{i\vartheta+\lambda\varphi_1+\cdots}, \lambda\right)\right]\right\}_{\lambda=0} = F_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)\, ie^{i\vartheta}\varphi_1 + F_\lambda(e^{i\vartheta}, 0) =$$
$$= ie^{i\vartheta}F_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)\left[\varphi_1 + \frac{F_\lambda(e^{i\vartheta}, 0)}{iF_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)}e^{-i\vartheta}\right].$$

Так как $F(e^{i\vartheta}, 0)$ содержит $e^{-i\vartheta}$, производная $F_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)$ будет содержать $e^{-2i\vartheta}$, и поэтому множитель перед скобкой будет содержать в своем разложении $e^{-i\vartheta}$. Таким образом, для того чтобы весь коэффициент при λ не содержал отрицательных степеней $e^{i\vartheta}$ выше первой, нужно выбрать φ_1 так, чтобы выражение в скобках в своем разложении вовсе не содержало бы отрицательных степеней. Пусть разложение в ряд второго слагаемого скобки имеет вид:

$$\frac{F_\lambda(e^{i\vartheta}, 0)}{iF_\zeta(e^{i\vartheta}, 0)}e^{-i\vartheta} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-in\vartheta}.$$

Чтобы вся скобка не содержала $e^{-i\vartheta}, e^{-2i\vartheta}, \ldots$ нужно, чтобы сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-in\vartheta}$ входила в состав функции φ_1 с обратным знаком. С другой стороны, так как φ_1 — вещественная функция, нужно, чтобы вторая составная часть φ_1 была сопряженной с первой и, следовательно, $\varphi_1(\vartheta)$ должна иметь такой вид: [1])

$$\varphi_1(\vartheta) = -\sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-in\vartheta} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}'_n e^{in\vartheta}.$$

---

[1]) При разыскании $\varphi_1(\vartheta)$ остается неопределенным свободный член разложения $\varphi_1(\vartheta)$ по степеням $e^{i\vartheta}$. В наших рассуждениях мы считаем его равным нулю.

Аналогичным образом $\varphi_2(\vartheta)$ выбирается из того требования, чтобы коэффициент при λ^2 в разложении $F(e^{i\vartheta}, \lambda)$ по степеням λ не содержал бы степеней выше первой величины $e^{-i\vartheta}$ и т. д. Идя таким путем, мы последовательно определим все коэффициенты $\varphi_n(\vartheta)$. Доказательство сходимости полученного таким путем разложения проводится так же, как и для случая отображения круга на внутренность кривой.

Пример 2. Найдем функцию, отображающую круг на внешность кривой

$$z = e^{-it} + \lambda e^{-ipt}.$$

При $\lambda = -\frac{1}{p}$ из уравнения получаются эпициклоиды различного порядка. В выражение для z подставим ряд для t и ограничимся при вычислениях третьей степенью параметра λ:

$$z = e^{-i(\vartheta+\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\lambda^3\varphi_3+\ldots)} + \lambda e^{-ip(\vartheta+\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\ldots)} =$$

$$= e^{-i\vartheta}\left[1 - i(\lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \lambda^3\varphi_3 + \ldots) + \frac{i^2}{2!}(\lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \ldots)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{i^3}{3!}(\lambda\varphi_1 + \ldots)^3 + \ldots\right] + \lambda e^{-ip\vartheta}\left[1 - ip(\lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \ldots) + \right.$$

$$\left. + \frac{i^2p^2}{2!}(\lambda\varphi_1 + \ldots)^2 + \ldots\right] = e^{-i\vartheta} + (-ie^{-i\vartheta}\varphi_1 + e^{-ip\vartheta})\lambda +$$

$$+ \left(-ie^{-i\vartheta}\varphi_2 - \frac{1}{2!}e^{-i\vartheta}\varphi_1^2 - ipe^{-ip\vartheta}\varphi_1\right)\lambda^2 +$$

$$+ \left[e^{-i\vartheta}\left(-i\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2 - \frac{i}{6}\varphi_1^3\right) + e^{-ip\vartheta}\left(-ip\varphi_2 - \frac{p^2}{2}\varphi_1^2\right)\right]\lambda^3 + \ldots$$

Рассмотрим коэффициент при λ:

$$-ie^{-i\vartheta}(\varphi_1 + ie^{-i(p-1)\vartheta}).$$

Отсюда видно, что скобка не будет содержать отрицательной степени $e^{i\vartheta}$ в том случае, когда

$$\varphi_1 = -ie^{-i(p-1)\vartheta} + ie^{i(p-1)\vartheta} = -2\sin(p-1)\vartheta,$$

и будет иметь тогда вид

$$-ie^{-i\vartheta}\,ie^{i(p-1)\vartheta} = e^{i(p-2)\vartheta}.$$

Перейдем к коэффициенту при λ^2:

$$-ie^{-i\vartheta}\left(\varphi_2 - \frac{i}{2}\varphi_1^2 + pe^{-i(p-1)\vartheta}\varphi_1\right) =$$

$$= -ie^{-i\vartheta}\left[\varphi_2 + \frac{i}{2}e^{2i(p-1)\vartheta} + i(p-1) - i\left(p - \frac{1}{2}\right)e^{-2i(p-1)\vartheta}\right].$$

Поэтому

$$\varphi_2 = i\left(p - \frac{1}{2}\right)(e^{-2i(p-1)\vartheta} - e^{2i(p-1)\vartheta}) = (2p-1)\sin 2(p-1)\vartheta.$$

Сам же коэффициент примет форму:

$$(p-1)(e^{-i\vartheta} - e^{i(2p-3)\vartheta}).$$

Наконец, коэффициент при λ^3 будет:

$$-ie^{-i\vartheta}\left(\varphi_3 - i\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{6}\varphi_1^3 + pe^{-i(p-1)\vartheta}\varphi_2 - \frac{i}{2}p^2e^{-i(p-1)\vartheta}\varphi_1^2\right) =$$
$$= -ie^{-i\vartheta}\left[\varphi_3 - i\left(p - \frac{2}{3}\right)e^{-3i(p-1)\vartheta} - i\left(\frac{p^2}{2} + 1 - \frac{3}{2}p\right)e^{i(p-1)\vartheta} - \right.$$
$$\left. - ip(p-1)e^{-i(p-1)\vartheta} + i\left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{3}{2}p + \frac{1}{3}\right)e^{-3i(p-1)\vartheta}\right];$$

следовательно,

$$\varphi_3 = ip(p-1)\left(e^{-i(p-1)\vartheta} - e^{i(p-1)\vartheta}\right) - i\left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{3}{2}p + \frac{1}{3}\right)\left(e^{-3i(p-1)\vartheta} - \right.$$
$$\left. - e^{3i(p-1)\vartheta}\right) = 2p(p-1)\sin(p-1)\vartheta - \left(3p^2 - 3p + \frac{2}{3}\right)\sin 3(p-1)\vartheta.$$

Подставив вместо φ_3 его значение в предыдущее выражение, будем иметь для коэффициента при λ^3 следующее значение:

$$-\left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{5}{2}p + 1\right)\left(e^{i(p-2)\vartheta} - e^{i(3p-4)\vartheta}\right).$$

Стало быть, приближенно, с точностью до третьей степени λ, уравнение контура в функции параметра ϑ имеет вид:

$$z = e^{-i\vartheta} - \lambda e^{i(p-2)\vartheta} + \lambda^2(p-1)\left(e^{-i\vartheta} - e^{i(2p-3)\vartheta}\right) -$$
$$- \lambda^3\left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{5}{2}p + 1\right)\left(e^{i(p-2)\vartheta} - e^{i(3p-4)\vartheta}\right)$$

и отображающая функция, таким образом, приближенно будет равна:

$$z = [1 + \lambda^2(p-1)]\frac{1}{\zeta} + \left[\lambda - \lambda^3\left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{5}{2}p + 1\right)\right]\zeta^{p-2} -$$
$$- \lambda^2(p-1)\zeta^{2p-3} - \lambda^3\left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{5}{2}p + 1\right)\zeta^{3p-4}.$$

§ 7. Метод П. В. Мелентьева приближенного конформного преобразования [1])

1. Алгорифм последовательных приближений. В инженерном деле очень часто контур той области, на которую надлежит отобразить круг, задается графически, и потому применение методов конформного преобразования, требующих аналитического задания контура, становится либо практически невозможным, либо требует затраты дополнительного труда по составлению уравнения его. Кроме того, если уравнение контура сложно, то применение тех же методов, если и остается принципиально возможным, то выкладки, связанные с ним, становятся часто настолько затруднительными, что предпочтительнее бывает обратиться к графическим методам решения задачи, если этого допускает требуемая точность результата, так как здесь она будет ограничена точностью тех инструментов, которые мы применяем при

[1]) П. В. Мелентьев [1].

работе, тогда как аналитические методы позволяют, вообще говоря, получать искомый результат с любой степенью точности.

Мы дадим сейчас один из таких методов, принадлежащий П. В. Мелентьеву, с успехом применявшему его к решению ряда практических вопросов.

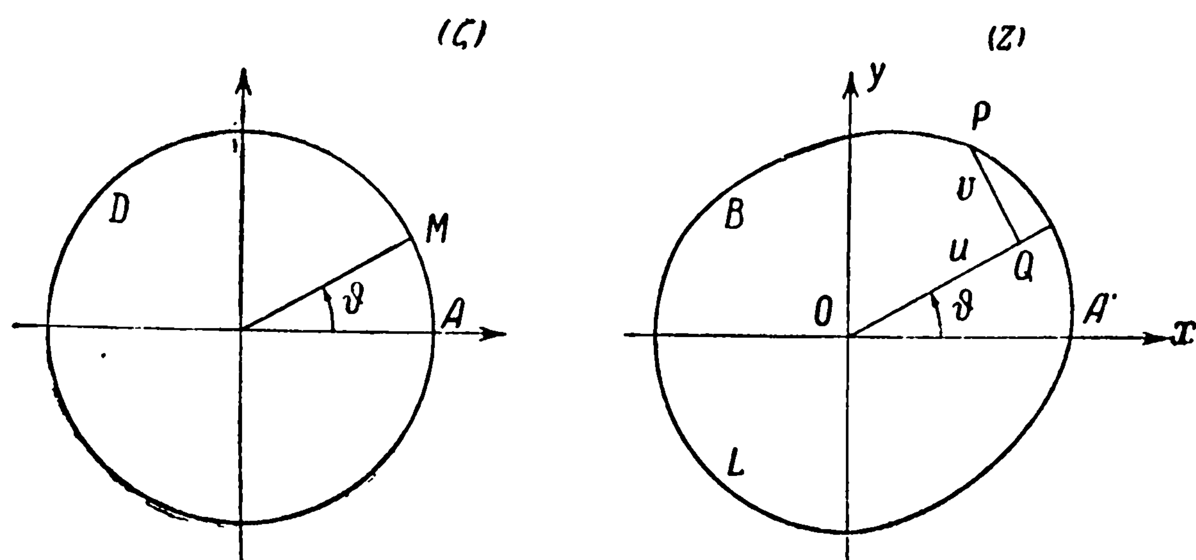


Рис. 30.

Пусть круг D единичного радиуса конформно отображается на односвязную однолистную область B аналитической функцией:

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\zeta^{n+1}=\alpha_0\zeta+\alpha_1\zeta^2+\ldots, \tag{1}$$

где

$$\alpha_n=a_n+ib_n.$$

При этом предполагается, что начало координат $\zeta=0$ переходит в точку $z=0$ внутри области B и точка A пересечения окружности круга с вещественной осью переходит в точку A' пересечения контура L области B с осью x (рис. 30).

Правая часть равенства (1) дает при $\zeta=1$ разложение в ряд Фурье вещественной и мнимой компонент числа z:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n+1)\vartheta-b_n\sin(n+1)\vartheta],$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}[b_n\cos(n+1)\vartheta+a_n\sin(n+1)\vartheta].$$

Ради удобства вычислений П. В. Мелентьев предлагает рассматривать зависимость не между x, y и ϑ, а между полярным углом ϑ и иными величинами, по поведению своему для простых областей более однообразными, нежели x и y. Он рассматривает отношение:

$$u+iv=w=\frac{z}{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n. \tag{2}$$

На границе круга D различие между w и z будет заключаться лишь в том, что аргумент у z будет на ϑ больше нежели у w. Чтобы по известному $z=P$, лежащему на контуре L, найти u и v, нужно от начала координат плоскости z провести луч OQ под углом ϑ и опустить на него перпендикуляр из P. Отрезок OQ луча будет равен u и отрезок QP перпендикуляра — равен v (см. рис. 30). Сразу же видно следующее: когда контур L области B будет близок к окружности, величина u будет близка к радиусу этой окружности, тогда как v будет все время близкой к нулю. Поведение же величин x и y будет значительно сложнее — оно будет близким к поведению тригонометрических функций.

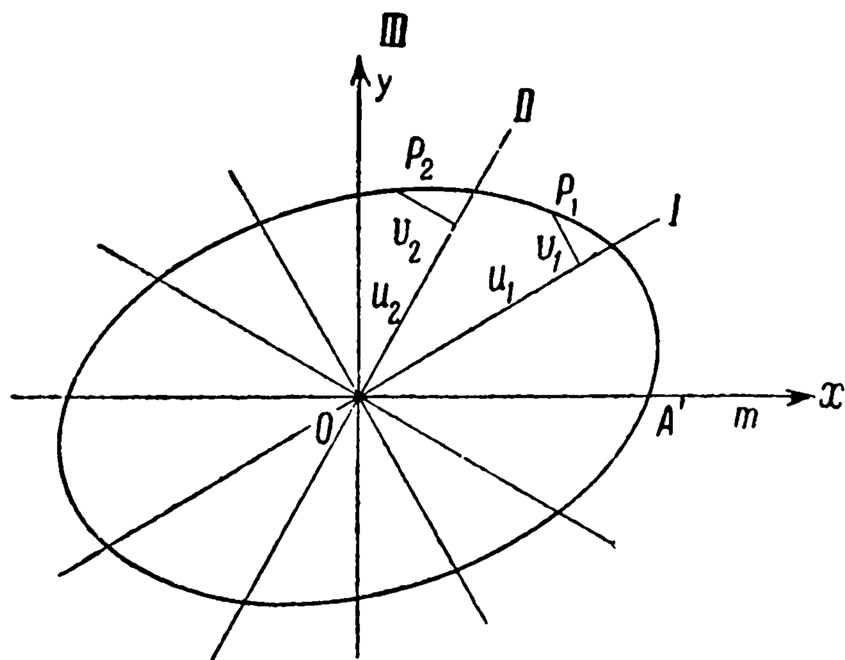


Рис. 31.

При $|\zeta|=1$ из равенства (2) следует:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta - b_n\sin n\vartheta),\\ v &= \sum_{n=0}^{\infty}(b_n\cos n\vartheta + a_n\sin n\vartheta). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

На использовании двух последних зависимостей и будут построены все вычисления. Для наших целей достаточно знать одну из функций u или v, ибо, ввиду их сопряженности, знание, например, u позволяет найти v с точностью до коэффициента b_0; но и последний равен, как сразу же можно видеть, сумме всех остальных b_n, взятой с обратным знаком, ибо при $\zeta=1$ u должно равняться вещественному числу, соответствующему точке A', и мнимая часть числа w должна быть нулем; но она равна сумме всех b_n и потому будет

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0,$$

откуда и следует:

$$b_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad (4)$$

Этим обстоятельством мы воспользуемся ниже при построении алгорифма последовательных приближений для определения чисел a_n и b_n.

Если ряды, стоящие в правых частях равенства (3), будут равномерно сходящимися, то можно выбрать такие отрезки их, чтобы погрешность была вне принятой точности вычислений для любых ϑ, т. е. в границах принятой точности круг D отображался бы на область B некоторым многочленом.

Допустим, что для достижения этого нужно взять в рядах (3) и (2) или (1) $\frac{m}{2}+1$ членов, положив

$$z=\alpha_0\zeta+\alpha_1\zeta^2+\ldots+\alpha_{\frac{m}{2}}\zeta^{\frac{m}{2}+1} \tag{5}$$

и

$$u+iv=w=\alpha_0+\alpha_1\zeta+\ldots+\alpha_{\frac{m}{2}}\zeta^{\frac{m}{2}}=\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}[(a_k\cos k\vartheta-b_k\sin k\vartheta)+ \\ +i(b_k\cos k\vartheta+a_k\sin k\vartheta)]. \tag{6}$$

Из теории рядов Фурье известно, что если функция приводится к тригонометрическому полиному, то, для того чтобы знать ее коэффициенты Фурье, достаточно знать значения этой функции только в некоторых точках. Чтобы не затруднять читателя ссылками на литературу, мы приведем вывод соответствующих равенств. Для этой цели разделим угол 2π около начала координат в плоскости ζ на m равных частей, проводя лучи I, II, ..., m (см. рис. 31). Взяв для соответствующих значений $\vartheta=2\frac{\pi}{m}$, $4\frac{\pi}{m}$, ..., 2π, одну из величин u или v, например u, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left(a_k\cos\frac{2\pi}{m}k-b_k\sin\frac{2\pi}{m}k\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n&=\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left(a_k\cos\frac{2\pi}{m}nk-b_k\sin\frac{2\pi}{m}nk\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m&=\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}(a_k\cos 2\pi k-b_k\sin 2\pi k). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Эти уравнения относительно коэффициентов a_k $\left(k=0, 1, \ldots, \frac{m}{2}\right)$ и $b_k\left(k=1, 2, \ldots, \frac{m}{2}-1\right)$ могут быть решены. Зависимость

коэффициентов от u_n дается следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &a_k = \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} u_n \cos\frac{2\pi}{m}nk;\\ &b_k = -\frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} u_n \sin\frac{2\pi}{m}nk \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}-1\right);\\ &a_0 = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} u_n; \qquad a_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n u_n. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Что касается величин b_0 и $b_{\frac{m}{2}}$, то их определить из системы уравнений (7), очевидно, нельзя, ибо коэффициенты при них будут нулями. Одну из них — b_0 мы сможем найти из условия соответствия точек A и A', выраженного равенством (4), которое для нашего случая приводится к

$$b_0 = -\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} b_k. \tag{9}$$

коэффициент же $b_{\frac{m}{2}}$ вообще не может быть найден. Взяв m достаточно большим, мы всегда можем считать $b_{\frac{m}{2}} = 0$.

Если бы мы взяли за исходную систему значений не u_n, а v_n, то, в силу $v_m = 0$, что видно из чертежа, получили бы следующие равенства для определения коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} &a_k = \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m-1} v_n \sin\frac{2\pi}{m}nk;\\ &b_k = \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m-1} v_n \cos\frac{2\pi}{m}nk \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}-1\right);\\ &b_0 = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1} v_n; \qquad b_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^n v_n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Равенство (9) здесь выполнится само собой, ибо, как видно из выражения для v_m,

$$\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} b_k = v_m = 0.$$

Две величины a_0 и $a_{\frac{m}{2}}$ не могут быть выражены через v_n. Выбором m мы опять можем сделать $a_{\frac{m}{2}}$ равным нулю. Коэффициент же a_0 здесь мы найдем из того требования, что u_m должно равняться заданной величине — длине отрезка $OA'=l$. Но

$$u_m=\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} a_k,$$

следовательно,

$$a_0=l-\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} a_k. \tag{11}$$

Нет нужды, ввиду однотипности доказательств, устанавливать справедливость всех групп формул (8) и (10); мы остановимся только на первой группе формул (8). Умножая равенства (7) последовательно на $\cos\frac{2\pi}{m}s$, $\cos\frac{2\pi}{m}2s$, ..., $\cos 2\pi s$ и складывая, получим:

$$\sum_{n=1}^{m} u_n\cos\frac{2\pi}{m}ns=$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left[a_k\sum_{n=1}^{m}\cos\frac{2\pi}{m}nk\cos\frac{2\pi}{m}ns-b_k\sum_{n=1}^{m}\sin\frac{2\pi}{m}nk\cos\frac{2\pi}{m}ns\right]$$

или, заменяя тригонометрические функции по формулам Эйлера, найдем, что правая часть равна:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left[a_k\sum_{n=1}^{m}\left(e^{i\frac{2\pi}{m}n(k+s)}+e^{i\frac{2\pi}{m}n(k-s)}+e^{i\frac{2\pi}{m}n(s-k)}+e^{i\frac{2\pi}{m}n(-s-k)}\right)+\right.$$

$$\left.+ib_k\sum_{n=1}^{m}\left(e^{i\frac{2\pi}{m}n(k+s)}+e^{i\frac{2\pi}{m}n(k-s)}-e^{i\frac{2\pi}{m}n(s-k)}-e^{i\frac{2\pi}{m}(-s-k)}\right)\right].$$

Все суммы, стоящие в квадратных скобках, вычисляются без затруднений. Очевидно, если p — целое число и $-m<p<m$, $p\neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}np}=e^{i\frac{2\pi}{m}p}\,\frac{e^{i2\pi p}-1}{e^{i\frac{2\pi}{m}p}-1}=0;$$

поэтому, так как индекс k удовлетворет неравенству $0\leqslant k\leqslant\frac{m}{2}$

и мы считаем $0<s<\frac{m}{2}$, а стало быть, $0<s+k<m$, всегда будет:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}(k+s)n}=\sum_{n=1}^{m} e^{-i\frac{2\pi}{m}(k+s)n}=0.$$

Остаются только две суммы

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}(k-s)n}$$

и

$$\sum_{n=1}^{m} e^{i\frac{2\pi}{m}(s-k)n}.$$

При $s\neq k$ обе они равны нулю; когда же $s=k$, они обе равны m. Следовательно, правая часть рассматриваемого равенства сведется к

$$\frac{1}{4}a_s(m+m)+\frac{i}{4}b_s(m-m)=\frac{m}{2}a_s,$$

что и доказывает требуемый результат.

Допустим теперь, что нам тем или иным путем удалось найти некоторые приближенные значения для $u_1, \ldots, u_m$, которые мы обозначим через $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_m^{(0)}$. Пользуясь ими, мы немедленно по формулам (8) и (9) и требованию $b_{\frac{m}{2}}=0$ найдем приближенные значения $a_k^{(0)}$, $b_k^{(0)}$ для коэффициентов a_k и b_k. Внося же их значения в равенства

$$u_n=\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\left(b_k\cos\frac{2\pi}{m}kn+a_k\sin\frac{2\pi}{m}kn\right), \tag{12}$$

вычислим приближенные значения $v_n^{(0)}$ для v_n и по $u_n^{(0)}$ и $v_n^{(0)}$ построим точки $M_1^{(0)}, \ldots, M_m^{(0)}$, являющиеся приближениями к точкам $M_1, M_2, \ldots M_m$. Если бы все они лежали на кривой, мы получили бы точные положения точек $M_1, M_2, \ldots, M_m$ и тем самым построили точно отображающий полином. Вообще же этого не будет. Если исходные значения для u_n мало разнились от действительных значений, то найденные нами точки $M_n^{(0)}$ будут мало отстоять от своих действительных положений на кривой L. Точки $M_n^{(0)}$ нужно каким-то способом снести на кривую L так, чтобы они, если и не совпадали бы со своими действительными положениями, то стали бы по возможности ближе к ним. Можно предложить три способа сноса:

1. Первым, наиболее, по-видимому, целесообразным, является способ сноса по кратчайшему расстоянию; из $M_n^{(0)}$ опускают на кривую L

перпендикуляры и концы этих перпендикуляров принимают за новое положение точек M_n (рис. 32).

2. Более простым по выполнению, но, вероятно, менее целесообразным является способ сноса по радиусу. Через $M_n^{(0)}$ и начало координат проводят прямую, и ближайшую к $M_n^{(0)}$ точку пересечения ее с кривой L принимают за новое положение M_n (рис. 33).

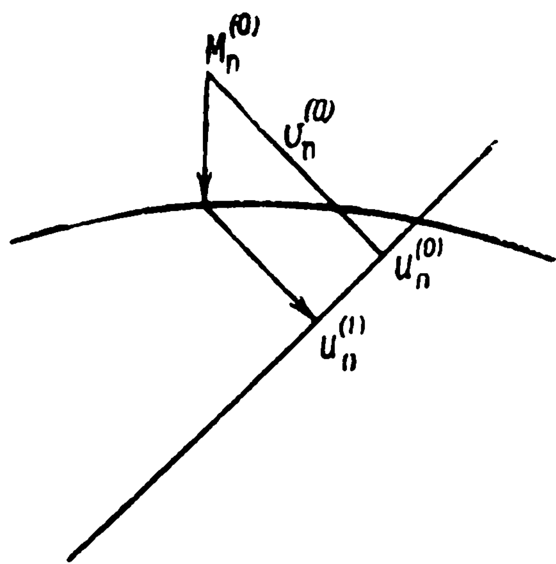


Рис. 32.

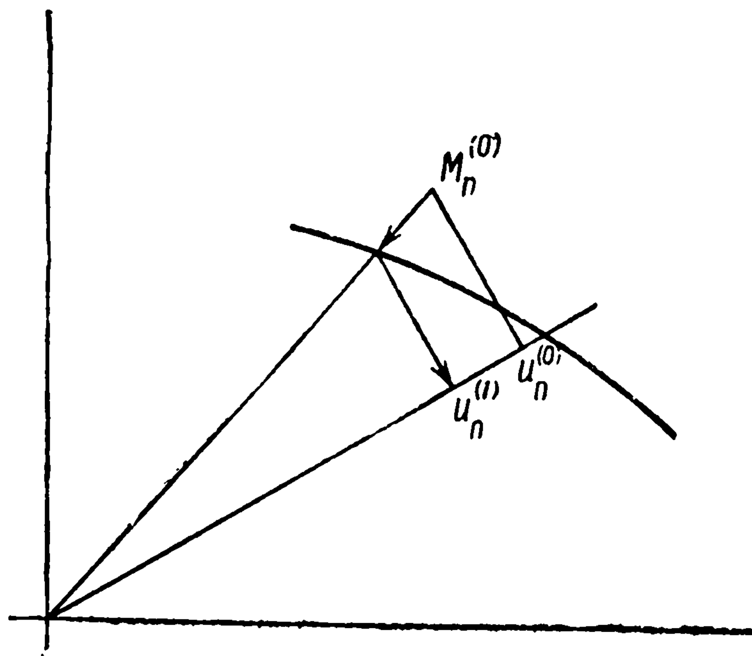


Рис. 33.

3. Наиболее простым (рис. 34), если прибегать к прозрачной палетке, изображенной на рис. 35, является способ переноса $M_n^{(0)}$ на кривую L

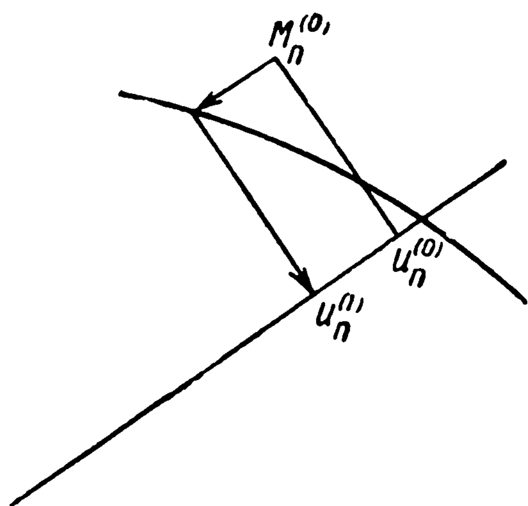


Рис. 34.

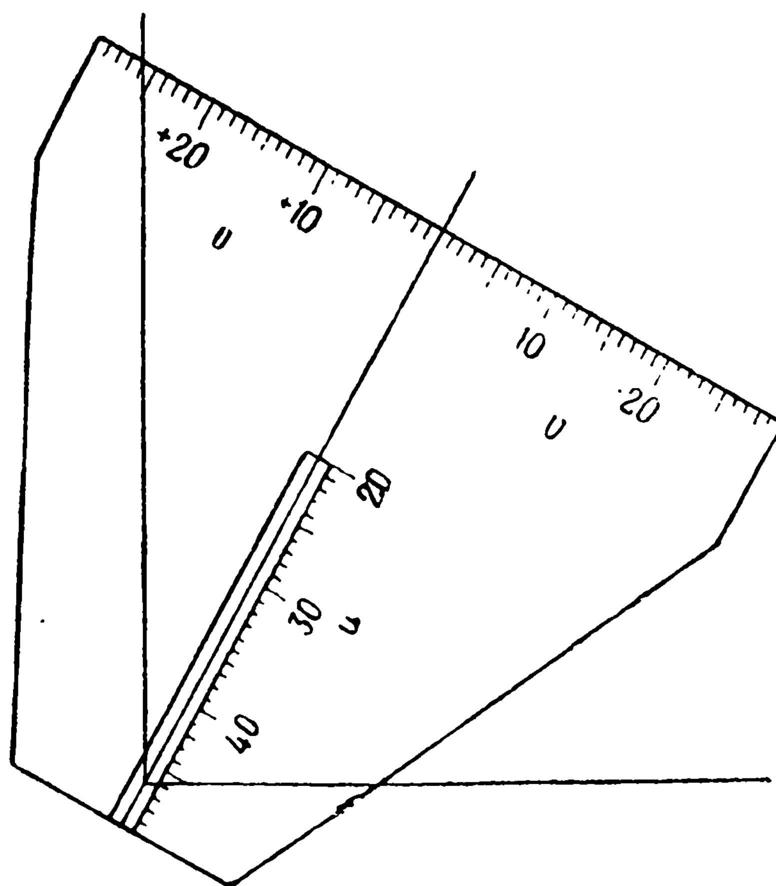


Рис. 35.

вдоль прямой, параллельной лучу $\vartheta = \frac{2\pi}{m} n$, т. е. при постоянном v_n. Палетку накладывают на чертеж так, чтобы основная линия u ее совпала с лучом $\vartheta = \frac{2\pi}{m} n$, а шкала v прошла бы через $M_n^{(0)}$. Отмечают на ней положение $M_n^{(0)}$ и двигают по лучу до тех пор, пока

отметка попадет в некоторую точку L — это и будет искомое новое положение M_n.

Заметим при этом, что в третьем способе сноса точек $M_n^{(0)}$ $\left(\text{параллельно лучу } \vartheta = \frac{2\pi}{m} n\right)$ при пользовании палетками для построения u_n нет необходимости действительно опускать перпендикуляры из точек $M_n^{(0)}$ на лучи, а достаточно просто прочесть отсчет $u_n^{(1)}$ на той же палетке.

Этот способ, из-за его простоты, применялся во всех нижеприводимых примерах.

Во всех трех случаях, следует думать, новые положения точек будут ближе к действительным, чем прежние. Из них мы опускаем на лучи $\vartheta = \frac{2\pi}{m} n$ перпендикуляры, принимаем отрезки лучей от начала до оснований перпендикуляров за новые значения $u_n^{(1)}$ для u_n и затем повторяем вычисления.

Несколько слов о сходимости. Повторяя эти вычисления, мы получим для каждой точки M_n последовательность приближений $M_n^{(0)}$, $M_n^{(1)}$, $M_n^{(2)}$, ... Далее возникает вопрос об определении условий, которым должен удовлетворять контур L, достаточных для того, чтобы каждая из найденных нами последовательностей приближений $M_n^{(0)}$, $M_n^{(1)}$, ... сходилась к предельной точке M_n. Этот вопрос, к сожалению, остается открытым до сих пор, и сходимость приходится исследовать при решении каждой отдельной задачи.

Но допустим, что эти последовательности оказались все сходящимися к некоторым предельным точкам M_n, лежащим на L. При каждом шаге вычислений мы подсчитывали приближения к коэффициентам a_k и b_k. Последовательности приближений к коэффициентам будут также сходящимися. Назовем предельные значения коэффициентов $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$.

Подставляя в равенство (5) вместо α_k значения $\tilde{\alpha}_k = \tilde{a}_k + i\tilde{b}_k$, найденные нами, построим полином от ζ степени $\frac{m}{2} + 1$:

$$z = \tilde{\alpha}_0 \zeta + \tilde{\alpha}_1 \zeta^2 + \ldots + \tilde{\alpha}_{\frac{m}{2}+1} \zeta^{\frac{m}{2}+1}.$$

Он будет давать преобразование единичной окружности на некоторую кривую L_m, которая имеет с данной кривой L m общих точек. При больших m эта кривая L_m будет, вообще говоря, мало отличаться от L, и можно ожидать, что при $m \to \infty$ кривые L_m будут стремиться совпасть с L. Если это случится, то построенные нами полиномы будут сходиться к функции, преобразующей круг $|\zeta| < 1$ на внутренность кривой L, как это показывается в теории конформных

преобразований. Но когда это будет, т. е. при каких L можно ожидать, что L_m будут стремиться совпасть с L, не выяснено и до настоящего времени.

2. Выбор первого приближения. Схема вычислений. Для того чтобы начать вычисление последовательных приближений, о которых говорилось в n° 1, нужно еще указать правило графического построения исходных значений $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Само собой разумеется, быстрота сходимости, а вместе с нею и количество необходимых вычислений будут тесно связаны с удачей или неудачей выбора этих приближений. Поступая грубо, можно было бы, особенно если контур L близок к окружности, принять все u_n за постоянные, равные радиусу некоторого круга, наилучшим образом подходящего к области B. Такой круг можно строить самыми разнообразными способами. Пусть R_1 есть наибольшее расстояние точек контура L от начала координат и R_2 — наименьшее расстояние, тогда за радиус упомянутого круга можно, например, взять среднее арифметическое $\frac{R_1+R_2}{2}$ чисел R_1 и R_2. Тот же прием можно использовать и для несколько более точного нахождения исходных значений для u_n. Разделим всю кривую на участки между максимумами и минимумами ее расстояния от начала координат. Для каждого из таких участков отдельно будем строить указанным способом свои начальные значения для u_n.

В некоторых случаях к более точным результатам приводит следующее построение. Проведем все лучи, требующиеся при вычислении последовательных приближений, и найдем длины отрезков их от начала координат до пересечения их с контуром L. За исходные значения u_n может быть взято среднее арифметическое длин всех отрезков.

В обоих этих случаях мы заменяем значения u_n для контура L на значения их для некоторой окружности, в которую переходит единичный круг при линейном преобразовании

$$z = \alpha\zeta.$$

Разница будет заключаться лишь в том или ином выборе числа α. Более точные методы построения значений $u_n^{(0)}$ можно указать, пользуясь более сложными функциями комплексной переменной.

Идея построений будет та же. Мы будем делить кривую L на участки и для каждого из них будем подбирать такую функцию, которая соответствующий этому участку кусок окружности преобразовала бы в кривую, по возможности близкую к взятому участку кривой. Тогда можно надеяться, что вспомогательная функция будет, вообще говоря, мало отличаться от искомой преобразующей функции на соответствующей дуге окружности и около нее, хотя, может быть, и весьма сильно отличаться от нее для других значений.

Рассмотрим первоначально функцию:

$$z = R\zeta + r\zeta^{p+1},$$

где R, r и p — вещественные положительные числа. Число p мы не предполагаем целым. Изучим теперь преобразование единичной окружности, совершаемое этой функцией.

Пусть точка ζ расположена на единичной окружности $\zeta = e^{i\vartheta}$. Из строения функции видно, что

$$\frac{z}{\zeta} = R + re^{ip\vartheta}$$

будет периодической функцией от ϑ периода $\frac{2\pi}{p}$. Поэтому нам достаточно изучить только кусок кривой, соответствующий изменению ϑ в интервале $-\frac{\pi}{p} \leqslant \vartheta \leqslant +\frac{\pi}{p}$. Очевидно, в силу вещественности чисел R и r, вещественная ось будет осью симметрии куска, и мы можем, следовательно, ограничить свое изучение лишь положительным полуинтервалом.

Из формулы

$$|z|^2 = |w|^2 = R^2 + 2Rr\cos p\vartheta + r^2$$

видно, что наибольшее значение $|z|$ имеет в нашем промежутке изменения ϑ при $\vartheta = 0$ и равен

$$R + r = R_1.$$

При ϑ, возрастающем от 0 до $\frac{\pi}{p}$, модуль числа z монотонно убывает и достигает своего наименьшего значения $R - r = R_2$ при $\vartheta = \frac{\pi}{p}$.

Для нахождения точки z, соответствующей заданному значению $\zeta = e^{i\vartheta}$, нужно от начала координат вдоль луча под углом ϑ относительно вещественной оси отложить отрезок длины R, из полученной точки под углом $\omega = p\vartheta$ к лучу провести прямую и на ней отложить отрезок длины r; конец этого отрезка и будет аффиксом z.

Особенно простым будет построение точки z, если найдена кривая, в которую переводится единичная окружность при помощи рассматриваемой функции. Тогда, после того как проведен луч и на нем отложено расстояние R от начала, достаточно из полученной точки описать окружность радиуса r. Она пересечет кривую в двух точках. Мы должны выбрать ту из них, которая будет соответствовать углу ω в построенной окружности, если начало отсчета вести от луча, о котором только что говорилось. Как легко понять, она

будет всегда лежать от луча в сторону ближайшей из осей симметрии $\vartheta = \pm \frac{\pi}{p}$, т. е. всегда будет ближе к началу координат.

Покажем сейчас, каким образом изучаемая функция может быть применена к нахождению исходного приближенного положения точек M_n. Разбиваем сначала кривую на участки между максимальными и минимальными расстояниями ее точек от начала координат. Берем какой-либо из них и измеряем угол около начала координат, на который он опирается. Пусть он будет равен χ. Полагая $p = \frac{\pi}{\chi}$ и принимая радиус-вектор, соответствующий более удаленному концу участка, за большую ось симметрии вспомогательной кривой, проделываем для лучей, лежащих внутри рассматриваемого участка, построение точек M.

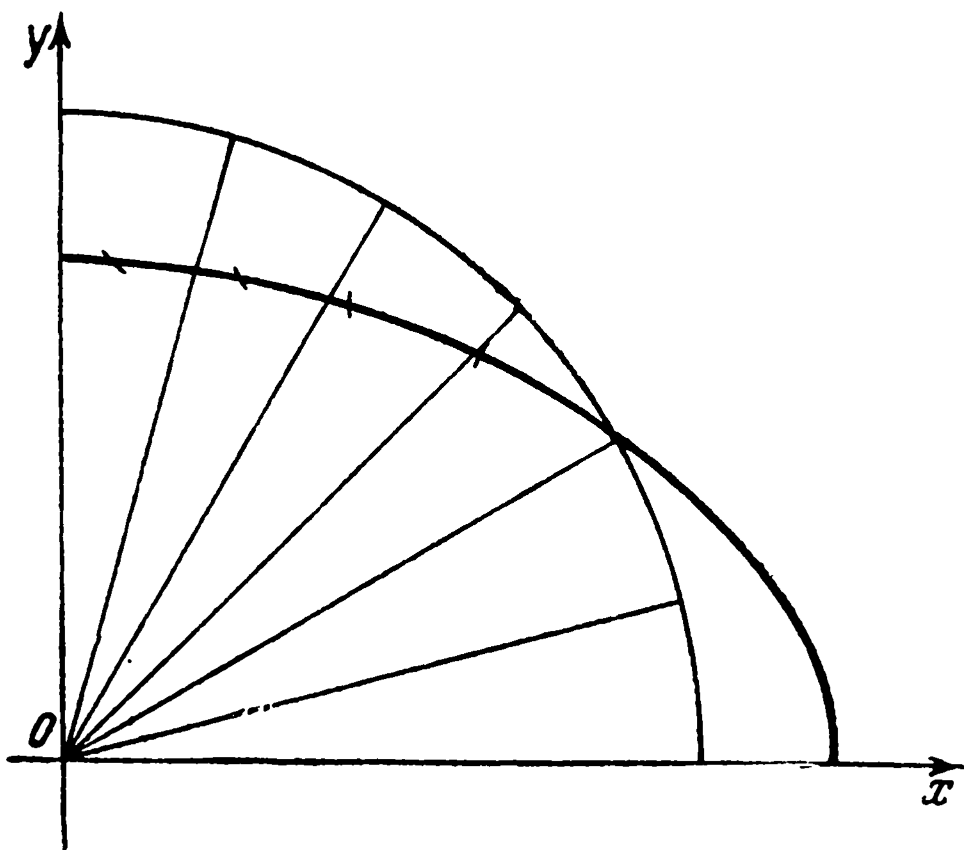


Рис. 36.

Построенные таким путем исходные приближения для точек не только не совпадают с их действительными положениями, но, вообще говоря, лежат даже вне кривой L. Но можно пытаться найти положения точек M_n, более близкие к действительным, чем построенные нами. С этой целью мы будем сносить построенные нами точки на кривую L. Проделать такой снос можно одним из этих способов, какие мы применяли в n° 1, но здесь проще применить способ сноса по дуге окружности радиуса r с центром на соответствующем луче, взятом на расстоянии R от начала. Построения весьма упрощаются, так как тогда отпадает необходимость искать углы $\omega = p\vartheta$. Для построения приближенного положения точки M_n на L нужно будет только из точки $Re^{i\vartheta}$ на луче как из центра описать окружность радиуса r и из точек пересечения ее с кривой L взять ближайшую к началу координат.

Пример такого сноса нами сделан на рис. 36 для эллипса с полуосями 3,75 и 2,3 *см*. В качестве второго примера нами взята кривая, изображенная на рис. 37. Участков между максимумами и минимумами расстояния ее точек от начала координат здесь 4. Нам нет нужды измерять углы, на которые опираются эти участки, так как они при построении нужны нам были для нахождения угла $p\vartheta$, откладываемого от луча для определения направления, в котором мы

должны отложить отрезок длины r. При сносе же по окружности построение этого луча является излишним, и нам достаточно для каждого участка знать только r и R, как это выяснено несколькими строками выше.

После того как найдем исходные положения точек M_n, опускаем перпендикуляр из них на соответствующие лучи и определяем исходные значения для u_n.

Таким способом построения $M_n^{(0)}$ мы будем пользоваться ниже во всех примерах. Простота геометрических построений, которые приходилось выполнять нам при разыскании $M_n^{(0)}$, имеет свое объяснение в том, что дополнительное слагаемое $r\zeta^p$ в функции

$$z=\zeta(R+r\zeta^p),$$

которым мы пытались приближенно учесть влияние того, что контур отступает от окружности, имело постоянный модуль, когда ζ менялось на окружности.

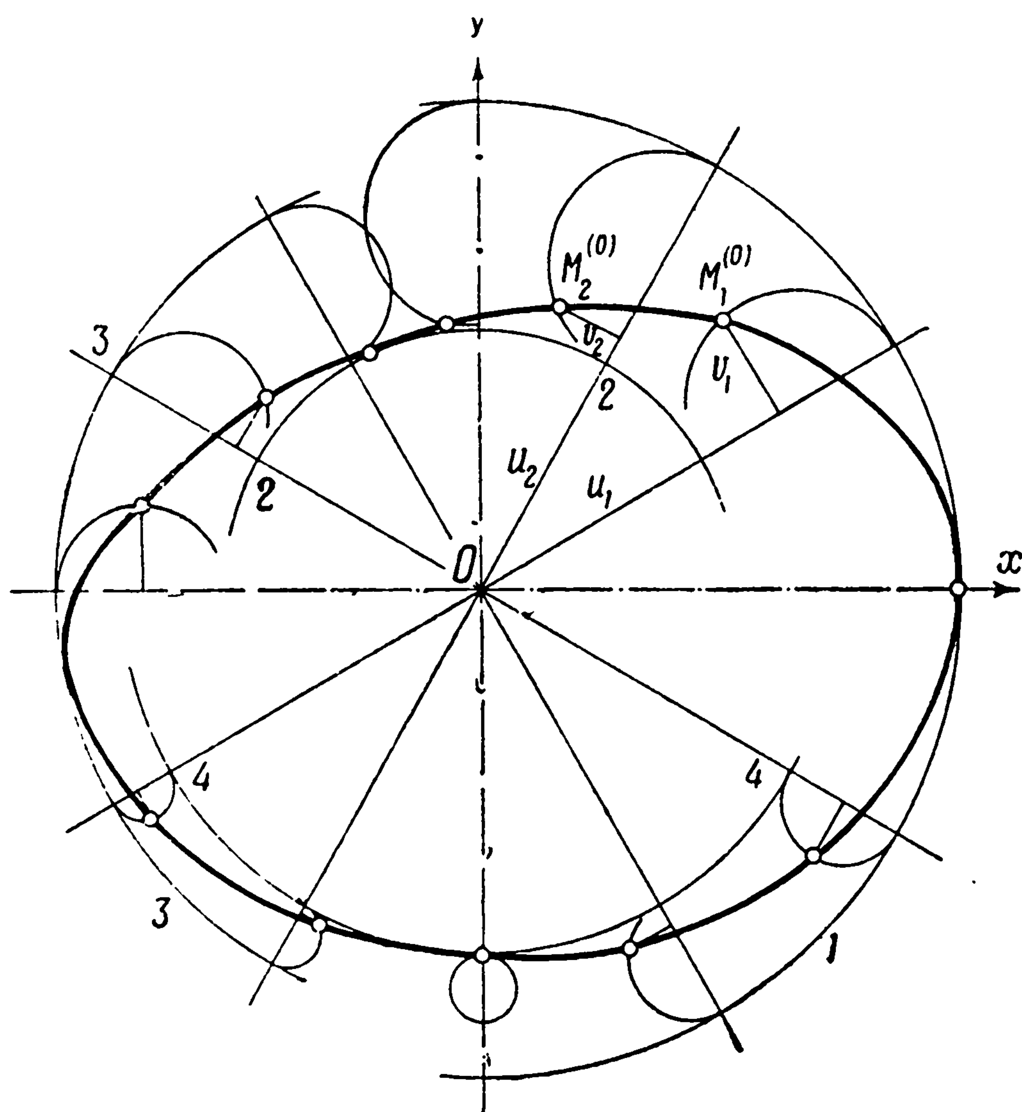


Рис. 37.

Тому же порядку идей принадлежит иной способ выбора вспомогательной функции, учитывающей отступление L от окружности. Можно воспользоваться любой из функций, преобразующих единичный круг сам на себя. Наличие дополнительного параметра — координаты той точки, в которую переходит центр при таком преобразовании, — позволит более точно определить $M_n^{(0)}$.

Такое усложнение теряет, однако, смысл, если после построения снести M_n на кривую L по упоминавшейся уже окружности, ибо тогда совершенно безразлично, какую из функций, сохраняющих постоянный модуль на окружности, мы берем, и естественно поэтому воспользоваться простейшей из них: $r\zeta^p$.

Мы укажем здесь на возможность использования еще одной функции $\frac{\zeta-c}{1-\zeta c}$, дающей преобразование единичного круга на самого себя с переносом точки c в центр и при применении своем требующей

сравнительно малых вычислений. Заменив в ней ζ на ζ^p, рассмотрим функцию:

$$z=\zeta\left(R+r\frac{\zeta^p-c}{1-c\zeta^p}\right)=a\zeta\frac{1+b\zeta^p}{1-c\zeta^p},$$

где

$$a=R-cr$$

и

$$b=\frac{r-cR}{R-cr}.$$

По-прежнему мы будем считать R, r и c вещественными и положительными и $c<1$. Имеем:

$$\frac{z}{\zeta}=w=R+r\frac{|\zeta|^p e^{i\vartheta p}-c}{1-c|\zeta|^p e^{i\vartheta p}},$$

откуда видно, что w есть периодическая функция от ϑ периода $\frac{2\pi}{p}$. Нам, как и выше, достаточно будет рассмотреть поэтому лишь значения w для угла $-\frac{\pi}{p}\leqslant\vartheta\leqslant+\frac{\pi}{p}$. Так как вещественная ось является осью симметрии функции, мы можем ограничиться только положительными ϑ.

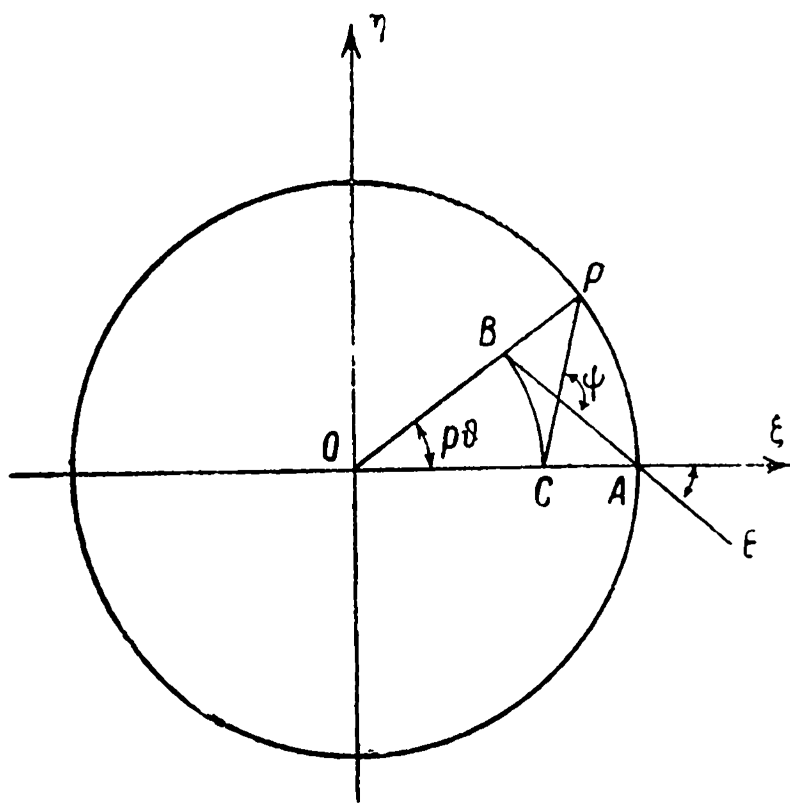


Рис. 38.

Проследим изменение w на окружности круга. Положим:

$$w=R+r\frac{e^{ip\vartheta}-c}{1-ce^{ip\vartheta}}.$$

Функция $\frac{t-c}{1-ct}$ дает преобразование единичного круга самого в себя так, что вещественная ось переходит в вещественную же ось и точка $+1$ переходит в точку $+1$. Отсюда следует, что аргумент дроби $\frac{e^{ip\vartheta}-c}{1-ce^{ip\vartheta}}$ будет возрастать от нуля до π, когда ϑ возрастает от нуля до $\frac{\pi}{p}$, и, следовательно, $|w|$ будет все время убывать и достигает своего наименьшего значения $R-r$ при $\vartheta=+\frac{\pi}{p}$. Наибольшее же его значение есть $R+r$, соответствующее $\vartheta=0$.

Чтобы найти точку z, соответствующую $\zeta=e^{i\vartheta}$, мы, как это следует из аналитического выражения для z, можем поступить следующим образом. Как видно из рис. 38, знаменатель $1-ce^{ip\vartheta}$ дроби $\alpha=\frac{e^{ip\vartheta}-c}{1-ce^{ip\vartheta}}$ есть вектор BA. Аргумент его есть взятый со знаком

минус угол $\xi\widehat{AE}$. Числитель же $e^{ip\vartheta}-c$ есть вектор CP и аргументом его будет угол $\widehat{ACP}$. Аргумент же всей дроби, равный разности между аргументами числителя и знаменателя, получится поэтому, если мы сложим абсолютные величины углов $\xi\widehat{AE}$ и $\widehat{ACP}$. Обозначим результат сложения через ψ. Таким образом, для нахождения z достаточно вдоль луча под углом ϑ к оси x отложить от начала отрезок длины R и затем на прямой под углом ψ к этому лучу отложить отрезок длины r; конец его и будет аффиксом z.

Особенно простым будет построение точки z, соответствующей $\zeta=e^{i\vartheta}$, в том случае, когда кривая, соответствующая дуге $-\frac{\pi}{p}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{p}$ окружности, геометрически найдена; тогда нет необходимости строить углы ψ и достаточно только из точки $Re^{i\vartheta}$ радиусом r описать окружность и из двух точек пересечения ее с кривой взять ближайшую к началу координат.

Дадим сейчас формулы, позволяющие найти параметры, определяющие рассматриваемую кривую по геометрическим элементам. Два из них R и r имеют простой геометрический смысл: R — есть полусумма максимального и минимального расстояний точек кривой от начала и r — их полуразность.

Для того чтобы определить c, прибегнем к следующему способу. Мы обозначили раньше $\arg\frac{e^{ip\vartheta}-c}{1-ce^{ip\vartheta}}$ через ψ. Поэтому

$$w=R+re^{i\psi}.$$

Положим здесь $\vartheta=\frac{\pi}{2p}$ и обозначим соответствующее значение ψ через $\psi_{\frac{1}{2}}$:

$$e^{i\psi_{\frac{1}{2}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}-c}{1-ce^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{i-c}{1-ic}=\frac{-2c}{1+c^2}+i\frac{1-c^2}{1+c^2},$$

откуда

$$\sin\psi_{\frac{1}{2}}=\frac{1-c^2}{1+c^2},\quad \cos\psi_{\frac{1}{2}}=-\frac{2c}{1+c^2},$$

$$c=-\frac{1-\sin\psi_{\frac{1}{2}}}{\cos\psi_{\frac{1}{2}}}.$$

Измерив угол $\psi_{\frac{1}{2}}$, найдем по этой формуле c.

После того как построены исходные значения для u_n, вычисления идут уже известным нам путем.

Формулы (8), (9) и (12), по которым они должны быть проделаны, есть, собственно говоря, формулы приближенного вычисления коэффициентов ряда Фурье или их комбинации, и поэтому для них может быть применен любой из большого числа способов вычислений, употребляемых в приближенном гармоническом анализе. Для ознакомления с ними мы отсылаем читателя к книгам, специально трактующим этот вопрос.[1] Здесь же, как на примере подобного рода расчетов, мы остановимся на способе, примененном автором метода при решении различного рода задач.

Положим

$$m=12, \frac{2\pi}{m}=30^\circ.$$

Формулы (8) и (9) для определения a_n и b_n в таком случае принимают вид:

$$a_0=\frac{1}{12}(u_1+u_2+\ldots+u_{12}),$$

$$a_1=\frac{2}{12}(u_1\cos 30^\circ+u_2\cos 60^\circ-u_4\cos 60^\circ-u_5\cos 30^\circ-u_6-$$
$$-u_7\cos 30^\circ-u_8\cos 60^\circ+u_{10}\cos 60^\circ+u_{11}\cos 30^\circ+u_{12}),$$

$$a_2=\frac{2}{12}(u_1\cos 60^\circ-u_2\cos 60^\circ-u_3-u_4\cos 60^\circ+u_5\cos 60^\circ+u_6+$$
$$+u_7\cos 60^\circ-u_8\cos 60^\circ-u_9-u_{10}\cos 60^\circ+u_{11}\cos 60^\circ+u_{12}),$$

$$a_3=\frac{2}{12}(-u_2+u_4-u_6+u_8-u_{10}+u_{12}),$$

$$a_4=\frac{2}{12}(-u_1\cos 60^\circ-u_2\cos 60^\circ+u_3-u_4\cos 60^\circ-u_5\cos 60^\circ+$$
$$+u_6-u_7\cos 60^\circ-u_8\cos 60^\circ+u_9-u_{10}\cos 60^\circ-u_{11}\cos 60^\circ+u_{12}),$$

$$a_5=\frac{2}{12}(-u_1\cos 30^\circ+u_2\cos 60^\circ-u_4\cos 60^\circ+u_5\cos 30^\circ-u_6+$$
$$+u_7\cos 30^\circ-u_8\cos 60^\circ+u_{10}\cos 60^\circ-u_{11}\cos 30^\circ+u_{12}),$$

$$a_6=\frac{1}{12}(-u_1+u_2-u_3+\ldots+u_{12}).$$

Формулы для $b_1, b_2, \ldots, b_5$ строятся так же, как и для $a_1, a_2, \ldots, a_6$, с той лишь разницей, что вместо функции cos стоит sin и множитель перед скобкой будет не $\frac{2}{12}$, а $-\frac{2}{12}$. Выписывать их мы по-

[1] См. например, А. Н. Крылов [3], Уиттекер и Робинсон [1] или В. И. Смирнов [1], т. II.

этому не будем. Коэффициент b_6 по условию принимаем равным нулю; равенство (9) для b_0 дает

$$b_0 = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_5).$$

Отсюда видно, что все коэффициенты a_n и b_n получаются из $u_1, \ldots, u_{12}$ путем умножения, если отбросить пока общий для всех них множитель $\frac{1}{12}$, на 1, $\sqrt{3} = 1{,}732 = 2\cos 30° = 2\sin 60°$ и 2, с последующим затем сложением или вычитанием.

u_k	1.732	1.00	2.00
k=0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

Рис. 39.

Сообразно с этим мы заранее заготовляем таблицу произведений u_n на указанные числа (рис. 39) и затем ряд шаблонов, по размерам одинаковых с таблицей, указанных на рис. 40а. Последние сделаны с тем расчетом, чтобы при наложении их на таблицу были видны лишь те числа таблицы, которые входят в образование соответствую-

Рис. 40а.

щего шаблону коэффициента. Так, например, в шаблоне для a_0 сделаны окна для всех чисел второго столбца, содержащего числа u_n;

в шаблоне для a_1 в первом столбце $u_n \cdot \sqrt{3}$ сделаны окна для u_1, u_5, u_7 и u_{11}; во втором столбце $u_n \cdot 1$ сделаны окна для u_2, u_4, u_8, u_{10} и в третьем столбце $u_n \cdot 2$ — для u_6 и $u_0 = u_{12}$ и т. д. Окна, дающие числа, которые должны быть взяты со знаком минус, отмечаем каким-либо способом от других окон шаблонов, например, как это сде-

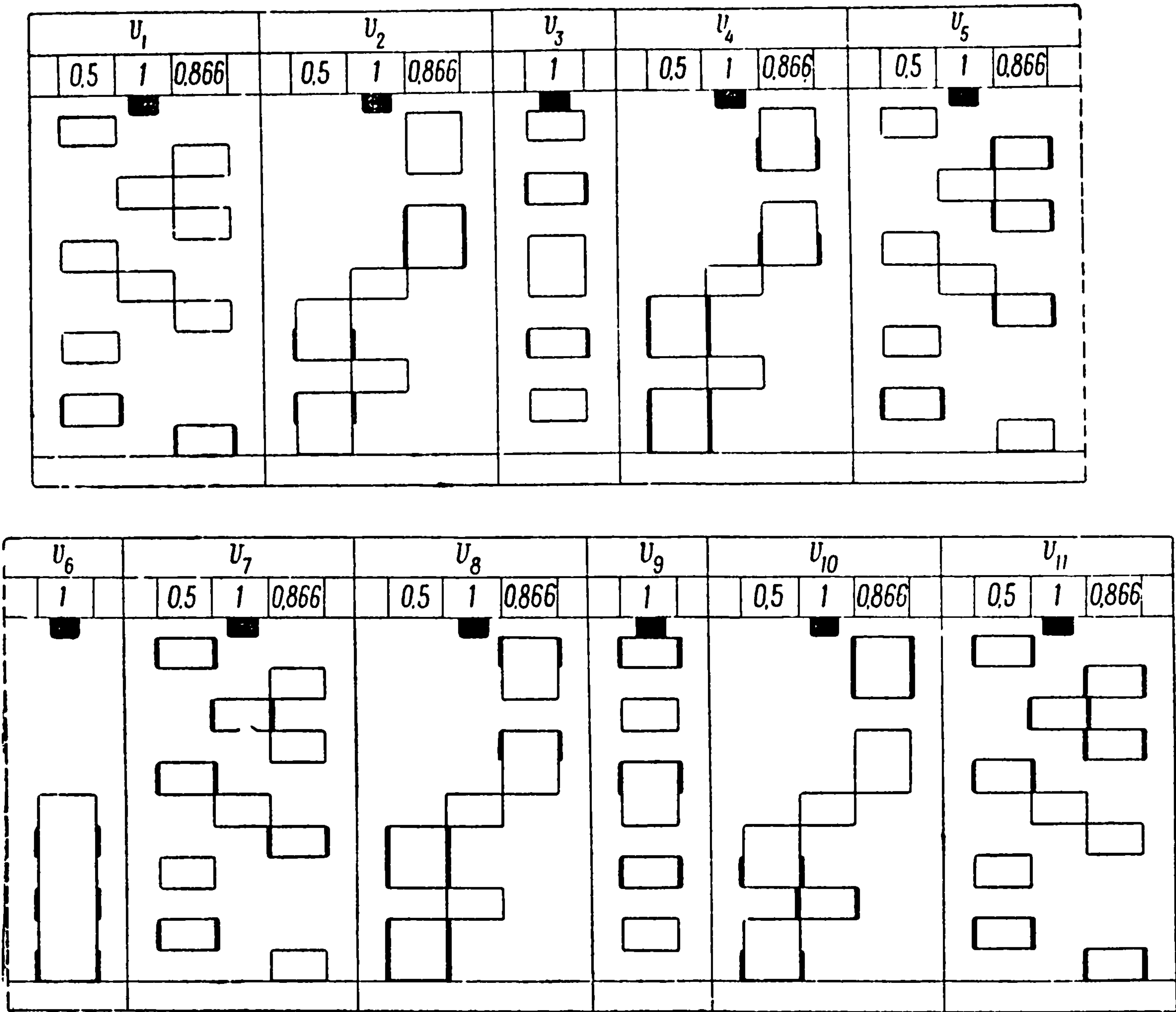


Рис. 40б.

лано на наших чертежах, отмечаем жирными чертами, поставленными сбоку.

Совершенно так же поступаем и при вычислении v_1, v_2, ...:

$$v_1 = b_0 + (b_1 \cos 30^\circ + a_1 \sin 30^\circ) + (b_2 \cos 60^\circ + a_2 \sin 60^\circ) + \ldots$$

. . . .

Все v_n образуются из сумм и разностей произведений a_n и b_n на 0; 0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$; 1, представляющих значения тригонометрических функций sin и cos для углов 0°, 30°, 60°, 90°. Таблицу таких произведений заготовляем так же, как таблицу для u_n (см. рис. 41).

Для вычисления v_n по составленной таблице изготовляем по тому же принципу, что и раньше, шаблоны, приведенные нами на рис. 40б.

u_k	1,732	1	2	1,732	1	2
		[redacted]			[redacted]	
$k=0$ (12)	—	115,5	231	—	115,5	231
1	176	101,5	203	181	104,5	209
2	164	94,5	189	169	97,5	195
3	—	88	176	—	89,5	179
4	135	78	156	136	78,5	157
5	148,5	68,5	137	117	67,5	135
6	—	63	126	—	62	124
7	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123
8	107,5	62	124	108	62,5	125
9	—	68	136	—	68	136
10	139,5	80,5	161	143	82,5	165
11	176	101,5	203	176	101,5	203

	Σ / Σ_+	Σ_-	D	$:12=$	Σ / Σ_+	Σ_-	D	$:12=$
$:12=a_0$	982,5	—	—	81,9	991	—	—	82,6
a_1	758	491	267	22,2	768	488,5	279,5	23,3
a_2	690	627	63	5,2	690	636	54	4,5
a_3	511	476	35	2,9	513	484	29	2,4
a_4	669	648	21	1,7	670	656	14	1,2
a_5	631	618	13	1,1	634,5	622	12,5	1,0
a_6	493,5	489	4,5	0,4	498,5	492,5	6	0,5

	Σ_+	Σ_-	D	$:12=$	Σ_+	Σ_-	D	$:12=$
b_1	545	645	100	− 8,3	550	656	− 106	− 8,8
b_2	569	554	15	1,2	572	564,5	7,5	0,6
b_3	502	476	26	2,2	505	480	25	2,1
b_4	566	557	9	0,8	570	566,5	3,5	0,3
b_5	597	593	4	0,3	604	602	2	0,2
$-\sum b = b_0$				3,8				5,6

b_k a_k	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
		[redacted]			[redacted]	
$k=1$	11,1	22,2	19,2	11,6	23,3	20,2
2	—	5,2	4,5	—	4,5	3,9
3	—	2,9	—	—	2,4	—
4	—	1,7	1,5	—	1,2	1,1
5	0,5	1,1	1,0	0,5	1,0	0,9
$k=0$	—	3,8	—	—	5,6	—
1	− 4,1	− 8,3	− 7,2	− 4,4	− 8,8	− 7,6
2	0,6	1,2	—	0,3	0,6	—
3	—	2,2	—	—	2,1	—
4	0,4	0,8	—	0,1	0,3	—
5	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2	0,2

	Σ_+	Σ_-	=	Σ_+	Σ_-	=
v_1	17,7	0,7	17,0	17,8	0,3	17,5
v_2	23,8	5,4	18,4	25,4	4,5	20,9
v_3	27,9	4,1	23,8	30,2	3,0	27,2
v_4	26,7	2,5	24,2	29,0	0,9	28,1
v_5	19,2	− 0,8	20,0	20,6	− 2,5	23,1
v_6	5,8	− 5,8	11,6	6,5	− 6,5	13,0
v_7	10,7	7,7	3,0	11,1	7,0	4,1
v_8	11,5	17,7	− 6,2	12,5	17,4	− 4,9
v_9	7,5	24,5	− 17,0	8,3	24,9	− 16,6
v_{10}	2,6	26,6	− 24,0	3,3	26,6	− 23,3
v_{11}	− 2,8	21,2	− 24,0	− 1,7	19,8	− 21,5

Таблица 1

1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2
	[redacted]			[redacted]			[redacted]			[redacted]	
—	115,5	231	—	115,5	231	—	115,5	231	—	115,5	231
181	104,5	209	181	104,5	209	181	104,5	209	180	104	208
168	97	194	168	97	194	167	96,5	193	167	96,5	193
—	88	176	—	88	176	—	88	176	—	88	176
131,1	76	152	132,5	76,5	153	132,5	76,5	153	132,5	76,5	153
113,5	65,5	131	116	67	134	115	66,5	133	115	66,5	133
—	62	124	—	62,5	125	—	62	124	—	62	124
106,5	61,5	123	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123
108	62,5	125	108	62,5	125	108	62,5	125	108	62,5	125
—	68	136	—	67,5	135	—	68	136	—	68	136
143,5	83	166	141	81,5	163	143	82,5	165	143	82,5	165
178	103	206	176,5	102	204	176,5	102	204	177,5	102,5	205

986,5	—	—	82,2	986	—	—	82,2	986	—	—	82,2	986	—	—	82,2
770	482,5	287,5	24,0	767	486,5	280,5	23,4	767,5	484,5	283	23,6	767,5	484,5	283	23,6
689,5	630,5	59	4,9	691	628,5	62,5	5,2	689,5	630	59,5	5,0	689,5	630	59,5	5,0
508	484	24	2,0	509	482	22	2,2	509	482	27	2,2	509	482	27	2,2
667	653	14	1,2	667	652,5	14,5	1,2	667	652,5	14,5	1,2	667	652,5	14,5	1,2
631	621,5	9,5	0,8	632	621,5	10,5	0,9	631,5	620,5	11	0,9	631,5	620,5	11	0,9
496	490,5	5,5	0,5	495,5	490,5	5	0,4	495,5	490,5	5	0,4	495,5	490,5	5	0,4

552	645,5	— 93,5	— 7,8	547,5	648	— 100,5	— 8,4	550,5	646,5	— 96	— 8,0	551	646	— 95	— 7,9
566,5	563,5	3	0,2	566	563,5	2,2	0,2	557	562,5	4,5	0,4	568	561,5	6,5	0,5
505	476	29	2,4	503	478	2,5	2,1	503	478	2,5	2,1	504	477	2,5	2,2
567,5	562,5	5	0,4	568,5	561	7,5	0,6	566,5	563	3,5	0,3	567,5	562	5,5	0,5
600	597,5	2,5	0,2	599	596,5	2,5	0,2	599	598	1	0,1	599,5	597,5	2	0,2
			4,6				5,3				5,1				4,5

0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
	[redacted]			[redacted]			[redacted]				
12,0	24	20,8	11,7	23,4	20,3	11,8	23,6	20,5			
—	4,9	4,2	—	5,2	4,5	—	5,0	4,3			
—	2,0	—	—	2,2	—	—	2,2	—			
—	1,2	1,0	—	1,2	1,0	—	1,2	1,0			
0,4	0,8	0,7	0,4	0,9	0,8	0,4	0,9	0,8			
—	4,6	—	—	5,3	—	—	5,1	—			
—3,9	—7,8	—6,8	—4,2	—8,4	—7,3	—4,0	—8,0	—7,0			
0,1	0,2	—	0,1	0,2	—	0,2	0,4	—			
—	2,4	—	—	2,1	—	—	2,1	—			
0,2	0,4	—	0,3	0,6	—	0,1	0,3	—			
0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0	0,1	0,1			

17,5	0,4	17,1	17,9	0,5	17,4	18,0	0,2	17,8			
25,9	4,3	21,6	26,2	4,1	22,1	26,0	4,1	21,9			
29,8	2,2	27,6	29,2	2,4	26,8	29,9	2,6	27,3			
28,8	1,4	27,4	28,7	1,6	27,1	28,7	1,4	27,3			
19,3	— 1,4	20,7	19,9	— 1,5	21,4	19,8	— 1,6	21,4			
5,2	— 5,2	10,4	6,1	— 6,1	12,2	5,8	— 5,8	11,6			
10,1	7,8	3,3	11,1	7,3	3,8	10,7	7,5	3,2			
11,9	18,3	— 6,4	12,7	17,6	— 4,9	12,3	17,8	— 5,5			
7,0	25,0	— 18,0	8,1	24,5	—16,4	7,6	24,9	—17,3			
2,6	27,6	— 25,0	3,2	27,1	—23,9	3,0	27,1	—24,1			
— 2,1	20,5	— 22,1	— 1,9	20,3	—22,2	19,9	— 1,7	21,6			

Пусть нам требуется отобразить единичный круг на область, ограниченную кривой, изображенной на рис. 42 в уменьшенном виде. Построение исходных значений для u_n и умножение их на 1; 1,732; 2 дают нам три первых столбца, помещенных в левом верхнем углу табл. 1, на которой производим запись расчета. Накладываем на эти столбцы шаблон для a_0, суммируем все числа, стоящие в окнах, и записываем полученное число (982,5) в строку a_0 в первый столбец, помеченный знаком $\sum_+$; результат деления ее, так как

b_k	a_k	0,5	1	0,866
	$k=1$			
	2			
	3			
	4			
	5			
$k=0$				
1				
2				
3				
4				
5				

Рис. 41.

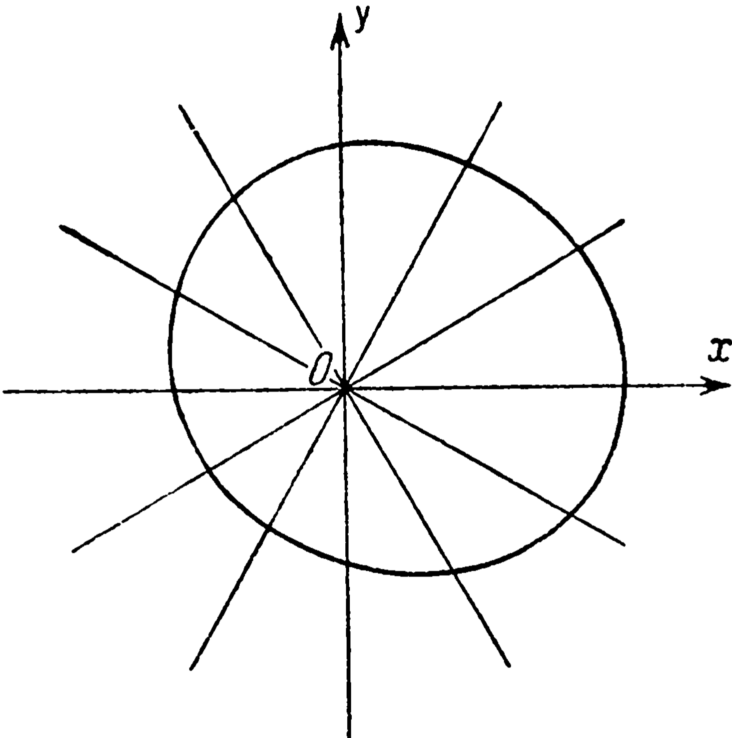


Рис. 42.

отрицательных слагаемых в этом случае нет, переносим в четвертый столбец против a_0, помеченный знаком : 12. После этого накладываем шаблон для a_1, суммируем все числа в неотмеченных жирными чертами окнах и записываем результат (758) в столбец $\sum_+$ против a_1; суммируем все числа в отмеченных окнах и результат (491) записываем в столбец $\sum_-$; из первой суммы вычитаем вторую, вносим разность (267) в столбец D, делим на 12 и частное (22,2) записываем в четвертый столбец и т. д.

После того как найдены b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, суммируем их и, взяв результат с обратным знаком, получаем b_0, что указано нами в последней строке второго раздела таблицы. По полученным значениям a_n и b_n составляем таблицу из произведений a_n, b_n на 0,5; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 1. Она занимает начало третьего раздела. Пользуясь шаблонами для v_n, находим первые приближения для них обычным путем. Запись в бланке не нуждается в пояснениях. Получив v_n, графическим путем определяем новые значения для u_n и продолжаем вычисления тем же способом. Вычисления продолжены до пятого приближения. Судить о полученной точности можно по тому, что пятые приближения для u_n отличаются от четвертых только в двух случаях (u_1 и u_{11}), в осталь-

ных же совпадают; относительное расхождение составляет величину, меньшую 0,5%.

Для вещественных частей a_n коэффициентов ряда Тэйлора четвертое и пятое приближения не отличаются друг от друга. Хуже дело обстоит с b_n; это обстоятельство может быть, по-видимому, объяснено тем, что именно те из них, за исключением b_0, которые показывают наиболее сильное колебание, являются величинами порядка последнего знака в принятой точности вычислений, и колебания суть, вероятно, результаты округлений.

Приближенное значение отображающей функции будет:

$$z = (82{,}2 + 4{,}5i)\zeta + (23{,}6 - 7{,}9i)\zeta^2 + (5{,}0 + 0{,}5i)\zeta^3 + \\ + (2{,}2 + 2{,}2i)\zeta^4 + (1{,}2 + 0{,}5i)\zeta^5 + (0{,}9 + 0{,}2i)\zeta^6 + 0{,}4\zeta^7.$$

3. Об отображении внешних областей. Будем искать функцию, преобразующую конформно внешность единичного круга на внешность кривой. Известно, что в случае сохранения при преобразовании бесконечно далекой точки она имеет вид:

$$z = \alpha_0\zeta + \alpha_1 + \alpha_2\zeta^{-1} + \ldots + \alpha_n\zeta^{1-n} + \ldots \tag{13}$$

Будем требовать, для определенности, чтобы точка A вещественной оси плоскости ζ вновь переходила бы в точку A' вещественной оси плоскости z. Допустим опять, что при взятой точности вычислений отображение совершается следующей рациональной функцией, являющейся отрезком ряда (13):

$$z = \alpha_0\zeta + \alpha_1 + \alpha_2\zeta^{-1} + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}}\zeta^{1-\frac{m}{2}}. \tag{14}$$

Пусть w имеет прежний смысл. Зависимость между a_n, b_n и вещественной и мнимой частями u, v для $|\zeta| = 1$ будет даваться здесь равенствами:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{m/2} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \\ v &= \sum_{k=0}^{m/2} (b_k \cos k\vartheta - a_k \sin k\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из этих равенств видно, что сравнительно с (8) и (3):

1) зависимость a_k от u_n не изменяется;

2) при получении b_k мы должны взять у суммы другой знак по сравнению с прежним;

Таблица 2

u_k	1,732	1	2	1,732	1	2
		[redacted]			[redacted]	
$k=0$ (12)	—	115,5	231	—	115,5	231
1	190,5	110	220	190,5	110	220
2	174	100,5	201	174	100,5	201
3	—	95	190	—	96	192
4	154	89	178	155	89,5	179
5	138,5	80	160	138,5	80	160
6	—	68,5	137	—	68,5	137
7	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123
8	116	67	134	116	67	134
9	—	84	168	—	84	168
10	173	100	200	173	100	200
11	191	110,5	221	191	110,5	221

	Σ / Σ_+	Σ_-	D	: 12	Σ / Σ_+	Σ_-	D	: 12
Σ : 12 = a_0	1081,0			90,1	1083			90,2
a_1	813	538	275	22,9	813	538,5	274,5	22,9
a_2	730	714,5	15,5	1,3	730	717	13	1,1
a_3	543	538	5	0,4	544	538	5	0,5
a_4	726	718,5	7,5	0,6	728	719	9	0,7
a_5	676,5	674,5	2	0,2	676,5	675	1,5	0,1
a_6	540,5	541	−0,5	0	541	542	−1	−0,1
b_1	629	708	79	6,6	629	711	82	6,8
b_2	656,5	587	−69,5	−5,8	657,5	587	−70,5	−5,9
b_3	534	548	14	1,2	536	548	12	1,0
b_4	619,5	624	4,5	0,4	619,5	625	5,5	0,5
b_5	668	669	1	0,1	669	671	2	0,2
$-\sum b = b_0$				−2,5				−2,6

b_k $-a_k$	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
		[redacted]			[redacted]	
$k=1$	−11,4	−22,9	−19,8			
2	—	−1,3	−1,1			
3	—	−0,4	—			
4	—	−0,6	−0,5			
5	−0,1	−0,2	−0,2			
$k=0$	—	−2,5	—			
1	3,3	6,6	5,7			
2	−2,9	−5,8	—			
3	—	1,2	—			
4	0,2	0,4	—			
5	0	0,1	0,1			

Σ_+ Σ_- $D=$						
v_1	−13,2	0,3	−13,5			
v_2	−19,9	−2,4	−17,5			
v_3	−25,2	−6,2	−19,0			
v_4	−21,6	−0,7	−20,9			
v_5	−17,2	4,3	−21,5			
v_6	−7,9	7,9	−15,8			
v_7	−6,9	−6,0	−0,9			
v_8	−2,6	−19,7	17,1			
v_9	−2,5	−28,9	26,4			
v_{10}	0,3	−22,6	22,9			
v_{11}	0,3	−13,2	13,5			

3) при вычислении v_n все a_k берутся с противоположным знаком. Все остальное сохраняется. Вычисления проводятся по той же схеме и при пользовании теми же шаблонами.

Для разыскания первого приближения можно указать прием, совершенно подобный примененному нами при отображении внутренних областей.

За вспомогательную функцию здесь можно взять:

$$z = a\zeta \frac{1 + b\zeta^{-p}}{1 - c\zeta^{-p}}.$$

Все прежние формулы сохраняются и сейчас с одним лишь различием. Всюду в них вместо $\theta = p\vartheta$ нужно взять $-\theta$. Это же, как сразу видно, имеет следствием то обстоятельство, что из двух точек пересечения вспомогательной окружности радиуса r с кривой Λ мы должны будем взять ту, которая дальше отстоит от начала координат.

Для случаев отображения внешности круга на внешность кривой рис. 42 мы приводим расчет. Как уже говорилось, для получения b_n мы берем в нем не $\frac{D}{12}$, а $-\frac{D}{12}$ и при нахождении v_n в табл. 2 записываем произведения не a_n, а $-a_n$ на 0,5; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 1.

Как видно из табл. 2, сходимость весьма быстрая; уже исходное графическое приближение дало достаточно точный результат.

Отображающая функция приближенно имеет следующее выражение:

$$z = (90{,}2 - 2{,}6i)\zeta + (22{,}9 + 6{,}8i) + (1{,}1 - 5{,}9i)\zeta^{-1} + \\ + (0{,}5 + 0{,}1i)\zeta^{-2} + (0{,}7 + 0{,}5i)\zeta^{-3} + (0{,}1 + 0{,}2i)\zeta^{-4} - 0{,}1\zeta^{-5}.$$

4. Случай симметричных контуров. Примеры. Если область B, ограниченная кривой L, обладает p осями симметрии, отображающая функция будет иметь вид:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{1+kp} \tag{16}$$

для внутренних областей и

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{1-kp} \tag{17}$$

для внешних областей.

Соотношения (6) и (15) примут форму:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kp\vartheta,$$

$$v=\pm\sum_{k=0}^{m} a_k \sin kp\vartheta,$$

где знак плюс берется для внутренних областей и минус для внешних.

Рассмотрим угол между вещественной осью и ближайшей осью симметрии, лежащей в направлении положительного вращения от нее. Раствор его равен $\frac{\pi}{p}$. Разделим его на m равных частей $\frac{\pi}{pm}$ и положим:

$$\vartheta=0,\ \frac{\pi}{pm},\ \ldots,\ \frac{\pi}{pm}(m-1).$$

Обозначим соответствующие этим лучам значения функций u и v через u_0, v_0, u_1, v_1, ...:

$$\left.\begin{aligned} u_n&=\sum_{k=0}^{m} a_k \cos kp\frac{\pi}{pm}n=\sum_{k=0}^{m} a_k \cos\frac{\pi}{m}kn,\\ v_n&=\pm\sum_{k=0}^{m} a_k \sin kp\frac{\pi}{pm}n=\pm\sum_{k=0}^{m} a_k \sin\frac{\pi}{m}kn. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из них просто получаются равенства для нахождения коэффициентов a_k:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{2m}(u_0+u_m)+\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}u_n,\\ a_m&=\frac{1}{2m}[u_0+(-1)^m u_m]+\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^n u_n,\\ a_k&=\frac{1}{m}[u_0+(-1)^k u_m]+\frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m-1}u_n\cos\frac{\pi}{m}nk\\ &\qquad (1\leqslant k\leqslant m-1). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Так как p в формулы (18) и (19) не входит, расчет остается одинаковым для всех случаев осей симметрии. Число p сказывается только в расположении лучей.

Мы остановимся для иллюстрации расположения вычислений при пользовании формулами (18) и (19) для решения задач на случае $m=6$. Равенства (19) примут тогда вид:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{12}[u_0+u_6+2(u_1+u_2+\ldots+u_5)],\\
a_6 &= \frac{1}{12}[u_0+u_6+2(-u_1+u_2-u_3+u_4-u_5)],\\
a_1 &= \frac{1}{6}[u_0-u_6+\sqrt{3}(u_1-u_5)+(u_2-u_4)],\\
a_2 &= \frac{1}{6}[u_0+u_6+u_1-u_2-2u_3-u_4+u_5],\\
a_3 &= \frac{1}{6}[u_0-u_6-2u_2+2u_4],\\
a_4 &= \frac{1}{6}[u_0+u_6-u_1-u_2+2u_3-u_4-u_5],\\
a_5 &= \frac{1}{6}[u_0-u_6-\sqrt{3}u_1+u_2-u_4+\sqrt{3}u_5].
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Уравнения же, из которых должны быть определены v_n, будут иметь форму:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= \pm\left[0{,}5(a_1+a_5)+\frac{\sqrt{3}}{2}(a_2+a_4)+a_3\right],\\
v_2 &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}[a_1+a_2-a_4-a_5],\\
v_3 &= \pm[a_1-a_3+a_5],\\
v_4 &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}[a_1-a_2+a_4-a_5],\\
v_5 &= \pm\left|0{,}5(a_1+a_5)-\frac{\sqrt{3}}{2}(a_2+a_4)+a_3\right|.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Для вычисления последовательных приближений к коэффициентам a_k заготовляем таблицу значений u_n и их произведений на 2, $\sqrt{3}=1{,}732$ (рис. 43) и шаблоны для каждого из a_k (рис. 44).

u_k	1,732	1	2
$k=0$ 1 2 3 4 5 6			

Рис. 43.

При нахождении v_n с той же целью составляем таблицу (рис. 45) и шаблоны, изображенные на рис. 46. Принцип составления их остается прежним и не требует пояснений.

Таблица 3

u_k	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2
		■			■			■	
$k=0$	—	150	—	—	150	—	—	150	
1	232	134	268	233	134,5	269	—	134,5	
2	—	118,5	237	—	120	240	—	120	
3	—	109,5	219	—	110	220	—	110	
4	—	104	208	—	104,5	209	—	104,5	
5	175	101	202	175	101	202	—	101	
6	—	100	—	—	100	—	—	100	

Σ, Σ+, Σ−, D												
Σ : 12 = a_0	1384			115,3	1390			115,8			
Σ+ Σ− D : 6 = a_1	500,5	379	121,5	20,2	503	379,5	123,5	20,6			
a_2	485	441,5	43,5	7,2	485,5	444,5	41,0	6,8			
a_3	358	337	21	3,5	359	340	19	3,2			
a_4	469	457,5	11,5	1,9	470	460	10	1,7			
a_5	443,5	436	7,5	1,2	445	437,5	7,5	1,2			
: 12 = a_6	695	689	6	0,5	699	691	8	0,7			

a_k	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866			
		■			■				
$k=1$	10,1	20,2	17,5	10,3	20,6	17,9			
2	—	7,2	6,2	—	6,8	5,8			
3	—	3,5	—	—	3,2	—			
4	—	1,9	1,6	—	1,7	1,5			
5	0,6	1,2	1	0,6	1,2	1,0			

Σ+ Σ− D =	1,732	1	2	1,732	1	2			
v_1			22,0			21,4			
v_2	23,7	2,6	21,1	23,7	2,5	21,2			
v_3	21,4	3,5	17,9	21,8	3,2	18,6			
v_4	19,1	7,2	11,9	19,4	6,8	12,6			
v_5	14,2	7,8	6,4	14,1	7,3	6,8			

Таблица 4

u_k	1,732	1	2	1,732	1	2
		[redacted]			[redacted]	
$k=0$	—	100	—	—	100	—
1	176,5	102	204	176,5	102	204
2	—	108	216	—	107,5	215
3	—	116,5	233	—	116,5	233
4	—	126,5	253	—	126	252
5	235,5	136	172	235,5	136	272
6	—	141,5	—	—	141,5	—

Σ / Σ_+	Σ_-	D								
			$:12=a_0$	1419,5			118,3	1417,5			118,1
			$:6=$ a_1	384,5	503,5	—119	—19,8	384	503	—119	—19,8
			a_2	479,5	467,5	12	2,0	479,5	466,5	13	2,2
			a_3	353	357,5	— 4,5	— 0,7	352	356,5	—4,5	— 0,7
			a_4	474,5	472,5	2	0,3	474,5	471,5	3	0,5
			a_5	443,5	444,5	— 1	— 0,2	443	444	—1	— 0,2
			$:12=a_6$	710,5	709	1,5	0,1	708,5	709	—0,5	0

$-a_k$	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
		[redacted]			[redacted]	
$k=1$	9,9	19,8	17,1			
2	—	—2,0	—1,7			
3	—	0,7	—			
4	—	—0,3	—0,3			
5	0,1	0,2	0,2			

Σ_+	Σ_-	$D=$							
			v_1			8,7			
			v_2	15,0	—0,1	15,5			
			v_3	20,0	0,7	19,3			
			v_4	16,8	—0,5	18,3			
			v_5	10,7	2,0	12,7			

Табл. 3 заполнена расчетом преобразования круга радиуса 1 *мм* на внутренность эллипса с полуосями 100 и 150 *мм*. Преобразующая функция имеет вид

$$z = 115{,}8\zeta + 20{,}6\zeta^3 + 6{,}8\zeta^5 + 3{,}2\zeta^7 + 1{,}7\zeta^9 + 1{,}2\zeta^{11} + 0{,}7\zeta^{13},$$

Рис. 44.

a_k	1,732	1	2
$k=1$			
2			
3			
4			
5			

Рис. 45.

Рис. 46.

В табл. 4 приведены расчеты для разыскания функции, дающей конформное преобразование внешности круга на внешность квадрата со стороной 200 *мм*. В результате вычислений получаем:

$$z = 118{,}1\zeta - 19{,}8\zeta^{-3} + 2{,}2\zeta^{-7} - 0{,}7\zeta^{-11} + 0{,}5\zeta^{-15} - 0{,}2\zeta^{-19}.$$

§ 8. Функция Грина и конформное преобразование областей

1. Введение. Функция Грина для задачи Дирихле. При решении задач математической физики и техники, связанных с гармоническими функциями, во многих случаях бывают полезными специальные гармонические функции, обладающие некоторыми особенностями, о которых мы будем говорить ниже. Эти функции называются функциями Грина по имени английского физика, впервые введшего их в употребление.

Определения и свойства их существенно зависят, во-первых, от того, какая задача исследуется, и, во-вторых, в пространстве какого числа измерений решается эта задача. Нас будет сейчас интересовать плоский случай, когда гармоническая функция зависит от двух аргу-

ментов, и именно в этом случае мы рассмотрим функции Грина для наиболее часто встречающихся задач.

Выясним связь между функцией Грина для той или иной задачи, которую мы решаем в заданной области B, и проблемой конформного преобразования этой области на некоторую другую область канонического типа. Вид этих канонических областей для каждой задачи мы выясним ниже.

При изложении мы ограничимся только односвязными областями, так как случай многосвязных областей более сложен и на нем мы не имеем возможности останавливаться в этой книге.

Чтобы облегчить чтение, мы повторим здесь известные определения функций Грина и выведем некоторые необходимые нам формулы. Заметим, что определения, конечно, не будут зависеть от того, какую связность имеет область, и будут одинаковыми для областей любой связности. Односвязность области будет иметь значение лишь при установлении связи между функцией Грина и задачей конформного преобразования области.

Начнем с задачи Дирихле. Пусть в плоскости, отнесенной к координатной системе xy, дана некоторая область B, ограниченная контуром L. Выберем в ней некоторую точку $M_0(x_0, y_0)$ и фиксируем ее. Под функцией Грина для задачи Дирихле в области B с полюсом в M_0 понимают функцию $G(x, y; x_0, y_0)$, удовлетворяющую следующим требованиям:

1. $G(x, y; x_0, y_0)$ как функция от x и y — гармоническая всюду в B за исключением точки M_0.

2. Вблизи точки M_0 функция $G(x, y; x_0, y_0)$ имеет строение

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(x, y; x_0, y_0),$$

где $g(x, y; x_0, y_0)$ есть функция, гармоническая в B всюду, включая и точку M_0, а r — расстояние M_0M от выбранной нами точки M_0 до переменной точки M:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

3. $G(x, y; x_0, y_0)$ обращается в нуль, когда точка M лежит на контуре L.

Опираясь на теорему единственности решения задачи Дирихле, можно легко показать, что этими тремя требованиями функция $G(x, y; x_0, y_0)$ определяется вполне.

При помощи $G(x, y; x_0, y_0)$, как мы сейчас покажем, может быть решена задача Дирихле для области B при любых непрерывных граничных значениях в явном виде. Чтобы получить нужное выражение гармонической функции в любой точке области B через ее значения на границе и $G(x, y; x_0, y_0)$, мы рассмотрим формулу Грина. Если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в B вместе со своими произ-

водными до второго порядка включительно, то имеет место следующее равенство:

$$\int_B\int (u\Delta v - v\Delta u)\,d\sigma = \int_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \qquad (1)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ есть оператор Лапласа, $d\sigma$ — элемент площади области B, ds — элемент длины дуги контура L и n — внешняя нормаль к контуру L в точке $M(x, y)$.

Пусть в формуле u есть нужная нам гармоническая функция, а v есть функция Грина $G(x, y;\ x_0, y_0)$ с полюсом в M_0.

Непосредственно к u и G формула Грина (1) не может быть применена, так как G имеет разрыв в точке M_0, а именно, по условию 2 из определения функции Грина следует, что в M_0 она обращается в бесконечность. Опишем около M_0 как около центра окружность C_ε малого радиуса ε и исключим из области круг с границей C_ε (рис. 47). Мы получим некоторую новую область B_ε, граница которой состоит из кривых L и C_ε. В B_ε и u и $G(x, y;\ x_0, y_0)$ будут удовлетворять всем условиям непрерывности, которые требует формула Грина (1), и сама формула к u и $G(x, y;\ x_0, y_0)$ в B_ε может быть применена.

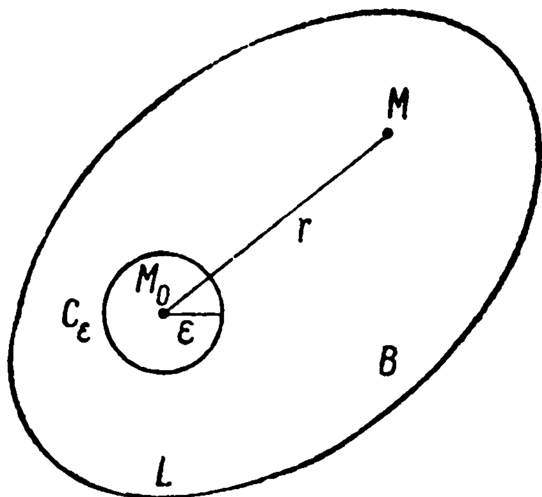


Рис. 47.

Если принять во внимание, что в B_ε $\Delta u = 0$ и $\Delta G = 0$, то из (1) следует:

$$\int_{L+C_\varepsilon} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \qquad (2)$$

Напомним, что под n здесь мы должны понимать нормаль к контуру $L + C_\varepsilon$, внешнюю для B_ε. На L это будет нормаль к L, внешняя относительно B, и на C_ε это есть внутренняя нормаль к C_ε.

Интеграл по $L + C_\varepsilon$ разобьем на два интеграла по L и по C_ε. Первый из них не зависит от ε. Мы оставим его пока в стороне и исследуем интеграл по C_ε. Если в него вместо $G(x, y;\ x_0, y_0)$ подставить ее значение $G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g$, то этот интеграл разобьется на четыре следующих интеграла:

$$\int_{C_\varepsilon} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \frac{1}{2\pi}\int_{C_\varepsilon} u\,\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds + \\ + \int_{C_\varepsilon} u\frac{\partial g}{\partial n}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{C_\varepsilon} \ln\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \int_{C_\varepsilon} g\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Будем здесь безгранично уменьшать ε и определим предел, к которому будет стремиться каждый из написанных интегралов.

Внутренняя нормаль к C_ε направлена по радиусу $r = M_0M$. Но так как направление этой нормали противоположно направлению возрастания r, то

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r},$$

и, стало быть,

$$\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial r} = \frac{1}{r}.$$

Кроме того, для окружности r имеет постоянное значение ε, и поэтому первый из интересующих нас интегралов будет равен

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_\varepsilon} u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} ds = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{C_\varepsilon} u\, ds.$$

В правой части равенства стоит среднее арифметическое из значений, которые принимает гармоническая функция u на окружности C_ε. По теореме Гаусса оно равно значению $u(x_0, y_0)$, которое принимает u в центре M_0 окружности C_ε. Значит, при всяких ε рассматриваемый интеграл равен $u(x_0, y_0)$.

Возьмем теперь третий из рассматриваемых интегралов. Примем во внимание, что здесь $r = \varepsilon$, так что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_\varepsilon} \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2\pi} \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Но, по известному свойству гармонической функции, $\int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$, и, следовательно, этот интеграл при любых ε равен нулю.

Что касается двух оставшихся интегралов, то легко доказывается, что оба они будут стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$. Действительно,

$$\left| \int\limits_{C_\varepsilon} u \frac{\partial g}{\partial n} ds \right| \leqslant \left| u \frac{\partial g}{\partial n} \right|_{\max} \cdot 2\pi\varepsilon,$$

$$\left| \int\limits_{C_\varepsilon} g \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \leqslant \left| g \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\max} \cdot 2\pi\varepsilon.$$

Так как u, g, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial g}{\partial n}$ в окрестности точки M_0 есть функции ограниченные, то ясно, что правые части этих неравенств, а стало быть, и сами интегралы будут стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$.

В пределе, когда $\varepsilon = 0$, равенство (2) дает следующий результат:

$$\int_L \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds + u(x_0, y_0) = 0.$$

Отсюда, ввиду того что по условию 3 G на L обращается в нуль, получаем нужное нам значение $u(x_0, y_0)$ гармонической функции $u(x, y)$ в любой внутренней точке M_0 области B через те значения, которые принимает $u(x, y)$ на границе L области:

$$u(x_0, y_0) = -\int_L u \frac{\partial G}{\partial n} ds. \tag{3}$$

Если известна функция Грина $G(x, y; x_0, y_0)$ для B, то эта формула позволяет решить задачу Дирихле при любых непрерывных или даже кусочно-непрерывных граничных значениях гармонической функции $u(x, y)$.

Перейдем теперь к установлению связи функции Грина с конформным преобразованием.

Будем считать теперь область B односвязной. Введем комплексное переменное $z = x + iy$ и назовем $z_0 = x_0 + iy_0$ комплексную координату полюса M_0 функции Грина $G(x, y; x_0, y_0)$.

Рассмотрим функцию $\zeta = \rho e^{i\vartheta} = f(z)$, дающую конформное преобразование области B на круг единичного радиуса $|\zeta| < 1$ плоскости ζ такое, что точка z_0 переходит в центр круга: $f(z_0) = 0$.

Мы имеем в виду показать, что:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z)|}. \tag{4}$$

Точка z_0 есть единственный нуль функции $f(z)$. Кратность его равна единице, и поэтому отношение

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \chi(z)$$

будет функцией, регулярной всюду в B и отличной от нуля. Логарифм $\chi(z)$ есть, следовательно, также регулярная функция в B. Обозначим ее через $u + iv$. Тогда

$$f(z) = (z - z_0) e^{u+iv}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} u; \quad z - z_0 = re^{i\varphi}.$$

Легко проверить, что $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z)|}$ удовлетворяет всем трем требованиям, которые мы формулировали выше и которые определяют единственным образом функцию Грина $G(x, y; x_0, y_0)$. В самом деле,

как логарифм модуля регулярной функции $\frac{1}{f(z)}$ с единственным простым полюсом в z_0 эта функция будет гармонической всюду в B, за исключением самой точки z_0. В окрестности же этой точки она имеет требуемую особенность логарифмического типа $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+g(x,\ y)$, причем $g(x,\ y)=-\frac{1}{2\pi}u$.

На границе L области $|f(z)|$ обращается в единицу и поэтому $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z)|}$ там обращается в нуль.

Этим доказано, что функция Грина $G(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$ и функция $f(z)$, доставляющая конформное преобразование B на единичный круг $|\zeta|<1$, связаны друг с другом соотношением (4).

Для вопросов конформного преобразования, которыми мы занимаемся в настоящей главе, важно отметить, что если известна функция Грина $G(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$ для односвязной области, то по ней можно построить функцию $f(z)$, конформно преобразующую B на круг единичного радиуса.

Пусть, в самом деле, известна функция $G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+g(x,\ y)$. Для каждого из двух слагаемых, входящих в G, построим сопряженную гармоническую функцию. Для

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

это будет

$$-\frac{1}{2\pi}\varphi,$$

где φ есть аргумент $z-z_0$. Что же касается функции, сопряженной с $g(x,\ y)$, то она восстанавливается при помощи хорошо известного криволинейного интеграла с точностью до произвольного постоянного слагаемого:

$$h(x,\ y)=\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,dy-\frac{\partial g}{\partial y}\,dx\right)+C.$$

Функция $f(z)$, совершающая нужное преобразование области B, будет даваться следующим равенством:

$$\zeta=f(z)=re^{i\varphi}\cdot e^{-2\pi\,(g+ih)}=(z-z_0)e^{-2\pi(g+ih)}.$$

Входящее в состав $h(x,\ y)$ произвольное постоянное слагаемое соответствует вращению круга $|\zeta|<1$ около начала координат.

Построение самой функции Грина $G(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$ равносильно нахождению гармонической функции $g(x,\ y)$. Граничные значения ее определятся из того соображения, что на L $G(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$ должна

обратиться в нуль и, стало быть, $g(x, y)$ на L должна принимать значения, равные $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$. Таким образом, задача конформного преобразования области B на круг приводится к решению задачи Дирихле при граничном условии

$$g(x, y)|_L = \frac{1}{2\pi}\ln r.$$

Сделаем еще одно простое замечание, которое полезно иметь в виду при практических вычислениях. Значение функции Грина с полюсом в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ позволит найти по формуле (3) значение решения задачи Дирихле в точке z_0. Чтобы вычислить по этой формуле решение в другой точке, например $z_1 = x_1 + iy_1$, нужно перевычислить функцию Грина, поместив теперь полюс в точку z_1. Функцию Грина для этого нового положения полюса обозначим $G(x, y; x_1, y_1)$. Оказывается, что две функции с полюсами в z_0 и z_1 связаны друг с другом очень простой зависимостью, которую мы и имеем в виду сейчас установить. Пусть будет известна $G(x, y; x_0, y_0)$; покажем, как по ней можно построить $G(x, y; x_1, y_1)$.

По известной $G(x, y; x_0, y_0)$ находим соответствующую ей функцию $\zeta = f(z)$, совершающую конформное преобразование B на единичный круг $|\zeta| < 1$ так, чтобы z_0 переходила в центр круга. Эти две функции друг с другом связаны соотношением (4).

При преобразовании $\zeta = f(z)$ точка z_1 перейдет в некоторую точку $\zeta_1 = f(z_1)$, которая может быть найдена по известной функции $f(z)$. Чтобы определить $G(x, y; x_1, y_1)$ по формуле (4), нам нужно найти функцию $\zeta = f_1(z)$, которая преобразовывала бы область B на тот же единичный круг $|\zeta| < 1$, но так, чтобы точка z_1 переходила в центр круга. Если известна $f(z)$, то для нахождения $f_1(z)$ нужно лишь единичный круг $|\zeta| < 1$ преобразовать в себя так, чтобы точка ζ_1 перешла бы в начало координат $\zeta = 0$. Это преобразование может быть достигнуто при помощи дробно-линейной функции $\frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta\bar{\zeta}_1}$. Следовательно, можно считать, что функции $f(z)$ и $f_1(z)$ друг с другом связаны равенством

$$f_1(z) = \frac{f(z) - \zeta_1}{1 - \bar{\zeta}_1 f(z)}.$$

Отсюда сразу же получается нужное нам выражение для функции Грина с полюсом в z_1:

$$G(x, y; x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f_1(z)|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|1 - \bar{\zeta}_1 f(z)|}{|f(z) - \zeta_1|}. \qquad (5)$$

Это равенство позволяет вычислить функцию Грина для задачи Дирихле при любом положении z_1 полюса, если известна функция Грина для одного вполне определенного положения z_0 полюса.

2. Приближенное построение функции Грина. Пусть область B с контуром L односвязна, конечна и пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ есть внутренняя точка этой области.

Построение функции Грина с полюсом в точке z_0 сводится, как это выяснилось в предыдущем номере, к разысканию такой функции $g(x, y)$, которая была бы гармонической в B и на контуре L удовлетворяла условию: $g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln r$, когда z лежит на L. Здесь $r = |z - z_0|$ есть расстояние от полюса z_0 до переменной точки $z = x + iy$. Если $g(x, y)$ найдена, функция Грина по ней находится согласно равенству

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(x, y).$$

Для приближенного построения функции $g(x, y)$ можно указать следующий очень простой по идее интерполяционный прием. [1])

Возьмем гармонический полином степени n с произвольными коэффициентами. В полярных координатах, если принять z_0 за полюс и полярную ось направить параллельно оси x, так что $z - z_0 = re^{i\varphi}$, он будет иметь вид:

$$P_n(r, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi). \tag{6}$$

В его состав входят $2n + 1$ произвольных величин $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$. Возьмем на L произвольно $2n + 1$ точек $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$ и попытаемся подобрать коэффициенты a_k и b_k полинома $P_n(r, \varphi)$ так, чтобы в этих $2n + 1$ точках $P_n(r, \varphi)$ принимал те же значения, что и $g(x, y)$. Если принять во внимание, что граничные значения $g(x, y)$ равны $\frac{1}{2\pi} \ln r$, для определения a_k и b_k мы получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 + \sum_{k=1}^{n} r_1^k (a_k \cos k\varphi_1 - b_k \sin k\varphi_1) &= \frac{1}{2\pi} \ln r_1, \\
a_0 + \sum_{k=1}^{n} r_2^k (a_k \cos k\varphi_2 - b_k \sin k\varphi_2) &= \frac{1}{2\pi} \ln r_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_0 + \sum_{k=1}^{n} r_{2n+1}^k (a_k \cos k\varphi_{2n+1} - b_k \sin k\varphi_{2n+1}) &= \frac{1}{2\pi} \ln r_{2n+1}, \\
z_j - z_0 = r_j e^{i\varphi_j}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

[1]) А. М. Чуфистова [1].

Определитель этой системы зависит от выбора точек $z_1, z_2, \ldots$ Если он отличен от нуля, система будет иметь единственное решение. Выясним геометрический смысл равенства нулю определителя. Рассмотрим выбранные нами точки $z_1, z_2, \ldots$ и посмотрим, какому условию должны удовлетворять координаты этих точек для того, чтобы все они лежали на одной линии уровня гармонического полинома степени не выше n, т. е. на линии с уравнением:

$$Q_n(r, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) = 0, \tag{8}$$

где a_k и b_k не равны нулю одновременно.

Для существования такой линии необходимо и достаточно, чтобы однородная система

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} r_j^k (a_k \cos k\varphi_j - b_k \sin k\varphi_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n+1)$$

имела относительно чисел $a_0, a_1, b_1, \ldots$ решение, отличное от нулевого. Если определитель этой системы отличен от нуля, то система имеет только нулевое решение, и, стало быть, не найдется ни одной кривой с уравнением (8), проходящей через все точки z_j. Если же определитель этой системы равен нулю, то система будет иметь решение, отличное от нулевого, и, следовательно, найдется кривая с уравнением вида (8), проходящая через все взятые точки $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$.

Но определитель последней системы есть как раз определитель системы (7). Таким образом, равенство нулю определителя системы (7) означает, что выбранные нами точки $z_1, z_2, \ldots$ все лежат на линии уровня гармонического полинома степени не выше n.

Заметим, что точки $z_1, z_2, \ldots$ в нашей задаче всегда могут быть так взяты на кривой L, чтобы определитель системы (7) для них был отличен от нуля.

Допустим, в самом деле, противоположное. Пусть при любом положении точек z_j на L определитель системы (7) равен нулю. Это геометрически означает, что $2n+1$ любых точек, взятых на L, всегда оказываются лежащими на линии уровня гармонического полинома степени не выше n (8). Можно показать, что в таком случае вся кривая L должна целиком лежать на линии уровня такого же полинома, т. е. координаты всех ее точек должны удовлетворять уравнению вида (8), причем среди коэффициентов $a_0, a_1, b_1, \ldots$ хоть один отличен от нуля.

Задача, о которой здесь идет речь, является частным случаем следующей более общей задачи. Пусть даны n функций $u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y)$, которые мы будем считать линейно-независимыми, т. е. такими, что равенство

$$c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y) + \ldots + c_n u_n(x, y) = 0$$

имеет место тождественно относительно x и y в том только случае, когда все коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ будут равны нулю.

Рассмотрим линию с уравнением

$$P_n(x, y) = a_1 u_1(x, y) + a_2 u_2(x, y) + \ldots + a_n u_n(x, y) = 0. \qquad (*)$$

Выберем теперь в плоскости произвольно n точек $M_k(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и попытаемся определить, какому условию должны удовлетворять координаты этих точек, чтобы все они лежали на кривой вида (*), т. е. попытаемся определить, когда коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ уравнения (*) можно подобрать так, чтобы координаты всех точек M_k удовлетворяли уравнению (*).

Можно проверить, что для того чтобы существовала линия вида (*), проходящая через все точки M_k, необходимо и достаточно, чтобы для координат этих точек выполнялось условие:

$$\begin{vmatrix} u_1(x_1, y_1) & u_2(x_1, y_1) & \ldots & u_n(x_1, y_1) \\ u_1(x_2, y_2) & u_2(x_2, y_2) & \ldots & u_n(x_2, y_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1(x_n, y_n) & u_2(x_n, y_n) & \ldots & u_n(x_n, y_n) \end{vmatrix} = 0. \qquad (**)$$

Возьмем в плоскости некоторую дугу l, и пусть оказывается, что при любом выборе n точек M_k на этой дуге выполняется равенство (**). Геометрически это означает, что какие бы n точек на дуге l мы ни взяли, через них всегда можно провести линию с уравнением (*). Покажем, что это может быть только в том случае, когда дуга l лежит целиком на некоторой линии вида (*).

Возьмем, в самом деле, на l n произвольных точек $M_k(x_k, y_k)$ и рассмотрим таблицу:

$$\begin{matrix} u_1(x_1, y_1) & u_2(x_1, y_1) & \ldots & u_n(x_1, y_1) \\ u_1(x_2, y_2) & u_2(x_2, y_2) & \ldots & u_n(x_2, y_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1(x_n, y_n) & u_2(x_n, y_n) & \ldots & u_n(x_n, y_n) \end{matrix} \qquad (***)$$

Определитель этой таблицы, по предположению, равен нулю, и ранг таблицы при любом выборе точек n на l меньше n. Ранг будет, вообще говоря, зависеть от выбора точек M_k. Пусть наибольшее значение, которого он будет достигать, когда M_k всевозможными способами выбираются на l, есть r. Возьмем ту систему точек M_k, для которой ранг таблицы будет наибольшим. Производя, если это потребуется, перенумерацию точек, мы можем без ограничения общности считать, что главный определитель таблицы будет следующий:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1(x_1, y_1) & \ldots & u_r(x_1, y_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1(x_r, y_r) & \ldots & u_r(x_r, y_r) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Возьмем любую функцию $u_k(x, y)$ $(k > r)$ и составим уравнение

$$\begin{vmatrix} u_1(x_1, y_1) & \ldots & u_r(x_1, y_1) & u_k(x_1, y_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1(x_r, y_r) & \ldots & u_r(x_r, y_r) & u_k(x_r, y_r) \\ u_1(x, y) & \ldots & u_r(x, y) & u_k(x, y) \end{vmatrix} = 0. \qquad (****)$$

Все элементы определителя в левой части равенства, за исключением последней строки, будут численными. Элементы же последней строки содержат переменные координаты x и y. Легко видеть, что этому уравнению отвечает линия вида (*). Действительно, наше уравнение приводится сразу же к виду (*), если определитель разложить по элементам последней строки. При этом не все коэффициенты при $u_1(x, y), \ldots, u_r(x, y)$, $u_k(x, y)$ окажутся равными нулю, ибо, например, коэффициентом при $u_k(x, y)$ будет главный определитель Δ, который отличен от нуля.

Построенное нами уравнение определяется выбором только точек M_1, $M_2, \ldots, M_r$, остальные же точки $M_{r+1}, \ldots, M_n$, которые участвуют в таблице, в уравнение никак не входят и могут быть взяты произвольно.

Мы утверждаем, что наша дуга l целиком принадлежит линии (****). В самом деле, возьмем на l любую точку и покажем, что ее координаты удовлетворяют уравнению (****). Примем эту точку за $M_k(x_k, y_k)$. Подставим x_k, y_k вместо x и y в уравнение (****). В левой части после подстановки получим некоторый определитель порядка $r+1$, принадлежащий таблице (***). Ранг этой таблицы самое большее равен r и, стало быть, полученный нами определитель должен равняться нулю. Следовательно, координаты точки M_k удовлетворяют уравнению (****). Это и доказывает наше утверждение.

Возвратимся к нашему основному вопросу. Гармонический полином $Q_n(r, \varphi)$, стоящий в левой части уравнения, должен равняться нулю всюду на замкнутой кривой L. Но тогда он должен быть равен нулю всюду в области B, ограниченной кривой L. Последнее же может быть только в том случае, когда все коэффициенты его $a_0, a_1, \ldots, b_n$ равны нулю, что противоречит предыдущему. Таким образом, предположение о том, что при любом выборе точек $z_1, z_2, \ldots$ на L определитель системы (7) равен нулю, приводит к противоречию, и на L наверное должны найтись такие точки $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$, для которых определитель системы отличен от нуля.

Решая систему (7) относительно коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, b_n$ и внося полученные значения в $P_n(r, \varphi)$, мы построим такой гармонический полином, который в $2n+1$ точках $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$ принимает те же значения, что $g(x, y)$. Он может быть приближенно принят за функцию $g(x, y)$. Функция Грина тогда будет иметь следующее приближенное представление:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi). \quad (9)$$

Можно ожидать, что разница между $P_n(r, \varphi)$ и $g(x, y)$ будет, вообще говоря, тем меньше, чем больше n, и когда n безгранично возрастает, погрешность приближенного равенства (9) будет стремиться к нулю.

Какими свойствами должен обладать контур L и как на нем нужно распределять точки z_j для того, чтобы описанный выше интерполяционный процесс сходился, т. е. чтобы имело место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P_n(r, \varphi) = g(x, y),$$

остается невыясненным, насколько нам известно, и до настоящего времени.

Пример. Рассмотрим в плоскости z квадрат

$$-1<x<+1, \quad -1<y<+1$$

и найдем функцию Грина для того случая, когда полюс z_0 лежит в начале координат: $z=0$.

Наличие осей симметрии у рассматриваемой нами области и выбор полюса в центре симметрии области позволяет упростить разыскание регулярной гармонической компоненты $g(x, y)$ функции Грина. Разложим $g(x, y)$ в ряд по гармоническим полиномам около начала координат:

$$g(x, y)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi).$$

Так как значения функции $g(x, y)$ должны располагаться симметрично относительно оси x, в этом разложении должны сохраниться члены только с косинусами, и все коэффициенты b_k $(k=1, 2, \ldots)$ при синусах должны быть равны нулю.

Кроме того, значения $g(x, y)$ должны располагаться симметрично относительно оси y и обеих биссектрис координатных углов. Отсюда следует, что в разложении должны сохраниться лишь члены, содержащие тригонометрические функции углов $0, 4\varphi, 8\varphi, \ldots,$ и разложение поэтому должно иметь вид

$$g(x, y)=a_0+a_4 r^4 \cos 4\varphi + a_8 r^8 \cos 8\varphi + \ldots$$

Мы сохраним в этом разложении только три первых члена и отбросим все остальные. Сообразно с этим на контуре квадрата мы должны взять три точки интерполяции. За них мы возьмем точки $z_1=1$, $z_2=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ и $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Для определения a_0, a_4, a_8 будем иметь следующую систему трех уравнений:

$$a_0+a_4+a_8=0,$$

$$a_0-\frac{8}{9}a_4-\frac{128}{81}a_8=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$a_0-4a_4+16a_8=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{2},$$

откуда и находим коэффициенты a_0, a_4, a_8:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{668}\left[324\ln\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{56}{5}\ln\sqrt{2}\right]=\frac{0{,}075577}{2\pi},$$

$$a_4=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{668}\left[243\ln\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{209}{5}\ln\sqrt{2}\right]=-\frac{0{,}074012}{2\pi},$$

$$a_8=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{668}\left[\frac{153}{5}\ln\sqrt{2}-81\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\right]=-\frac{0{,}001566}{2\pi}.$$

По ним строим приближенно функцию Грина:

$$G(x, y;\ 0,\ 0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g(x, y) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r} + 0{,}075577 - 0{,}074012r^4\cos 4\varphi - 0{,}001566r^8\cos 8\varphi\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{1}{z} + 0{,}075577 - 0{,}074012z^4 - 0{,}001566z^8\right].$$

По найденной функции Грина построим еще функцию $\zeta = f(z)$, преобразующую квадрат на единичный круг. Между собой они, как мы выяснили выше, связаны равенством (4). Для нашего случая из него следует:

$$\ln|f(z)| = -2\pi G(x, y;\ 0,\ 0) =$$
$$= \operatorname{Re}[\ln z - 0{,}075577 + 0{,}074012z^4 + 0{,}001566z^8].$$

Отсюда ясно, что $\ln f(z)$ может отличаться от выражения, стоящего под знаком вещественной части, только чисто мнимым, постоянным слагаемым. Мы отбросим его. Это означает, что мы будем считать производную $f'(0)$ от преобразующей функции в начале координат вещественной и положительной:

$$f(z) = ze^{-0{,}075577 + 0{,}074012z^4 + 0{,}001566z^8}.$$

Для характеристики точности полученного результата подсчитаем $f'(0)$. Из приближенного выражения $f(z)$, полученного нами, найдем

$$f'(0) = e^{-0{,}075577} = 0{,}9272.$$

Точное же значение есть

$$f'(0) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = 0{,}9257.$$

Погрешность приближенного значения равна $0{,}16\%$.

3. Функция Грина для задачи Неймана. Известно, что задача Неймана в плоской области сводится к задаче Дирихле для сопряженной гармонической функции. Мы выясним идею этого сведения на простейшем случае односвязной области.

Пусть в односвязной области B с границей L нужно найти гармоническую функцию $u(x, y)$, нормальная производная от которой принимает на границе заданные значения

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(M) \text{ на } L, \tag{10}$$

n — внешняя нормаль. Функция $f(M)$ должна удовлетворять необходимому условию разрешимости задачи Неймана:

$$\int_L f(M)\,ds = 0. \tag{11}$$

Наряду с функцией $u(x, y)$ рассмотрим сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x, y)$. Примем за положительное направление движения по L направление обхода против часовой стрелки. Из уравнений Коши — Римана видно, что

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Граничное условие (10) для сопряженной с $u(x, y)$ функции $v(x, y)$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial v}{\partial s}=f(M).$$

Отсюда, задавая произвольно $v(x, y)$ в какой-либо точке $M_0(x_0, y_0)$ границы L, мы интегрированием восстановим значения $v(x, y)$ всюду на L:

$$v(x, y)=v_0+(L)\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} f(M)\,ds=F(M). \tag{12}$$

$F(M)$ на L будет однозначной непрерывной функцией, так как, ввиду (11), после обхода по L мы вернемся к исходному значению. Таким образом, задача Неймана для функции $u(x, y)$ при граничном условии (10) сводится к задаче Дирихле для функции $v(x, y)$ при условии (12).

Такое сведение, теоретически всегда допустимое, имеет два недостатка, которые могут в практических вычислениях потребовать излишней работы, а именно нужно, во-первых, по известным граничным значениям $u(x, y)$ вычислить граничные значения $v(x, y)$ и, во-вторых, по найденной после решения задачи Дирихле функции $v(x, y)$ восстановить сопряженную с ней функцию $u(x, y)$. Поэтому, по крайней мере с точки зрения практических вычислений, полезно указать такие способы решения задачи Неймана, которые не требовали бы сведения ее к задаче Дирихле. Сейчас мы остановим внимание читателя на одном из таких способов.

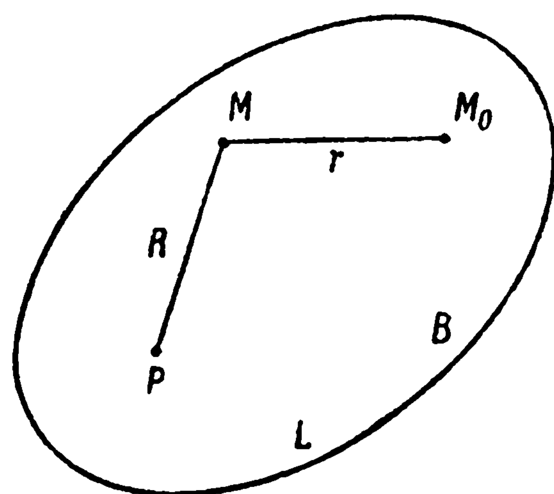


Рис. 48.

Мы отбросим теперь предположение об односвязности области и возвратимся на некоторое время к общему случаю.

Выберем внутри области B две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $P(a, b)$. Переменную точку этой области обозначим M и ее координаты x, y. Расстояние от M_0 до M обозначим r, расстояние от P до M через R (рис. 48):

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|z-z_0|;$$
$$R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=|z-\alpha|;$$
$$\alpha=a+ib.$$

Функцией Грина для задачи Неймана в области B с полюсами в M_0 и P называют функцию $G_N\left(x, y; \begin{matrix} x_0, & y_0 \\ a, & b \end{matrix}\right) = G_N(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

1. $G_N(x, y)$ как функция x и y — гармоническая всюду в B, за исключением точек M_0 и P.

2. $G_N(x, y)$ может быть представлена в форме:

$$G_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R} + g_N(x, y),$$

где $g_N(x, y)$ — гармоническая функция всюду в B, включая и точки M_0 и P.

3. Нормальная производная от $G_N(x, y)$ на контуре области B обращается в нуль

$$\left.\frac{\partial G_N}{\partial n}\right|_L = 0.$$

Этими тремя условиями функция Грина определяется с точностью до постоянного слагаемого. Пусть, в самом деле, $G_N^{(1)}$ и $G_N^{(2)}$ — две различные функции, удовлетворяющие перечисленным требованиям. Разность $u = G_N^{(1)} - G_N^{(2)}$ между ними есть функция, гармоническая в B всюду без исключения. Нормальная производная от нее на границе L обращается в нуль по условию 3. Поэтому сама u должна в B сохранять постоянное значение.

Можно показать, что если известна функция $G_N(x, y)$, то при помощи ее решается задача Неймана в B при любых непрерывных граничных значениях нормальной производной гармонической функции.

Для доказательства вновь применим формулу Грина (1). Примем в ней за u искомую гармоническую функцию и за v — функцию Грина G_N. Применять эту формулу непосредственно в B мы не имеем права, ибо $v = G_N$ имеет в B две точки разрыва M_0 и P. Около них как около центров опишем окружности C_ε и C_η малых радиусов ε и η. Круги, лежащие внутри этих окружностей, исключим из B. Получим некоторую новую область $B_{\varepsilon\,\eta}$, граница которой состоит из L, C_ε и C_η. Если к $B_{\varepsilon,\,\eta}$ применить формулу (1) и затем в ней ε и η уменьшать до нуля, то путем рассуждений, вполне аналогичных тем, которые проводились в n° 1, можно показать, что в пределе получается следующее равенство:

$$\int\limits_L \left(u \frac{\partial G_N}{\partial n} - G_N \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds + u(x_0, y_0) - u(a, b) = 0.$$

Примем еще во внимание, что на L по третьему условию $\frac{\partial G_N}{\partial n} = 0$, поэтому

$$u(x_0, y_0) = u(a, b) + \int\limits_L G_N \frac{\partial u}{\partial n} ds. \tag{13}$$

Это равенство дает возможность найти значение гармонической функции в любой внутренней точке $M_0(x_0, y_0)$ области B, если известны значения нормальной ее производной на L и значение $u(a, b)$ самой функции $u(x, y)$ в некоторой фиксированной точке $P(a, b)$.

Установим теперь связь между функцией Грина для задачи Неймана и конформным преобразованием B. Для простоты изложения мы ограничимся вновь случаем односвязной области B.

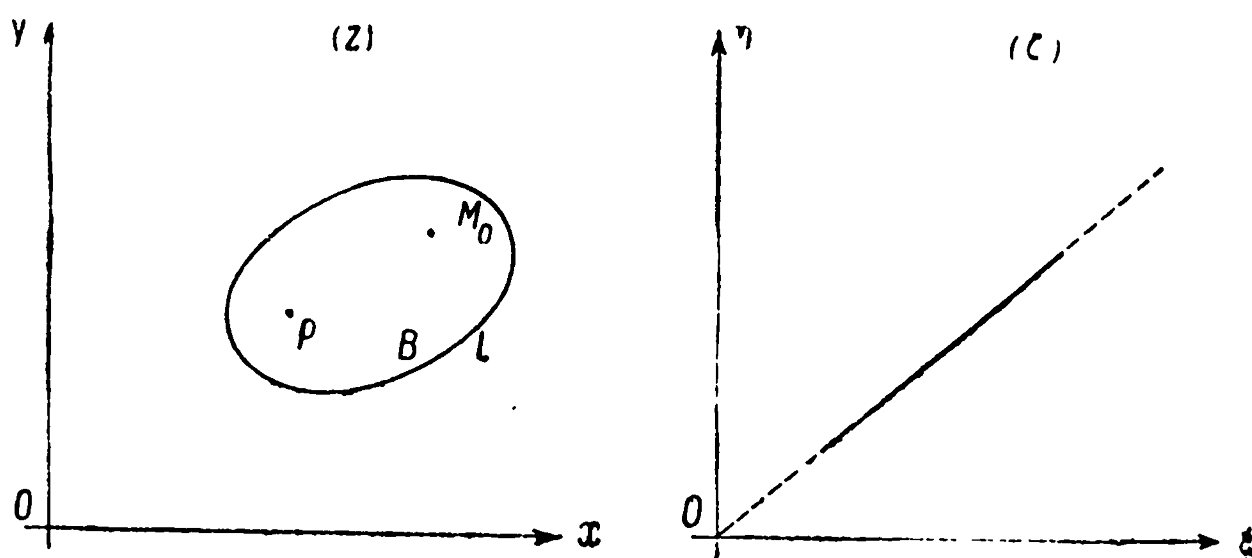


Рис. 49.

Совершим конформное преобразование области B на плоскость ζ так, чтобы точка M_0 перешла в бесконечно далекую точку плоскости ζ, точка P — в нулевую точку плоскости ζ и контур L области B перешел в некоторый прямолинейный разрез, проведенный вдоль луча $\arg\zeta = \text{const}$ (рис. 49). Преобразующую функцию назовем $\zeta = g(z)$. Что функция $g(z)$, совершающая такое преобразование, существует, мы увидим ниже, когда дадим ее выражение через функцию $\zeta = f(z)$, совершающую конформное преобразование области B на единичный круг. Сейчас же мы отметим лишь, что $g(z)$ в нашей задаче определяется только с точностью до произвольного комплексного множителя, который в наших рассуждениях является несущественным.

Положим

$$g(z) = \rho e^{i\psi}.$$

Мы покажем сейчас, что за функцию Грина $G_N(x, y)$ можно принять:

$$G_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \rho = \frac{1}{2\pi} \ln |g(z)|. \tag{14}$$

Действительно, $g(z)$ имеет единственный полюс и единственный нуль, оба — первой кратности, соответственно в точках $z_0 = x_0 + iy_0$ и $\alpha = a + ib$. Поэтому функция $\chi(z) = \frac{(z - z_0)\, g(z)}{z - \alpha}$ будет регулярной функцией, отличной от нуля всюду в B. Любая ветвь логарифма ее будет также регулярной функцией в B. Назовем ее

$$u + iv = \ln \chi(z).$$

Здесь u и v — функции, гармонические всюду в B:

$$g(z)=\frac{z-a}{z-z_0}e^{u+iv},$$

$$\frac{1}{2\pi}\ln\rho=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R}+\frac{1}{2\pi}u.$$

Первое и второе требование из числа определяющих функцию G_N, очевидно, выполняются. Надлежит проверить лишь последнее третье требование. Из самой задачи конформного преобразования видно, что на границе L области выполняется равенство:

$$\psi=\arg\zeta=\mathrm{const},$$

так как L при преобразовании переходит в отрезок луча $\arg\zeta=\mathrm{const}$. Поэтому производная от ψ по длине дуги s контура L должна равняться нулю всюду на L. Но тогда из уравнений Коши — Римана видно, что производная от сопряженной с ψ гармонической функции $\ln\rho$ в направлении, ортогональном к элементу дуги s, т. е. в направлении нормали n к L, также должна быть равной нулю:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{2\pi}\ln\rho=0 \text{ всюду на } L.$$

Последнее же означает выполнение третьего условия для $\frac{1}{2\pi}\ln\rho$, и, следовательно, можно считать:

$$G_N=\frac{1}{2\pi}\ln\rho=\frac{1}{2\pi}\ln|g(z)|.$$

Наоборот, если известна функция Грина $G_N(x, y)$, то по ней мы можем построить аналитическую в области B функцию $g(z)$, осуществляющую конформное преобразование этой области на плоскость с разрезом вдоль луча, проведенного из начала координат так, чтобы точки a и z_0 переходили в 0 и ∞. В самом деле, найдем по известной функции G_N сопряженную с ней гармоническую H_N. Способы построения ее известны. Тогда, как легко можно проверить,

$$g(z)=e^{G_N+iH_N}.$$

Наконец, мы укажем, как может быть построена $g(z)$, если известно конформное преобразование B на единичный круг.

Среди всех возможных функций, преобразующих B на единичный круг $|w|<1$, выберем ту, которая переводит точку M_0 в начало координат и точку P в некоторую точку $-p$, лежащую на отрицательной части вещественной оси. Пусть это будет функция $w=f(z)$ (рис. 50). Совершим теперь преобразование

$$w'=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right).$$

Внутренность единичного круга $|w|<1$ перейдет во всю плоскость w', за исключением прямолинейного отрезка вдоль вещественной оси между точками -1, $+1$, при этом так, что $w=0$ перейдет в бесконечно далекую точку $w'=\infty$, точка $-p$ перейдет в некоторую точку $-p'$ на отрицательной вещественной полуоси, причем

$$p'=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)>1,$$

и окружность $|w|=1$ перейдет в отрезок $(-1, +1)$, пробегаемый дважды.

Нам осталось только перевести точку $-p'$ в начало координат, а это достигается преобразованием:

$$\zeta=w'+p'.$$

Таким образом, мы можем считать:

$$g(z)=\frac{1}{2}\left(f(z)+\frac{1}{f(z)}\right)+p'.$$

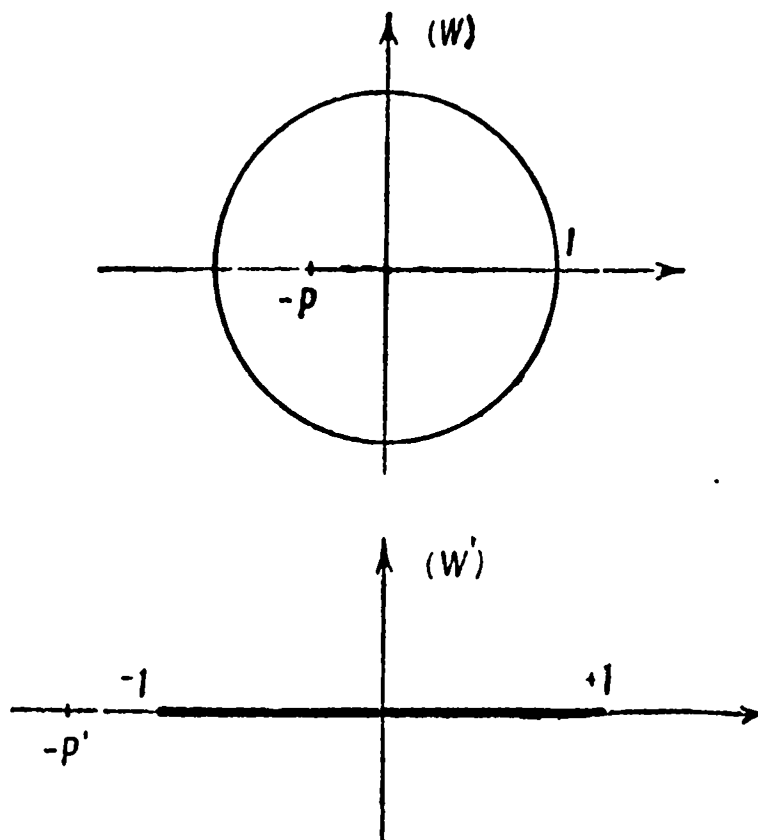


Рис. 50.

Это равенство, между прочим, также показывает, что решение задачи Неймана в B сводится к решению задачи Дирихле, ибо, пользуясь этим равенством, всегда можно по одной из двух функций $G_N\left(x, y; \begin{matrix} x_0, y_0 \\ a, b \end{matrix}\right)$ и $G(x, y; x_0, y_0)$ найти другую.[1]

---

[1]) Укажем кратко на связь между функцией $G_N(x, y)$ и конформным преобразованием области B в случае, когда B многосвязна. Пусть B n-связна, и граница ее состоит из n кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Преобразуем конформно и однолистно область B на плоскость ζ так, чтобы: 1) точка M_0 перешла в бесконечно далекую точку, 2) точка P перешла в начало координат и 3) граничные кривые L_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — в разрезы вдоль некоторых лучей, исходящих из начала координат:

$$\arg\zeta=C_k.$$

Отметим что числа C_k в этой задаче не могут быть все задаваемы произвольно. Одному из них, например C_1, может быть предписано наперед любое значение, остальные же $C_2, \ldots, C_n$ должны быть определены из самой задачи.

Назовем преобразующую функцию $\zeta=g(z)$. В § 9 n° 5 мы укажем систему интегральных уравнений, к решению которой приводится задача разыскания этой функции.

Если считать C_1 заданным, то $g(z)$ определяется с точностью до произвольного вещественного множителя, изменению которого отвечает подобное преобразование всех разрезов из начала координат. Можно легко

4. Функция Грина для смешанной задачи. Пусть граница L области B разбита на две части L_1 и L_2 и нужно найти в B (рис. 51) гармоническую функцию, удовлетворяющую на границе L условиям:

$$u = f_1(M) \text{ на } L_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2(M) \text{ на } L_2.$$

Как и в случае задач Дирихле и Неймана, решение этой задачи при любых $f_1(M)$ и $f_2(M)$ может быть сведено к нахождению некоторого особенного частного решения той же задачи, которое мы будем называть функцией Грина для смешанной задачи в области B с полюсом в $M_0(x_0, y_0)$ и обозначать $G_g(x, y;\ x_0,\ y_0) = G_g(x, y)$.

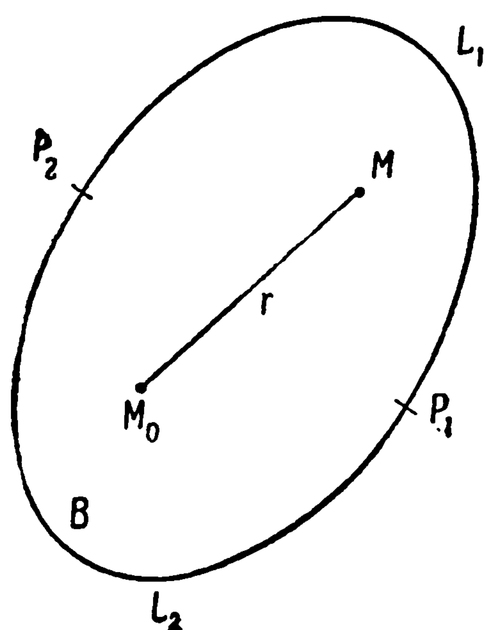


Рис. 51.

Эту функцию Грина мы определяем следующими требованиями:

1. $G_g(x, y)$ как функция от x и y должна быть гармонической в B, за исключением точки M_0.

2. В окрестности точки M_0 $G_g(x, y)$ должна иметь представление:

$$G_g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + h(x, y),$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ есть расстояние между переменной точкой M и полюсом M_0, а $h(x, y)$ — функция, гармоническая в B всюду, включая и точку M_0.

3. На контуре L области B $G_g(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$G_g(x, y) = 0 \text{ на } L_1$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n} G_g(x, y) = 0 \text{ на } L_2.$$

Можно показать, что этими тремя требованиями $G_g(x, y)$ определяется вполне.

При помощи этой функции Грина может быть решена поставленная нами смешанная задача при любых непрерывных $f_1(M)$ и $f_2(M)$.

видеть, что

$$G_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |g(z)|.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить выполняемость для $\frac{1}{2\pi} \ln |g(z)|$ всех трех условий, определяющих G_N.

Делается это весьма просто путем таких же рассуждений, какие мы провели в основном тексте книги для односвязной области, и мы предоставляем это читателю.

Возьмем, в самом деле, формулу Грина (1) n° 1 и примем в ней u за искомую нами гармоническую функцию и v положим равной $G_g(x, y)$. Применять формулу Грина ко всей области B мы для выбранной нами пары функций не имеем права, так как для одной из них точка M_0 будет особой. Опишем около M_0 окружность C_ε малого радиуса ε и выбросим из B круг, ограниченный этой окружностью. Если теперь к оставшейся области применить формулу Грина и затем совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$, мы, повторяя буквально рассуждения из n° 1, после предельного перехода получим:

$$\int_L \left(u \frac{\partial G_g}{\partial n} - G_g \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds + u(x_0, y_0) = 0.$$

Отсюда, если принять во внимание граничные условия, которым мы подчинили $G_g(x, y)$, будет следовать:

$$u(x_0, y_0) = -\int_{L_1} u \frac{\partial G_g}{\partial n} ds + \int_{L_2} G_g \frac{\partial u}{\partial n} ds, \tag{15}$$

а это последнее равенство позволяет вычислить $u(x, y)$ в любой внутренней точке $M_0(x_0, y_0)$ области, если известна функция Грина $G_g(x, y)$ и значения u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ соответственно на L_1 и L_2.

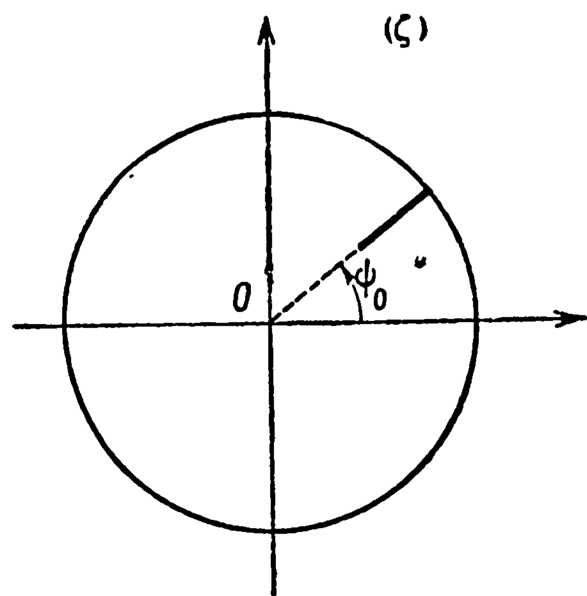


Рис. 52.

Выясним теперь связь между функцией $G_g(x, y)$ и конформным преобразованием области B.

Будем считать область B односвязной и границу L_1 ее разбитой на части так, чтобы L_1 и L_2 каждая состояла из одного куска кривой. Совершим конформное преобразование на единичный круг плоскости ζ с разрезом так, чтобы:

1) точка $M_0(x_0, y_0)$ перешла в центр круга $|\zeta| < 1$;

2) дуга L_1 контура перешла в окружность круга $|\zeta| = 1$;

3) дуга L_2 контура перешла в разрез от окружности единичного круга внутрь вдоль радиуса $\arg \zeta = \psi_0 = \text{const}$ (рис. 52).

Отметим здесь, что длина этого разреза не может быть задана и должна определиться из самой задачи.

Преобразующую функцию назовем

$$\zeta = \zeta(z).$$

Существование ее легко может быть доказано, если исходить из теоремы Римана о преобразовании односвязных областей на круг. Немного ниже мы дадим явное выражение $\zeta(z)$ через функцию, преобразующую область B на единичный круг.

Если фиксировать тот луч, вдоль которого должен располагаться разрез, т. е. считать заданным ψ_0, то поставленными требованиями преобразующая функция $\zeta(z)$ определяется единственным образом.

Мы сейчас покажем, что функция Грина $G_g(x, y)$ и преобразующая функция $\zeta(z)$ связаны друг с другом равенством:

$$G_g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta(z)|}. \tag{16}$$

Так как $\zeta(z)$ — ограниченная функция и имеет единственный простой нуль в точке z_0, то выполняемость для $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta(z)|}$ первых двух условий из числа трех, определяющих $G_g(x, y)$, очевидна. Проверке подлежит только последнее третье условие. Дуга L_1 контура переходит при преобразовании в единичную окружность, поэтому всюду на L_1 $|\zeta(z)| = 1$ и, стало быть,

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta(z)|} = 0 \text{ всюду на } L_1.$$

Дуга L_2 контура переходит в разрез, лежащий на луче $\arg \zeta = \psi_0$. Поэтому всюду на L_2 $\arg \zeta(z)$ имеет постоянное значение ψ_0. Но тогда всюду на L_2 должно быть $\frac{\partial}{\partial s} \arg \zeta(z) = 0$ и, как это видно из уравнений Коши — Римана, для $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta(z)|}$ будет выполняться равенство

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta(z)|} = 0 \text{ всюду на } L_2.$$

Этим и доказывается нужное нам соотношение (16).

Установим теперь связь между $\zeta(z)$ и функцией, доставляющей конформное преобразование B на круг.

Среди всех функций, осуществляющих конформное преобразование B на единичный круг $|w| < 1$, выберем ту, которая переводит точку z_0 в начало координат $w = 0$ и часть L_1 контура в дугу единичного круга, имеющую начало в точке $w = 1$ и затем идущую от этой точки против часовой стрелки. Центральный угол, отвечающий этой дуге, обозначим α, так что для этой дуги

$$0 \leqslant \arg w \leqslant \alpha, \quad \alpha < 2\pi.$$

Преобразующую функцию назовем

$$w = f(z).$$

Нам осталось теперь преобразовать круг $|w| < 1$ на единичный круг плоскости ζ с разрезом вдоль некоторого луча, например вдоль вещественной положительной полуоси от некоторой точки до $\zeta = 1$, при этом так, чтобы дуга $0 \leqslant \arg w \leqslant \alpha$, отвечающая L_1, перешла в окружность $|\zeta| = 1$, а дуга $\alpha \leqslant \arg w \leqslant 2\pi$, отвечающая L_2, перешла в оба борта разреза. Нулевые же точки $w = 0$ и $\zeta = 0$ обеих плоскостей должны перейти друг в друга.

Можно показать, что нужное преобразование доставляется функцией

$$\zeta=\frac{\left(\sqrt{\dfrac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}w}{1-w}}-1\right)^2+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{8}\left(\sqrt{\dfrac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}w}{1-w}}+1\right)^2}{\left(\sqrt{\dfrac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}w}{1-w}}+1\right)^2+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{8}\left(\sqrt{\dfrac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}w}{1-w}}-1\right)^2}.$$

Этого можно достигнуть путем следующих элементарных преобразований.

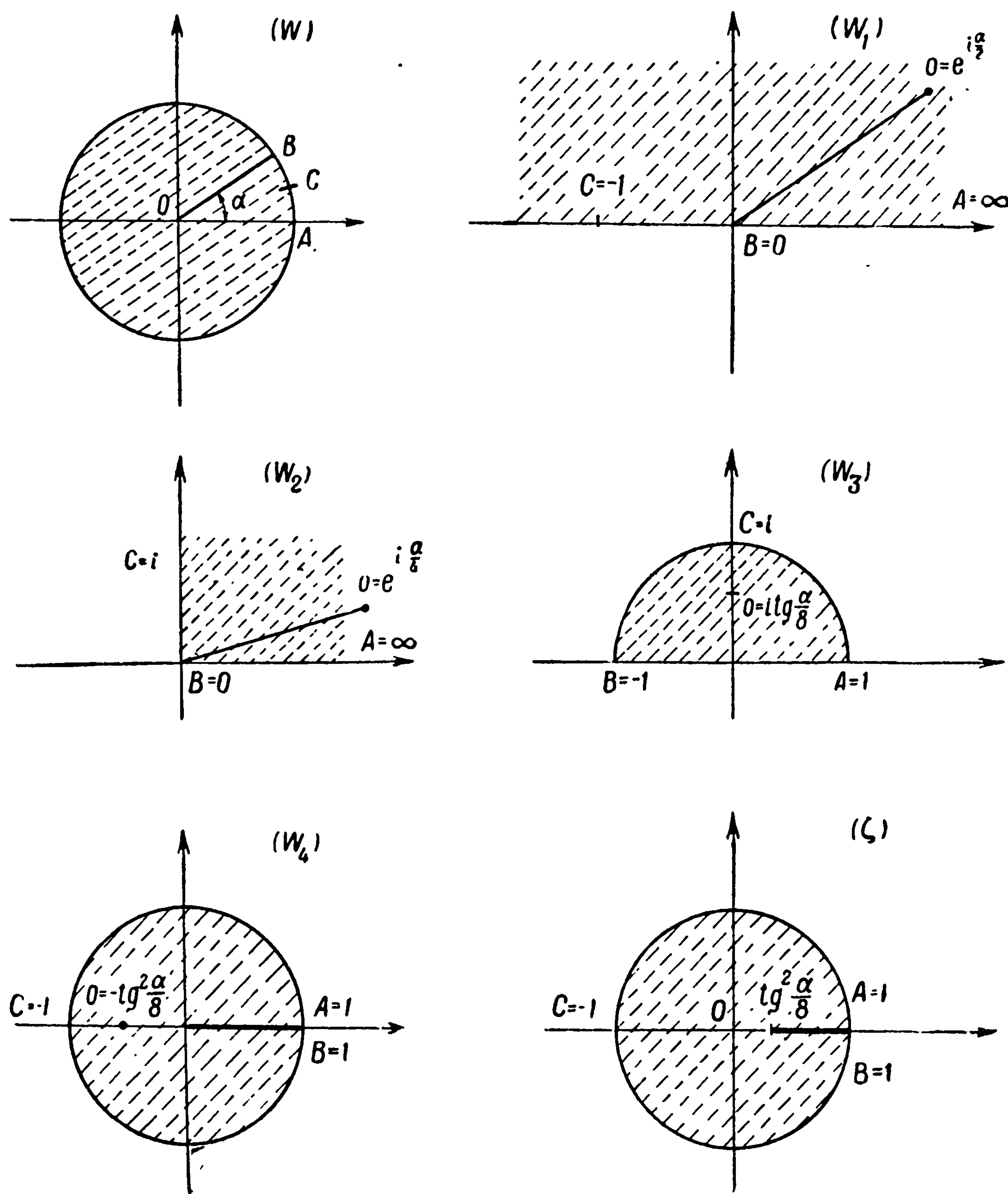


Рис. 53.

Сначала единичный круг $|w|<1$ (рис. 53) отобразим на верхнюю полуплоскость плоскости w_1 при помощи функции

$$w_1=\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-we^{-i\frac{\alpha}{2}}}{1-w}.$$

Полуплоскость $I(w_1) > 0$ отображаем на первый координатный квадрант плоскости w_2:

$$I(w_2) > 0; \quad \mathrm{Re}(w_2) > 0$$

при помощи функции

$$w_2 = \sqrt{w_1}.$$

Первый квадрант плоскости w_2 отображаем на полукруг плоскости w_3:

$$|w_3| < 1; \quad I(w_3) > 0;$$

$$w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}.$$

Полукруг плоскости w_3 преобразуем в круг $|w_4| < 1$ плоскости w_4 с разрезом вдоль радиуса (0,1):

$$w_4 = w_3^2.$$

И, наконец, круг с разрезом в плоскости w_4 отображаем на круг $|\zeta| < 1$ плоскости ζ с разрезом вдоль вещественной оси от точки $\mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{8}$ до точки 1:

$$\zeta = \frac{w_4 + \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{8}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{8} \cdot w_4}.$$

Соответствие между интересующими нас точками при последовательных преобразованиях дается следующей таблицей:

w	1	w_2	w_3	w_4	ζ
$A = 1$	∞	∞	1	1	1
$C = e^{i\frac{\alpha}{2}}$	-1	i	i	-1	-1
$B = e^{i\alpha}$	0	0	-1	1	1
0	$e^{i\frac{\alpha}{2}}$	$e^{i\frac{\alpha}{4}}$	$i\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{8}$	$-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{8}$	0

На прилагаемом чертеже соответствующие точки помечены одинаковыми буквами.

Если из всех предыдущих формул исключить вспомогательные переменные $w_1, \ldots, w_4$ и найти выражение ζ непосредственно через w, то получится функция, указанная в основном тексте книги.

Здесь из двух возможных значений квадратного радикала выбирается то, которое при $w = 0$ приводится к $e^{i\frac{\alpha}{4}}$.

Это равенство дает зависимость между функциями $w = f(z)$ и $\zeta(z)$ и позволяет по одной из функций Грина $G(x, y)$ и $G_g(x, y)$ немедленно вычислить другую.

§ 9. Приложение интегральных уравнений к конформному преобразованию[1])

1. Интегральное уравнение для преобразования внутренних областей. Мы будем иметь в виду преобразование односвязной области B плоскости z, ограниченной простым контуром L, на единичный круг с центром в начале координат в плоскости $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$.

Если мы знаем соответствие между точками контура L и окружности единичного круга, т. е. знаем либо ζ как функцию от z на L, либо z как функцию от ζ на окружности, то отображающая функция может быть немедленно найдена, например, при помощи интеграла Коши или иным путем. Поэтому для решения задачи о конформном преобразовании области B и круга друг в друга достаточно знания лишь упомянутого соответствия.

Для установления его можно прибегнуть к следующему способу. Отображающая функция будет вполне определена, если известно соответствие между одной внутренней и одной граничной точкой области B и одной внутренней и одной граничной точкой круга.

Будем, для определенности, предполагать, что некоторая точка z_0 из B переходит в центр $\zeta = 0$ и точка z_1 на L переходит в $\zeta = 1$.

Обозначим функцию, преобразующую B в круг, через $\zeta = \varphi(z)$ и рассмотрим:

$$F(z) = \ln \zeta = \ln \rho + i\vartheta, \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta}. \quad (1)$$

В B функция $F(z)$ многозначна и имеет в точке z_0 логарифмическую особенность; на контуре же L, так как здесь $\rho = 1$, ее вещественная часть $\ln \rho$ обратится в нуль.

Рис. 54.

Чтобы сделать $F(z)$ однозначной, мы проведем разрез от z_0 до z_1. На рис. 54 он изображен прямолинейным. В разрезанной области $F(z)$ будет однозначной функцией; ее значения в соответствующих точках $\overset{-}{z}$ и $\overset{+}{z}$ на сторонах разреза будут отличаться друг от друга на величину, равную приращению $i\vartheta$ при обходе около z_0, что соответствует обходу вокруг начала координат в плоскости ζ, т. е. на $2\pi i$:

$$F(\overset{+}{z}) = F(\overset{-}{z}) + 2\pi i. \quad (2)$$

[1]) При составлении пп° 1 и 3 этого параграфа мы воспользовались работой С. А. Гершгорина [3]. Пример приложения интегральных уравнений к конформному преобразованию можно найти в работе А. М. Банина [1].

Построим теперь контур L', состоящий из L, разреза от z_1 до A и малой окружности C_ε радиуса ε около z_0. По теореме Коши:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{F(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{2-1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt.$$

Будем теперь ε уменьшать до нуля. Покажем, что интеграл по окружности C_ε стремится к нулю. В самом деле, как уже говорилось выше, $F(z)$ имеет в z_0 логарифмическую особенность и будет отличаться от $\ln(z-z_0)$ голоморфным слагаемым. Поэтому всегда можно указать такое число M, чтобы на C_ε имела место оценка:

$$|F(z)|\leqslant M|\ln\varepsilon|.$$

Отсюда вытекает, так как $|t-z|$ не меньше некоторого $\delta>0$,

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}\,dt\right|\leqslant\frac{2\pi M}{\delta}\varepsilon|\ln\varepsilon|\to 0.$$

Далее, по положительной стороне разреза мы интегрируем от z_1 до A, по отрицательной же — в противоположном направлении. В силу (2), интегралы, содержащие $F(z)$, сократятся, и останется лишь интеграл от $2\pi i$ от z_1 до A, и после предельного перехода мы будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{z_1}^{z_0}\frac{2\pi i}{t-z}\,dt=-\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}\,.$$

Наконец, если принять во внимание, что на контуре L $F(z)=i\vartheta$, получим:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{L}\frac{\vartheta\,dt}{t-z}-\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}\,. \tag{3}$$

Перепишем этот результат в иной форме. Положим $dt=e^{i\alpha}\,d\sigma$; здесь $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой L, отсчитываемой от некоторой точки, и α — угол, образуемый касательной к L в точке t с осью x:

$$t-z=re^{i\varphi};\quad z_0-z=r_0e^{i\varphi_0};\quad z_1-z=r_1e^{i\varphi_1}; \tag{3'}$$
$$\beta=\varphi_1-\varphi_0.$$

Здесь β — угол, под которым виден отрезок z_0z_1 из точки z, при этом отсчет угла идет от z_0 к z_1. Назовем далее через (n_t, r) угол

между внутренней нормалью n_t к контуру L в точке t и r; отсчет угла будем делать от n_t к r. Очевидно:

$$\alpha-\varphi=\frac{\pi}{2}-(n_t, r).$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\vartheta e^{\pi i/2}e^{-i(n_t, r)}}{r}\,d\sigma-\ln\frac{r_1}{r_0}-\beta i=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int\limits_L \frac{\vartheta e^{-i(n_t, r)}}{r}\,d\sigma-\ln\frac{r_1}{r_0}-\beta i. \quad (4)$$

Если же отделить здесь вещественную часть от мнимой, найдем:

$$\ln\rho=\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\vartheta\sin(n_t, r)}{r}\,d\sigma-\ln\frac{r_1}{r_0};$$

$$\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\vartheta\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma-\beta. \quad (5)$$

Из полученных формул видно, что если известны граничные значения функции ϑ, то $\ln\rho$ найдется сразу же.

Пользуясь вторым равенством, можно легко построить интегральное уравнение для предельных значений ϑ.

Будем точку z приближать к точке контура, соответствующей длине дуги s. Интеграл, стоящий в правой части равенства, представляет потенциал двойного слоя с плотностью ϑ. Природа этой функции хорошо изучена, и мы поэтому не входим в исследование предельных значений ее на границе области, отсылая читателя к специальным руководствам по математической физике или теории дифференциальных уравнений.[1]) Мы приведем здесь без доказательства наглядный по своему геометрическому содержанию результат: при приближении z к контуру L изнутри, упомянутый интеграл стремится к

$$\int\limits_L \frac{\vartheta(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma+\pi\vartheta(s),$$

если s не угловая точка; если же s — угловая точка, то второй член должен быть заменен на $(2\pi-\delta)\vartheta(s)$, где δ — внутренний угол области в точке s. Ниже нам потребуется знать, что при приближении к контуру L извне потенциал двойного слоя будет стремиться к

$$\int\limits_L \frac{\vartheta(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma-\pi\vartheta(s);$$

---

[1]) Гурса [1], т. III, ч. I, гл. XXVII, п. 505, Н. М. Гюнтер [2]. См. также § 3 гл. II настоящей книги.

если s — угловая точка, то второй член должен быть заменен на $\delta\vartheta(s)$. В обоих случаях интегральный член равен значению потенциала в точке контура с координатой s.

Подставив это выражение во второе равенство (5), мы придем к заключению, что $\vartheta(s)$ должно быть решением следующего интегрального уравнения второго рода типа Фредгольма:

$$\vartheta(s) = \int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\,d\sigma - 2\beta(s), \tag{6}$$

где

$$K(s, \sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n_t, r)}{r}.$$

Для угловой точки это уравнение должно быть заменено следующим:

$$\frac{\delta}{\pi}\vartheta(s) = \int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\,d\sigma - 2\beta(s). \tag{6'}$$

Уравнение (6) является частным случаем уравнения:

$$\vartheta(s) = \lambda\int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\,d\sigma - 2\beta(s) \tag{7}$$

при $\lambda = 1$, которое будет для этого уравнения как раз собственным числом. В самом деле, до настоящего времени мы воспользовались в своих рассуждениях лишь тем, что точка z_0 переходит в центр круга, однако нигде не установили еще соответствия между двумя точками на границах преобразуемых областей, допуская этим самым вращение круга около начала координат, что отвечает прибавлению к $\vartheta(s)$ произвольной постоянной. Решение уравнения (6) поэтому наверное должно быть определено с точностью до постоянного слагаемого, что может быть только тогда, если 1 есть собственное число и однородное уравнение

$$\vartheta(s) = \int_L K(s, \sigma)\vartheta(\sigma)\,d\sigma$$

имеет произвольную постоянную своим решением, в чем убедиться не представляет труда, так как

$$\int_L K(s, \sigma)\,d\sigma = 1.$$

Это легко проверить, ибо написанный выше интеграл отличается от интеграла Гаусса для плоскости лишь множителем $\frac{1}{\pi}$. Можно показать, что однородное уравнение не имеет решения, отличного от постоянного.

Интегральное уравнение (6) может иметь, следовательно, решение в том и только в том случае, когда свободный член его — $2\beta(s)$ будет ортогонален ко всякому решению союзного однородного уравнения

$$\mu(s) = \int_L K(\sigma, s)\mu(\sigma)\,d\sigma.$$

Мы предоставим читателю убедиться в этом непосредственными вычислениями и будем принимать существование решения как очевидный факт, являющийся простым следствием теоремы Римана о существовании функции, совершающей нужное нам конформное преобразование.

Задача о разыскании функции $\vartheta(s)$, удовлетворяющей соотношению (6), становится вполне определенной, если задать начальное значение для $\vartheta(s)$, например:

$$\vartheta(0) = 0.$$

2. Замечания о решении интегрального уравнения и приближенном построении отображающей функции. Приближенное решение нашего интегрального уравнения может быть проведено по одному из развитых выше в гл. II методов, куда мы и отсылаем читателя для ознакомления с ними.

Мы сделаем сейчас еще несколько замечаний, которые могут оказаться полезными в практических выкладках.

Выражение

$$\frac{\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma$$

имеет непосредственное геометрическое значение. Оно равно углу, под которым из точки s виден элемент длины дуги $d\sigma$. Будем обозначать угол между касательной к кривой L в точке s, направленной в сторону возрастания дуги, и r через $\omega(s, \sigma)$; тогда

$$\int_L K(s, \sigma)\,\vartheta(\sigma)\,d\sigma$$

будет равен интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_L \vartheta(\sigma)\,d\omega,$$

взятому по всей кривой L, и интегральное уравнение примет вид:

$$\vartheta(s) = \frac{1}{\pi}\int_L \vartheta(\sigma)\,d\omega - 2\beta(s). \qquad (8)$$

Последняя форма уравнения особенно важна в том отношении, что она по своему строению гораздо проще, чем (6). Когда требуемая точность допускает графические расчеты, величина ω может быть весьма легко снята с чертежа. Совершенно так же с чертежа может

быть снят и угол β, равный углу, под которым виден из точки s отрезок $z_0 z_1$ в направлении от z_0 к z_1.[1])

Пусть тем или иным путем мы свели задачу о решении интегрального уравнения к задаче о решении системы алгебраических линейных уравнений.

В силу того, что решение исходной проблемы не единственно, полученная алгебраическая система будет либо неопределенной, либо иметь определитель, близкий к нулю. К ней мы должны присоединить еще условие, фиксирующее начальное значение для $\vartheta : \vartheta(0) = 0$.

Например, если мы заменяем интеграл конечной суммой, то в полученной системе уравнений

$$\vartheta(s_i) = \sum_{j=1}^{n} K(s_i, s_j)\,\vartheta(s_j)\,\Delta s_j - 2\beta(s_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

мы можем выпустить одно из уравнений и к остальным присоединить дополнительное уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n} K(0, s_j)\,\vartheta(s_j)\,\Delta s_j - 2\beta(0) = 0.$$

Наконец, если область имеет m осей симметрии, то, по совершенно понятным соображениям, число уравнений из-за симметрии значений $\vartheta(s)$ должно уменьшиться в $m+1$ раз.

Решив интегральное уравнение, мы найдем соответствие между точками контура L и окружности $|\zeta| = 1$ в виде зависимости центрального угла ϑ от длины дуги s контура L. Пользуясь ею, мы сможем построить либо функцию, преобразующую область B на круг, либо, наоборот, функцию, преобразующую круг на область.

В первом случае для построения $F(z)$ можно воспользоваться, например, равенством (3). Интеграл, стоящий в правой части его, может быть приближенно вычислен по одному из известных способов, например путем замены его суммой:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \ln \frac{t_{k+1} - z}{t_k - z}.$$

Наоборот, пусть нам нужно найти обратную функцию, преобразующую круг на область. Тогда мы можем воспользоваться сопряженными тригонометрическими рядами.

По известному соответствию между точками контура L и единичной окружности $|\zeta| = 1$ найдем каким-либо путем зависимость координат x и y точек контура от полярного угла ϑ плоскости ζ. Выберем

[1]) Все это будет иметь силу для всех интегральных уравнений, с которыми мы встретимся ниже.

одну из этих координат, например x, и представим ее приближенно тригонометрическим полиномом:

$$x = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta).$$

Вторая координата y, ввиду сопряженности x и y, тогда должна представляться сопряженным тригонометрическим полиномом:

$$y = \sum_{\nu=0}^{n} (-b_\nu \cos \nu\vartheta + a_\nu \sin \nu\vartheta),$$

в котором все коэффициенты за исключением b_0 известны. Свободный же член b_0 должен быть найден из известного соответствия между точками окружности и контура L.

По найденным x и y затем строится полином степени n, представляющий приближенно функцию, отображающую круг $|\zeta| < 1$ на B:

$$z = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - ib_\nu)\,\zeta^\nu.$$

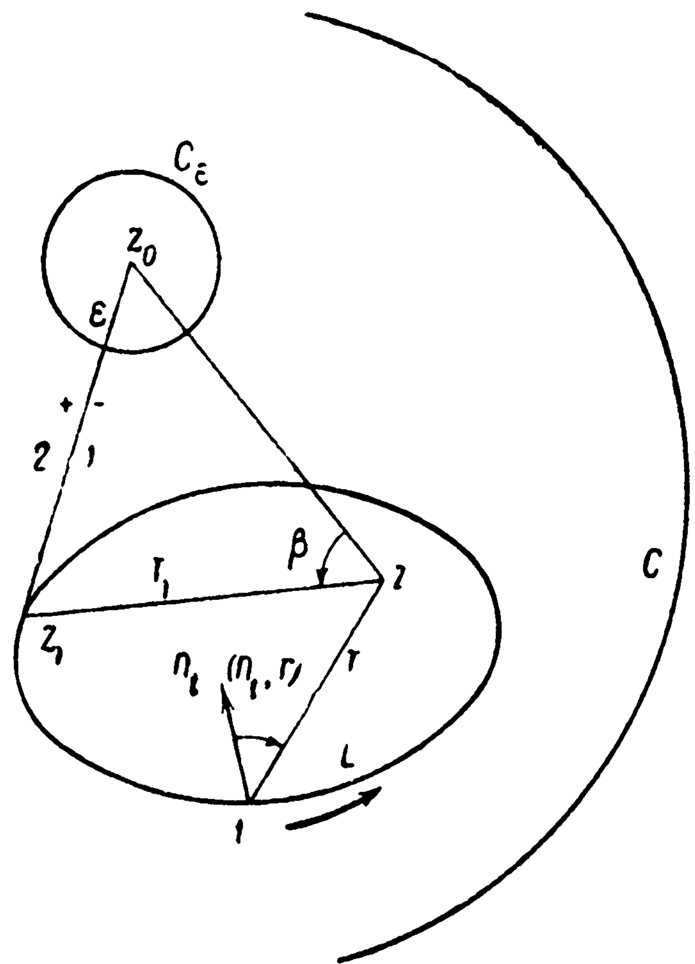


Рис. 55.

3. Интегральное уравнение для преобразования внешних областей. Обратимся сейчас к случаю преобразования области B, внешней по отношению к контуру L плоскости z, на внешность единичного круга плоскости ζ. Пусть при преобразовании (рис. 55) точка $z_0 \neq \infty$ внутри области B переходит в бесконечно далекую точку плоскости ζ и точка z_1 контура L — в $\zeta = 1$. Подобно предыдущему, нам удобно рассмотреть не самую функцию ζ, совершающую требуемое преобразование, а ее логарифм $\ln \zeta = \ln \rho + i\vartheta$. Чтобы установить интегральное уравнение для ϑ в разбираемом случае, построим контур L', состоящий из данной кривой L, разреза, идущего из z_1 к z_0, малой окружности C_ε около z_0 и окружности C большого радиуса R.

Внутри L' каждая ветвь $\ln \zeta = F(z)$ будет регулярной и однозначной функцией:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{F(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{F(t)}{t-z}\,dt - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \frac{F(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{F(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{2-1} \frac{F(t)}{t-z}\,dt.$$

Так как вблизи точки z_0 $\zeta(z)$ имеет строение $\zeta(z)=\frac{a}{z-z_0}+$ голоморфная функция, то на окружности C_ε радиуса ε около z_0 справедлива оценка $|F(t)|\leqslant M|\ln\varepsilon|$ и, следовательно,

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}\,dt\right|\leqslant\frac{2\pi M}{\min|t-z|}\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon|\to 0\quad\text{при }\varepsilon\to 0.$$

Далее, в области бесконечно далекой точки плоскости функция $\zeta(z)$ голоморфна и потому $\zeta(z)$ и $F(z)$ могут быть представлены в виде

$$\zeta(z)=\zeta_\infty\left(1+\frac{\alpha}{z}+\ldots\right),\quad F(z)=\ln\zeta_\infty+\frac{\beta}{z}+\ldots$$

Множитель $\frac{1}{t-z}$ имеет там представление:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}+\frac{z}{t^2}+\ldots$$

Поэтому

$$\frac{F(t)}{t-z}=\frac{\ln\zeta_\infty}{t}+\frac{\gamma}{t^2}+\ldots\quad\text{и}\quad\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=\ln\zeta_\infty.$$

Обходу около точки z_0 со стороны *2* разреза к стороне *1* соответствует обход бесконечно далекой точки плоскости ζ в положительном направлении, и, стало быть,

$$F(\overset{-}{z})=F(\overset{+}{z})+2\pi i.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-1}\frac{F(t)}{t-z}\,dt=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z_1}^{z_0}\frac{2\pi i}{t-z}\,dt=\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}.$$

Наконец, ввиду того что на контуре L $F(t)=i\vartheta$, получаем:

$$F(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{\vartheta\,dt}{t-z}+\ln\frac{z_1-z}{z_0-z}+\ln\zeta_\infty.$$

Если положить теперь $\zeta_\infty=\rho_\infty e^{i\vartheta_\infty}$, а в остальном сохранить старые обозначения, то мы будем иметь:

$$F(z)=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{\vartheta e^{-i(n_t,\,r)}}{r}\,d\sigma+\ln\frac{r_1\rho_\infty}{r_0}\,e^{i(\beta+\vartheta_\infty)}.\tag{9}$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, найдем:

$$\left.\begin{aligned}\ln\rho&=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{\vartheta\sin(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma+\ln\frac{r_1\rho_\infty}{r_0},\\ \vartheta&=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{\vartheta\cos(n_t,\,r)}{r}\,d\sigma+\beta+\vartheta_\infty.\end{aligned}\right\}\tag{9'}$$

Здесь β имеет то же значение, что и в n° 1 — это есть угол, под которым виден из точки z отрезок $z_0 z_1$, направленный от z_0 к z_1.

Будем приближать точку z к точке s контура L. Предел, к которому стремится интеграл $\int\limits_L \frac{\vartheta \cos(n_t, r)}{r} d\sigma$, так как мы приближаемся к контуру L извне, будет равен:

$$-\pi\vartheta(s) + \int\limits_L \frac{\vartheta \cos(n_t, r)}{r} d\sigma.$$

В пределе из второго равенства (9') получим следующее интегральное уравнение для $\vartheta(s)$:

$$\vartheta(s) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_L \frac{\vartheta \cos(n_t, r)}{r} d\sigma + 2[\beta(s) + \vartheta_\infty]. \tag{10}$$

Оно будет частным случаем уравнения:

$$\vartheta(s) = \lambda \int\limits_L K(s, \sigma)\, \vartheta(\sigma)\, d\sigma + 2[\beta(s) + \vartheta_\infty], \tag{11}$$

где $K(s, \sigma)$ имеет прежнее значение, при значении параметра $\lambda = -1$, не являющемся его собственным числом, и имеет поэтому единственное решение.

В правую часть его входит неизвестная нам величина ϑ_∞, равная аргументу той точки, которая соответствует бесконечно далекой точке плоскости ζ. Изменению ϑ_∞ соответствует поворот всей плоскости ζ около начала координат.[1]) Мы раньше делали конформное преобразование определенным, устанавливая соответствие между точкой контура L и точкой окружности $|\zeta| = 1$. Того же можно достигнуть, задавая значение ϑ_∞. При решении уравнения (11) поэтому мы можем выбрать ϑ_∞ по произволу.

После того как найдена $\vartheta(s)$, функцию, совершающую преобразование внешности кривой на внешность окружности, можно искать приближенно, либо пользуясь формулами (9), либо прибегая к интерполяции при помощи рациональных функций.

Перейдем теперь к случаю, когда бесконечно далекая точка плоскости z переходит в бесконечно далекую же точку плоскости ζ.

Обозначим $\zeta = f(z)$ — функцию, совершающую конформное преобразование B на внешность некоторой окружности с центром в точке $\zeta = 0$ плоскости ζ. Поставленными условиями преобразую-

---

[1]) Это видно из уравнения (10), так как при изменении ϑ_∞ на некоторое число, в силу $\int\limits_L \frac{\cos(n_t, r)}{r} d\sigma = \pi$, $\vartheta(s)$ изменится на столько же.

щая функция определяется с точностью до постоянного комплексного множителя. Для упрощения вычислений этот множитель мы выберем так, чтобы разложение $f(z)$ в окрестности бесконечно далекой точки имело форму

$$\zeta = f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

Выберем на L произвольную точку z_1 и рассмотрим функцию $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_1}$. Она регулярна всюду внутри B и отлична там от нуля. Любая ветвь ее логарифма есть регулярная функция в B. Так как $\varphi(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z - z_1} = 1$, будет существовать такая ветвь $\ln \varphi(z)$, которая обращается в нуль в бесконечно далекой точке. Мы выберем эту ветвь и применим к ней формулу Коши:

$$\ln \varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln \varphi(t)}{t - z} dt.$$

Интеграл по L берется в направлении против часовой стрелки.

Если сюда вместо $\ln \varphi(z)$ подставить его значение $\ln f(z) - \ln(z - z_1)$, мы после простых вычислений получим следующее равенство:

$$\ln \zeta = \ln f(z) = \ln(z - z_1) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln f(t)}{t - z} dt.$$

Положим здесь $\zeta = f(z) = \rho e^{i\vartheta}$, $z - z_1 = r_1 e^{i\beta}$ и отделим вещественную часть от мнимой:

$$\ln \rho = \ln r_1 - \frac{1}{2\pi} \int\limits_L \frac{\vartheta(\sigma) \sin(n_t, r)}{r} d\sigma,$$

$$\vartheta = \beta - \frac{1}{2\pi} \int\limits_L \frac{\vartheta(\sigma) \cos(n_t, r)}{r} d\sigma.$$

Если во втором из этих равенств устремить z к точке контура L, отвечающей длине дуги s, получим после предельного перехода на контур следующее интегральное уравнение для предельных значений $\vartheta(s)$ на L:

$$\vartheta(s) = 2\beta(s) - \frac{1}{\pi} \int\limits_L \frac{\vartheta(\sigma) \cos(n_t, r)}{r} d\sigma, \tag{12}$$

где $\beta(s)$ есть угол, под которым вектор $z - z_1$ наклонен к положительному направлению вещественной оси.

После нахождения $\vartheta(s)$ дальнейшее уже не представляет затруднений. Пусть, например, нам нужно преобразовать область $|\xi| \geqslant 1$ на внешность контура L. Координаты x и y контура L находим как

функции $x(\vartheta)$, $y(\vartheta)$ угла ϑ. Представляем первую из них приближенно тригонометрическим полиномом:

$$x(\vartheta)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta). \tag{13}$$

В разложении же для $y(\vartheta)=\sum_{k=0}^{n}(c_k\cos k\vartheta+d_k\sin k\vartheta)$ находим только два первых члена, т. е. вычисляем коэффициенты c_0, c_1, d_1.

Преобразующая функция тогда будет:

$$z=\alpha_{-1}\zeta+\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{\zeta^k}, \tag{14}$$

где

$$\alpha_{-1}=\frac{a_1+d_1}{2}+i\frac{c_1-b_1}{2},$$

$$\alpha_0=a_0+ic_0,$$

$$\alpha_1=\frac{a_1-d_1}{2}+i\frac{b_1+c_1}{2}, \tag{15}$$

$$\alpha_k=a_k+ib_k,\quad k\geqslant 2. \tag{16}$$

4. Преобразование области на плоскость с параллельными разрезами. В некоторых вопросах, например, при изучении обтекания плоско-параллельным потенциальным потоком жидкости различных препятствий, бывает необходимо находить функцию, совершающую конформное преобразование заданной многосвязной области на плоскость с разрезами, параллельными какому-либо направлению, которое можно всегда считать совпадающим с направлением вещественной оси.

Мы получим сейчас интегральное уравнение для вещественной части преобразующей функции.[1])

Пусть дело идет о нахождении функции $\zeta=\xi+i\eta$, преобразующей внешность B системы контуров L_1, L_2, . . . , L_n на плоскость ζ с разрезами, параллельными вещественной оси (рис. 56):

$$\eta=\eta_k\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{17}$$

---

[1]) Задача о построении преобразующей функции была приведена Г. М. Голузиным к решению системы функциональных уравнений весьма простого вида и установлена возможность ее решения последовательными приближениями при предположении достаточной удаленности друг от друга граничных кривых. В некоторых случаях этот метод дает возможность эффективного построения разыскиваемой функции. Вычисления становятся особенно простыми, когда область есть внешность нескольких кругов. См. Г. М. Голузин [1].

при этом так, чтобы бесконечно далекие точки соответствовали друг другу:

$$\zeta(\infty)=\infty.$$

Опишем окружность C настолько большого радиуса R, чтобы все

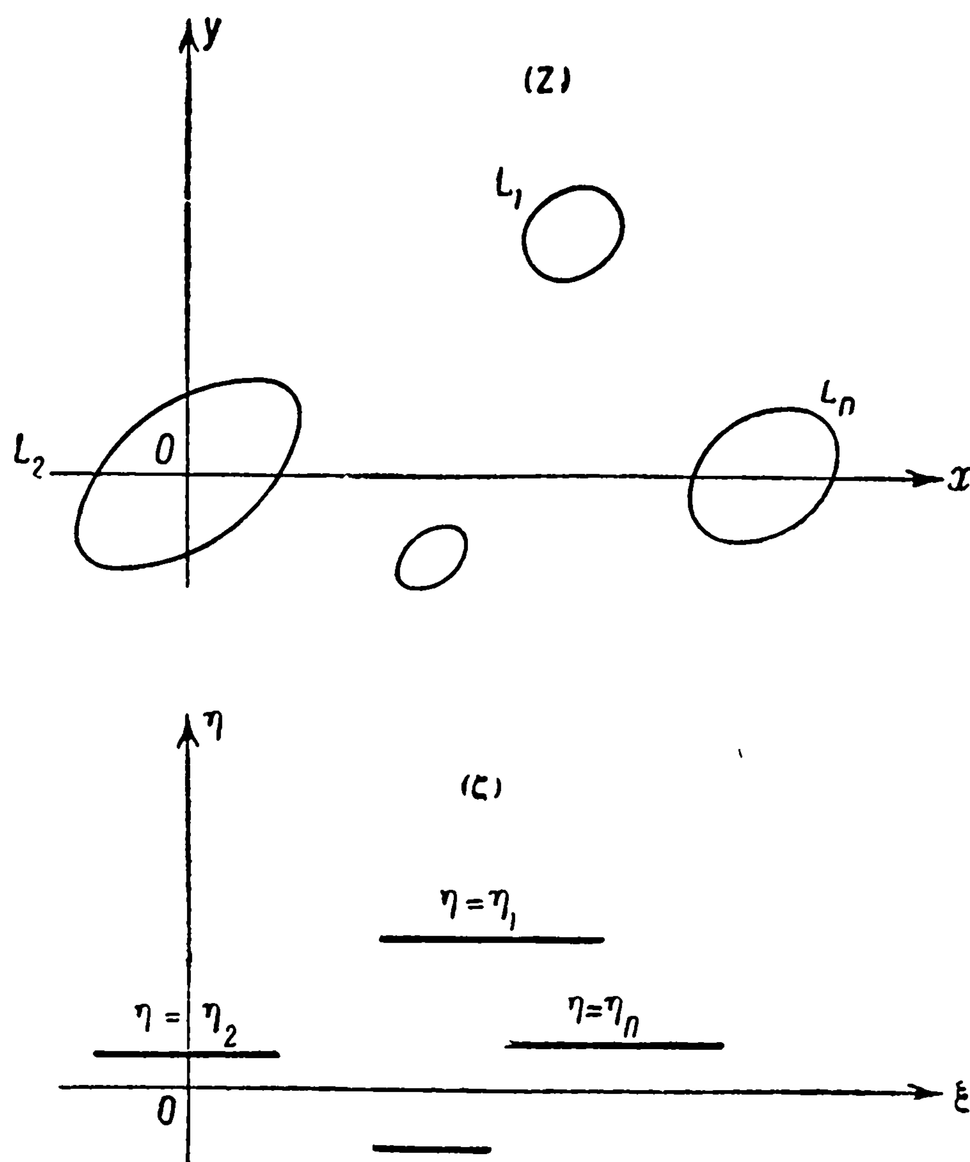


Рис. 56.

контуры L_k попали внутрь нее, и применим теорему Коши к лежащей внутри C части области B:

$$\zeta=f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\right\}.$$

Так как в окрестности бесконечно далекой точки $f(z)$ имеет, очевидно, разложение вида:

$$f(z)=cz+c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots, \quad c_0=\gamma_0+i\delta_0,$$

то интеграл по окружности C даст:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt=cz+c_0.$$

Если же принять, кроме того, во внимание, что на контуре L_k $\zeta = \xi_k + i\eta_k$ и точка z лежит вне всех контуров L_k, так что

$$\int\limits_{L_k} \frac{\eta_k}{t-z}\,dt = 0,$$

мы получим следующее выражение для преобразующей функции через значения ее вещественной части на контурах:

$$f(z) = cz + c_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{\xi_k}{t-z}\,dt. \tag{18}$$

Отделение вещественной и мнимой частей приводит к равенствам:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \mathrm{Re}\,[cz] + \gamma_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\xi_k \cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma, \\ \eta &= \mathrm{I}\,[cz] + \delta_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\xi_k \sin(n_t, r)}{r}\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Переходя в первом из них к пределу при z, стремящейся к точке s контура L_k, и имея в виду, что

$$\int\limits_{L_k} \frac{\xi_k \cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma \to \int\limits_{L_k} \frac{\xi_k \cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \pi\xi_k(s),$$

получим следующие интегральные уравнения для $\xi_k(s)$:

$$\xi_k(s) = 2\mathrm{Re}\,[cz + c_0]_s - \\ - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int\limits_{L_j} \frac{\xi_j(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma\,^{1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

где значок у вещественной части $cz + c_0$ показывает, что она должна быть вычислена, когда z совпадает с точкой s контура L_k. Можно показать, что система (20) имеет единственное решение. Решая ее, мы найдем граничные значения вещественной части преобразующей функции. Внося же найденные выражения в формулу (18), восстановим по ним преобразующую функцию. Из рассуждений видно, что она будет найдена лишь с точностью до остающегося произвольным линейного слагаемого $cz + c_0$.

---

[1]) Когда s — угловая точка контура, то в левой части должно стоять $\frac{\delta}{\pi}\xi_k(s)$, где δ — внешний угол контура в точке s. Подобное замечание относится и ко всем другим интегральным уравнениям в этом номере.

Изменению постоянной c_0 соответствует, очевидно, параллельный перенос плоскости ζ. Далее, если мы одновременно изменим модули c и c_0 в несколько раз, то во столько же раз изменятся все ξ_k, что вытекает из уравнений (20) и, следовательно, во столько же раз изменится и $\zeta = f(z)$, как это видно из (18). Наконец, аргумент c определяет направление в точке $\zeta = \infty$, в которое переходит направление вещественной оси на бесконечности плоскости z после преобразования. Постоянные c и c_0 можно задавать произвольно. Проще всего считать $c_0 = 0$, $c = 1$. После определения $\xi_k(s)$ из системы (20) мнимая часть η функции $f(z)$ найдется из второго равенства (19), сама же функция может быть найдена по формуле (18).

Для приближенного построения ζ можно воспользоваться интерполяцией при помощи рациональных функций. Возьмем внутри каждого из контуров L_k точку a_k. Для достаточно широкого класса областей B можно подобрать такую рациональную функцию вида

$$\zeta = cz + c_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{\alpha_s^{(k)}}{(z-a_k)^s}, \tag{21}$$

которая отличалась бы от функции $f(z)$, совершающей требуемое конформное преобразование, на величину как угодно малую. Мы предположим, что это различие лежит за границей допустимой погрешности так, что на контурах вещественная часть написанной рациональной функции совпадает с ξ_k и мнимая часть с η_k. Для определения соответствующих такому выбору рациональной функции коэффициентов можно поступить следующим образом. Умножим предыдущее выражение на $(z-a_k)^{s-1}$ и проинтегрируем по контуру L_k; пользуясь известными теоремами вычетов, мы можем написать:

$$\int_{L_k} \zeta (z-a_k)^{s-1}\, dz = 2\pi i \alpha_s^{(k)}.$$

Но на L_k $\zeta = \zeta_k + i\eta_k$, и так как $\int_{L_k} \eta_k (z-a_k)^{s-1}\, dz = 0$, в силу постоянства η_k, имеем:

$$\alpha_s^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \xi_k (z-a_k)^{s-1}\, dz.$$

Подобным же способом можно построить интегральное уравнение для того случая, когда при преобразовании в бесконечно далекую точку плоскости ζ переходит точка z_0, лежащая на конечном расстоянии. В окрестности z_0 $f(z)$ должна иметь разложение вида:

$$f(z) = \frac{c}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots$$

Пусть, далее, ζ_∞ — та точка плоскости ζ, в которую переходит $z=\infty$, так что $f(\infty)=\zeta_\infty$.

Применение формулы Коши приводит здесь нас к равенству:

$$f(z)=\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\xi_k}{t-z}\,dt,$$

равносильному двум следующим:

$$\xi=\operatorname{Re}\left[\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty\right]-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\xi_k(\sigma)\cos(n_t,r)}{r}\,d\sigma,$$

$$\eta=\operatorname{I}\left[\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\xi_k(\sigma)\sin(n_t,r)}{r}\,d\sigma.$$

Отсюда путем предельного перехода на контур L_k получается система уравнений для $\xi_k(s)$:

$$\xi_k(s)=2\operatorname{Re}\left[\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty\right]_s-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{L_j}\frac{\xi_j(\sigma)\cos(n_t,r)}{r}\,d\sigma \qquad (22)$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Эта система содержит в правой части выражение $\frac{c}{z-z_0}+\zeta_\infty$, остающееся произвольным при вычислениях. Постоянные c и ζ_∞ имеют значения, аналогичные значениям c и c_0 в предыдущей задаче. Система имеет, при фиксированном свободном члене, единственное решение.

Мы остановимся еще на том случае преобразования многосвязной области на плоскость с разрезом, когда бесконечно далекая точка не принадлежит области.

Пусть область B ограничена внешним контуром L_0 и несколькими внутренними контурами $L_1, \ldots, L_n$. Будем искать функцию, преобразующую ее на плоскость с разрезом так, чтобы заданная точка z_0 переходила бы в бесконечно далекую точку плоскости ζ. При этом границы области перейдут в разрезы:

$$\eta=\eta_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Опишем около точки z_0 окружность C_ε малого радиуса ε и для полученной после этого области применим интеграл Коши:

$$\zeta=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{L_0}\frac{f(t)}{t-z}\,dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}\frac{f(t)}{t-z}\,dt-\int_{C_\varepsilon}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\right].$$

В окрестности точки z_0 $f(z)$ должна иметь строение:

$$f(z)=\frac{c}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots$$

и поэтому

$$\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=-2\pi i\frac{c}{z-z_0},$$

остальные же интегралы имеют там вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=i\eta_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\xi_0}{t-z}\,dt,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\xi_k}{t-z}\,dt,$$

и мы получим следующее выражение преобразующей функции через граничные значения ее вещественной части:

$$f(z)=\frac{c}{z-z_0}+i\eta_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\xi_0}{t-z}\,dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{\xi_k}{t-z}\,dt. \tag{23}$$

Отделение вещественной и мнимой частей дает:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\operatorname{Re}\left[\frac{c}{z-z_0}\right]+\\&\qquad+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0}\frac{\xi_0\cos(n_t,r)}{r}\,d\sigma-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}\frac{\xi_k\cos(n_t,r)}{r}\,d\sigma,\\ \eta&=\mathrm{I}\left[\frac{c}{z-z_0}\right]+\eta_0-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0}\frac{\xi_0\sin(n_t,r)}{r}\,d\sigma+\\&\qquad+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}\frac{\xi_k\sin(n_t,r)}{r}\,d\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Предельный переход в первом из этих соотношений на контур L_k позволяет построить интегральные уравнения для $\xi_k(s)$:

$$\begin{aligned}\xi_k(s)&=2\operatorname{Re}\left[\frac{c}{z-z_0}\right]_s+\\&+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_0}\frac{\xi_0(\sigma)\cos(n_t,r)}{r}\,d\sigma-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_j}\frac{\xi_j(\sigma)\cos(n_t,r)}{r}\,d\sigma\\&\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).\end{aligned} \tag{25}$$

В правых частях системы содержится остающийся неопределенным коэффициент c, о значении которого мы упоминали выше. После вы-

бора его система все же не будет иметь единственного решения, ибо соответствующая однородная система будет, как легко видеть, иметь решение $\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi_n = \text{const}$. Причину этого внимательный читатель вероятно уже заметил. Во всех предыдущих формулах у нас входило лишь одно постоянное слагаемое η_0, соответствующее параллельному переносу разрезов вдоль мнимой оси; возможность же переноса их вдоль оси ξ и послужила, очевидно, причиной неопределенности системы (25). Чтобы сделать задачу определенной, мы должны к (25) добавить еще начальное значение для одного из ξ_k, положив, например, $\xi_0(0) = 0$.

5. Преобразование многосвязной области на плоскость с разрезами, лежащими на лучах, исходящих из одной точки. В § 8 при выяснении связи между функцией Грина для задачи Неймана и конформным преобразованием заданной области мы показали, что эта функция Грина тесно связана с проблемой преобразования области на плоскость с разрезами, расположенными на лучах, исходящих из одной точки. Сейчас мы построим систему интегральных уравнений, к решению которых сводится построение аналитической функции, доставляющей такое преобразование.

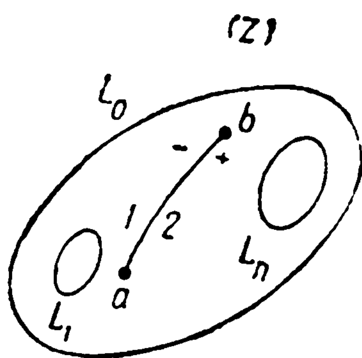


Рис. 57.

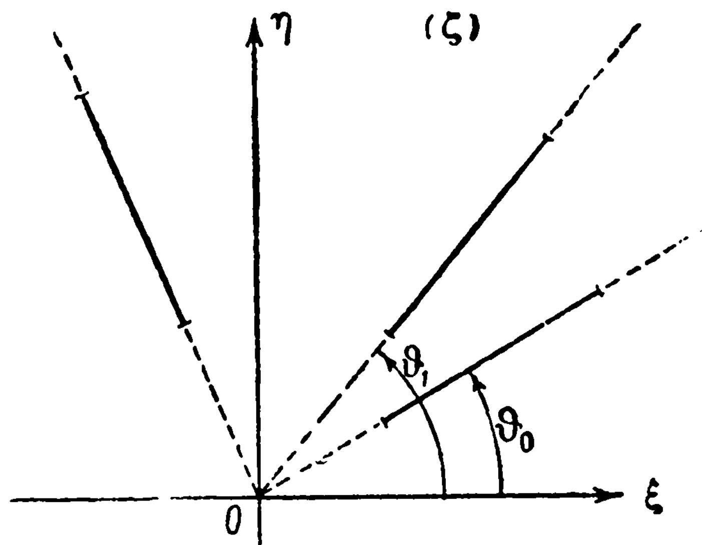


Рис. 58.

Пусть область B $(n+1)$-связна, ограничена внешней кривой L_0 и n внутренними кривыми $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (рис. 57).

Выберем в B две произвольные точки a и b и будем искать функцию

$$\zeta = \rho e^{i\vartheta} = f(z),$$

совершающую однолистное преобразование области B на плоскость ζ (рис. 58) так, чтобы:

1) точка a переходила в начало координат плоскости ζ:

$$f(a) = 0;$$

2) точка b переходила в бесконечно далекую точку плоскости ζ:

$$f(b) = \infty;$$

3) граничные кривые $L_0, \ldots, L_n$ переходили в разрезы вдоль некоторых лучей, исходящих из начала координат:

$$\arg\zeta = \vartheta = \vartheta_k \text{ на } L_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Заметим здесь, что один из углов ϑ_k, например ϑ_0, мы можем задавать произвольно, остальные же должны быть найдены.

Поставленными условиями преобразующая функция $\zeta = f(z)$ определяется, как это выясняется в теории конформного преобразования, с точностью до произвольного постоянного комплексного множителя. Изменению последнего будет отвечать подобное преобразование плоскости ζ с центром в точке $\zeta = 0$ и вращение ее около этой точки.

Проведем в B разрез, соединяющий точки a и b. Отметим положительный и отрицательный борта этого разреза так, чтобы при обходе точки a против часовой стрелки мы переходили с отрицательного борта разреза на положительный.

Рассмотрим функцию $\ln f(z)$. Любая ветвь ее в области B с разрезом будет однозначной функцией.

Выберем какую-либо одну ветвь и применим к ней формулу Коши:

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{\ln f(t)}{t-z}\,dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{\ln f(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-2} \frac{\ln f(t)}{t-z}\,dt.$$

Последний интеграл берется сначала по отрицательной стороне разреза от a до b и затем по положительной стороне его от b к a. Так как значения $\ln f(z)$ на различных бортах разреза связаны друг с другом равенством

$$\ln f(\overset{+}{z}) = \ln f(\overset{-}{z}) + 2\pi i,$$

интеграл по разрезу вычисляется просто и будет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-2} \frac{\ln f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{\ln f(\overset{-}{t}) - \ln f(\overset{+}{t})}{t-z}\,dt = -\ln\frac{b-z}{a-z}.$$

Примем еще во внимание, что на каждой из граничных кривых

$$\ln f(z) = \ln \rho_k(s) + i\vartheta_k,$$

где ϑ_k есть некоторая постоянная и $\rho_k(s)$ — неизвестная нам функция положения точки на L_k. Далее, так как точка z лежит внутри L_0 и вне всех $L_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$,

$$\int\limits_{L_0} \frac{\vartheta_0}{t-z}\,dt = 2\pi i\vartheta_0, \qquad \int\limits_{L_k} \frac{\vartheta_k}{t-z}\,dt = 0.$$

Поэтому

$$\ln f(z) = i\vartheta_0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{\ln \rho_0(\sigma)\,dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{\ln \rho_k(\sigma)\,dt}{t-z} - \ln\frac{b-z}{a-z}. \quad (26)$$

Если отделить здесь вещественную и мнимую части, получим два следующих равенства:

$$\ln \rho = \ln\left|\frac{a-z}{b-z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0} \frac{\ln \rho_0(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k} \frac{\ln \rho_k(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma, \quad (27)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \arg\frac{a-z}{b-z} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0} \frac{\ln \rho_0(\sigma)\sin(n_t, r)}{r}\,d\sigma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k} \frac{\ln \rho_k(\sigma)\sin(n_t, r)}{r}\,d\sigma.$$

Здесь, как и прежде, n_t — внутренняя нормаль к граничной кривой в точке t,[1] $r = |t - z|$, (n_t, r) есть угол между нормалью n_t и r, отсчитываемый от n_t к r, и σ — длина дуги, отсчитываемая от некоторой начальной точки до переменной точки t.

Если в первом из этих равенств устремить точку z к какой-либо точке кривой L_0 или L_j с длиной дуги s и принять во внимание, что при приближении z к L_0

$$\int\limits_{L_0} \frac{\ln \rho_0(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma \to \pi \ln \rho_0(s) + \int\limits_{L_0} \frac{\ln \rho_0(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma,$$

а при приближении z к L_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\int\limits_{L_j} \frac{\ln \rho_j(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma \to -\pi \ln \rho_j(s) + \int\limits_{L_j} \frac{\ln \rho_j(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma,$$

получим следующую систему интегральных уравнений для определения предельных значений логарифма модуля преобразующей функции на граничных кривых L_j:

$$\ln \rho_j(s) = 2\ln\left|\frac{a-z}{b-z}\right| + \frac{1}{\pi}\int\limits_{L_0} \frac{\ln \rho_0(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int\limits_{L_k} \frac{\ln \rho_k(\sigma)\cos(n_t, r)}{r}\,d\sigma. \quad (28)$$

[1] Для L_0 она будет внутренней нормалью к области B, а для L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — внешней нормалью к области B.

Эта система отличается от системы (25) только свободным членом.

Соответствующая однородная система имеет ненулевое решение $\ln \rho_0(s) = \ln \rho_1(s) = \ldots = C$, где C — произвольная постоянная. Чтобы сделать задачу о ее решении определенной, нужно задать начальное значение одной из функций $\rho_j(s)$. После того как найдены предельные значения модуля, логарифм преобразующей функции определяется по формуле (26) с точностью до чисто мнимого слагаемого $i\vartheta_0$, соответствующего вращению плоскости ζ около начала координат.

Мы ограничимся выводом уравнений только для этого основного случая. В остальных случаях уравнения выводятся аналогичным способом.

§ 10. Отображение многоугольника на полуплоскость

1. Вывод формулы Кристоффеля — Шварца. Конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник с заданными внутренними углами совершается при помощи некоторой определенной функции, для которой можно получить явное выражение. Получим это выражение. Пусть это будет функция $z = f(t)$. Она совершает конформное преобразование верхней полуплоскости плоскости t на многоугольник A плоскости z. Величины внутренних углов этого многоугольника обозначим через $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$. Вершины многоугольника назовем $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Они соответствуют некоторым точкам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вещественной оси плоскости t. Будем считать, что все эти точки лежат на конечном расстоянии и выбраны таким образом, что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Исследуем поведение функции $f(t)$ в окрестности этих точек.[1]) Рассмотрим некоторую точку a_k. Функция $z = f(t)$ отображает окрестность точки a_k на окрестность точки b_k (b_k — комплексная координата вершины A_k). Углу π в плоскости t соответствует в плоскости z угол $\alpha_k\pi$.

Рассмотрим еще функцию

$$w = (z - b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}.$$

Эта функция окрестность точки b_k плоскости z будет отображать на окрестность нулевой точки плоскости w. Углу $\alpha_k\pi$ в плоскости z будет соответствовать в плоскости w угол π. Часть многоугольника A, лежащая вблизи вершины A_k, будет отображаться на часть плоскости w, лежащую около нулевой точки по одну сторону прямой l, проходя-

[1]) Более подробно этот вопрос изложен в книгах: В. И. Смирнов [1], т. III, ч. 2, п. 36, И. И. Привалов [3], гл. XII, § 8, п. 3.

щей через нулевую точку. Эта прямая является отображением сторон $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1}.

Два последовательных отображения с помощью функций

$$z=f(t) \text{ и } w=(z-b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

преобразуют конформно и взаимно однозначно окрестность точки a_k, лежащую по одну сторону вещественной оси, в окрестность точки $w=0$, лежащую по одну сторону прямой l. Пользуясь принципом симметрии, мы можем утверждать, что функция

$$w=[f(t)-b_k]^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

будет отображать конформно и взаимно однозначно полную окрестность точки $t=a_k$ на полную окрестность точки $w=0$. Функция w должна быть поэтому регулярной функцией t в окрестности $t=a_k$. Таким образом, имеет место разложение:

$$w=c_1(t-a_k)+c_2(t-a_k)^2+\ \dots \quad (c_1\neq 0)$$

или

$$(z-b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}=c_1(t-a_k)+c_2(t-a_k)^2+\ \dots$$

Возведем обе части последнего равенства в степень α_k. Тогда получим:

$$z=b_k+d_1(t-a_k)^{\alpha_k}\left[1+\frac{c_2}{c_1}(t-a_k)+\dots\right]^{\alpha_k},$$

или

$$f(t)=b_k+d_1(t-a_k)^{\alpha_k}f_1(t),$$

где функция $f_1(t)$ регулярна около точки $t=a_k$:

$$f_1(t)=1+d_2(t-a_k)+\ \dots$$

Составим

$$\varphi(t)=\frac{f''(t)}{f'(t)};$$

$$f'(t)=\alpha_k d_1(t-a_k)^{\alpha_k-1}f_1(t)+d_1(t-a_k)^{\alpha_k}f_1'(t),$$

$$f''(t)=\alpha_k(\alpha_k-1)d_1(t-a_k)^{\alpha_k-2}f_1(t)+2\alpha_k d_1(t-a_k)^{\alpha_k-1}f_1'(t)+ \\ +d_1(t-a_k)^{\alpha_k}f_1''(t),$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{t-a_k}\cdot\frac{\alpha_k(\alpha_k-1)f_1(t)+2\alpha_k(t-a_k)f_1'(t)+(t-a_k)^2f_1''(t)}{\alpha_k f_1(t)+(t-a_k)f_1'(t)}.$$

Второй множитель есть регулярная функция в окрестности $t=a_k$. Его значение в этой точке равно α_k-1. Следовательно, точка $t=a_k$

является простым полюсом функции $\varphi(t)$ с вычетом, равным $\alpha_k - 1$. Функция $\varphi(t)$ в окрестности точки a_k имеет разложение:

$$\varphi(t) = \frac{\alpha_k - 1}{t - a_k} + \text{регулярная функция.}$$

Производная $f'(t)$ обращается в нуль или бесконечность только в точках a_k; поэтому $\varphi(t)$ никаких других особых точек на конечном расстоянии не имеет. Таким образом, на всей плоскости t имеет место разложение:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{t - a_k} + \varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t)$ — функция, регулярная на всей плоскости t. Далее, бесконечно далекая точка плоскости t перейдет в определенную конечную точку на стороне многоугольника и является точкой регулярности функции $f(t)$. Отсюда легко убедиться, что $\varphi_1(t) = 0$.

Для $\dfrac{f''(t)}{f'(t)}$ имеем выражение:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{t - a_k}.$$

Интегрируя два раза, последовательно получим:

$$\ln f'(t) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \ln (t - a_k) + \ln C_1 =$$

$$= \ln C_1 (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1},$$

$$f(t) = C_1 \int_0^t (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \, dt + C_2. \qquad (1)$$

Это и дает требуемое аналитическое выражение $f(t)$.

Ограничение, что точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежат на конечном расстоянии, легко устранить. Если точка, соответствующая вершине A_n многоугольника, находится на бесконечности, то выражение для отображающей функции может быть получено из (1) при помощи замены переменной:

$$t = -\frac{1}{\tau} + a_n.$$

Пользуясь равенством

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n - 2,$$

после элементарных преобразований получим

$$f(\tau) = C_1' \int_0^\tau (\tau - a_1')^{\alpha_1 - 1} (\tau - a_2')^{\alpha_2 - 1} \ldots (\tau - a_{n-1}')^{\alpha_{n-1} - 1} \, d\tau + C_2', \qquad (2)$$

где $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}$ — точки вещественной оси плоскости τ, соответствующие точкам $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ плоскости t. Выведенные нами формулы (1) и (2) обычно называют интегралом Кристоффеля—Шварца. [1])

2. Значение параметров, входящих в интеграл Кристоффеля — Шварца. Функция

$$z = C_1 \int_0^t (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1} \ldots (t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt + C_2, \qquad (3)$$

отображающая верхнюю полуплоскость плоскости t на многоугольник плоскости z, содержит $2n+2$ параметра: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, a_1, \ldots, a_n, C_1, C_2$. Если значения всех этих параметров известны, то элементы многоугольника определяются просто. Внутренние углы многоугольника равны: $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$. Координаты b_k вершин A_k определяются равенствами:

$$b_k = C_1 \int_0^{a_k} (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1} \ldots (t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt + C_2. \qquad (4)$$

Здесь k пробегает значения $1, 2, \ldots, n$. Длина стороны A_kA_{k+1} может быть определена следующим образом:

длина $A_kA_{k+1} =$

$$= |b_{k+1} - b_k| = \Big| C_1 \int_0^{a_{k+1}} (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1} \ldots (t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt +$$

$$+ C_2 - \left[C_1 \int_0^{a_k} (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1} \ldots (t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt + C_2 \right] \Big| =$$

$$= |C_1| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1} \ldots (t-a_k)^{\alpha_k-1}(a_{k+1}-t)^{\alpha_{k+1}-1} \ldots$$

$$\ldots (a_n-t)^{\alpha_n-1}\,dt. \qquad (5)$$

На основании формул (4) и (5) очень легко выяснить роль параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, C_1, C_2$. Роль параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, представляющих отношения углов многоугольника к углу π, видна непосредственно. Параметр C_2 входит в качестве слагаемого в выражение координаты каждой вершины; поэтому при изменении C_2 координаты всех вершин будут изменяться на одну и ту же величину и весь многоугольник как целое будет смещаться. Параметр C_1 входит в качестве множителя в выражение длины каждой стороны многоугольника; поэтому при изменении C_1 длины всех сторон изменяются в одинаковое число раз и, кроме того, многоугольник поворачивается, и мы получаем

[1]) Шварц [1], Кристоффель [1].

подобный многоугольник. Изменению параметров $a_1, \ldots, a_n$ соответствует относительное изменение длин сторон многоугольника.

До сих пор мы занимались лишь многоугольником с заданными углами и совсем не заботились о сторонах многоугольника. В практических вопросах обычно требуется найти функцию, совершающую конформное преобразование полуплоскости (или круга) на заданный определенным образом многоугольник A. Для составления этой функции необходимо соответствующим образом определить параметры

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ C_1,\ C_2.$$

Углы многоугольника, как и раньше, обозначим $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$, а отношение 2-й, 3-й, ..., $(n-2)$-й стороны к первой стороне — через $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-2}$, т. е.

$$\frac{A_2A_3}{A_1A_2}=\lambda_2,\quad \frac{A_3A_4}{A_1A_2}=\lambda_3,\ \ldots,\ \frac{A_{n-2}A_{n-1}}{A_1A_2}=\lambda_{n-2}, \tag{6}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершины многоугольника A. Заметим, что отношения последних двух сторон к первой стороне определяются на основании этих данных. Если мы в функции

$$z^*=\int\limits_0^t (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\ \ldots\ (t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt$$

числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ подберем таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения (6), и за $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ возьмем отношения углов заданного многоугольника к углу π, то эта функция будет совершать конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник A^*, подобный A. От A^* к A мы можем перейти следующим образом. Перенесем какую-нибудь вершину, например A_k^*, многоугольника A^* в соответствующую вершину A_k многоугольника A, затем повернем многоугольник A^* около этой вершины так, чтобы его стороны стали параллельны сторонам многоугольника A, и, наконец, не изменяя положения вершины A_k^*, изменим длину всех сторон A^* таким образом, чтобы он совпал с A. Все это может быть достигнуто линейным преобразованием

$$z=C_1z^*+C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из сопоставления положения и линейных размеров многоугольников A^* и A.

Для определения параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мы имеем только $n-3$ уравнения. Поэтому три параметра могут быть взяты совершенно произвольно. Это соответствует тому факту, что с помощью дробно-линейной подстановки в интеграл вида (3) мы можем верхнюю полуплоскость перевести самое в себя, причем так, чтобы три точки вещественной оси перешли в три любые наперед заданные точки той же оси. За эти произвольные точки возьмем $t=a_1$, $t=a_2$ и $t=a_n$ и обозначим их, в отличие от других точек, подлежащих определению,

через p_1, p_2 и p_3. Напишем соотношения (6) в раскрытом виде:

$$\left.\begin{aligned} I_2(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}) &= \lambda_2 I_1(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}), \\ I_3(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}) &= \lambda_3 I_1(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_{n-2}(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}) &= \lambda_{n-2} I_1(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{p_1}^{p_2} (t-p_1)^{\alpha_1-1}(p_2-t)^{\alpha_2-1}(a_3-t)^{\alpha_3-1}\ldots \\ &\qquad\ldots(a_{n-1}-t)^{\alpha_{n-1}-1}(p_3-t)^{\alpha_n-1}\,dt, \\ I_2 &= \int\limits_{p_2}^{a_3} (t-p_1)^{\alpha_1-1}(t-p_2)^{\alpha_2-1}(a_3-t)^{\alpha_3-1}\ldots \\ &\qquad\ldots(a_{n-1}-t)^{\alpha_{n-1}-1}(p_3-t)^{\alpha_n-1}\,dt, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_{n-2} &= \int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} (t-p_1)^{\alpha_1-1}(t-p_2)^{\alpha_2-1}(t-a_3)^{\alpha_3-1}\ldots \\ &\ldots(t-a_{n-2})^{\alpha_{n-2}-1}(a_{n-1}-t)^{\alpha_{n-1}-1}(p_3-t)^{\alpha_n-1}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

3. О методе Ньютона — Фурье для системы уравнений (7) и о вычислении несобственных интегралов. В предыдущем пункте было показано, что для составления функции, совершающей конформное преобразование верхней полуплоскости на многоугольник с заданными углами и заданным отношением сторон, необходимо знать постоянные $a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$, являющиеся решением системы уравнений:

$$\begin{aligned} I_2(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}) &= \lambda_2 I_1(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}), \\ I_3(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}) &= \lambda_3 I_1(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_{n-2}(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}) &= \lambda_{n-2} I_1(a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

На основании теоремы о единственности функции, совершающей конформное преобразование двух заданных областей друг на друга, можно утверждать, что при выбранных p_1, p_2 и p_3 эта система имеет решение и притом единственное. Будем эту систему решать по методу, называемому обычно методом Ньютона — Фурье. [1])

Пусть $a_3^*, a_4^*, \ldots, a_{n-1}^*$ — решение системы. За начальные значения возьмем числа $a_3^{(0)}, a_4^{(0)}, \ldots, a_{n-1}^{(0)}$, мало отличающиеся от $a_3^*, a_4^*, \ldots, a_{n-1}^*$.

---

[1]) П. П. Куфаревым [1] предложен метод определения постоянных, существенно отличный от излагаемого здесь и основанный на использовании дифференциального уравнения Левнера.

Разложим каждое уравнение системы (7) в ряд Тэйлора по степеням разностей:

$$a_3^* - a_3^{(0)},\ a_4^* - a_4^{(0)}, \ldots, a_{n-1}^* - a_{n-1}^{(0)}, \tag{9}$$

и оборвем эти ряды на первых степенях разностей. Тогда мы получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&I_2^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial I_2^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial I_2^{(0)}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_2^{(0)}}{\partial a_{n-1}} = \\
&= \lambda_2 \left[I_1^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}} \right], \\
&I_3^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial I_3^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial I_3^{(0)}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_3^{(0)}}{\partial a_{n-1}} = \\
&= \lambda_3 \left[I_1^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}} \right], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&I_{n-2}^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial I_{n-2}^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial I_{n-2}^{(0)}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_{n-2}^{(0)}}{\partial a_{n-1}} = \\
&= \lambda_{n-2} \left[I_1^{(0)} + \alpha_3^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_3} + \alpha_4^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_4} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}} \right].
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В этой системе уравнений неизвестными являются искаженные значения разностей (9): $\alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(1)}$, а свободными членами и коэффициентами при неизвестных — значения $I_1, I_2, \ldots, I_{n-2}$ и значения первых производных от них по $a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$ при $a_3 = a_3^{(0)}$, $a_4 = a_4^{(0)}, \ldots, a_{n-1} = a_{n-1}^{(0)}$.[1])

Приведем эту систему к обычному виду и решим. По найденным значениям $\alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(1)}$ и начальным значениям $a_3^{(0)}, a_4^{(0)}, \ldots, a_{n-1}^{(0)}$ построим первые приближения:

$$a_3^{(1)} = a_3^{(0)} + \alpha^{(1)},\ a_4^{(1)} = a_4^{(0)} + \alpha_4^{(1)}, \ldots,\ a_{n-1}^{(1)} = a_{n-1}^{(0)} + \alpha_{n-1}^{(1)}.$$

Затем, раскладывая уравнения системы (7) в ряды Тэйлора по степеням разностей

$$a_3^* - a_3^{(1)},\ a_4^* - a_4^{(1)}, \ldots, a_{n-1}^* - a_{n-1}^{(1)} \tag{11}$$

и обрывая эти ряды на первых степенях разностей, построим систему уравнений (10′), аналогичную системе (10). В системе (10′) неизвестными будут $\alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(2)}$ — искаженные значения разностей (11), а свободными членами и коэффициентами при неизвестных — те же

---

[1]) При составлении $\frac{\partial I_2}{\partial a_3}, \frac{\partial I_3}{\partial a_3}, \frac{\partial I_3}{\partial a_4}, \ldots, \frac{\partial I_{n-2}}{\partial a_{n-2}}, \frac{\partial I_{n-2}}{\partial a_{n-1}}$ удобно в интегралах $I_2, I_3, \ldots, I_{n-2}$ перейти к пределам, не зависящим от тех величин, по которым производится дифференцирование.

выражения, что и в системе (10), но только вычисленные при $a_3 = a_3^{(1)}$, $a_4 = a_4^{(1)}, \ldots, a_{n-1} = a_{n-1}^{(1)}$.

Из системы (10′) найдем $\alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(2)}$ и затем построим вторые приближения:

$$a_3^{(2)} = a_3^{(1)} + \alpha_3^{(2)}, \quad a_4^{(2)} = a_4^{(1)} + \alpha_4^{(2)}, \ldots, \quad a_{n-1}^{(2)} = a_{n-1}^{(1)} + \alpha_{n-1}^{(2)}.$$

Можно показать, что определитель системы (10) отличен от нуля, т. е. что уравнения для определения поправок α всегда разрешимы, и что если начальные значения взяты достаточно близко к искомым, то, пользуясь методом Ньютона — Фурье, мы можем к решению $a_3^*, a_4^*, \ldots, a_{n-1}^*$ подойти сколь угодно близко.[1])

Для определения координат вершин многоугольника, длин его сторон и осуществления только что изложенного метода решения системы (7) необходимо уметь вычислять интегралы вида

$$E = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - p_1)^{\alpha_1 - 1} (t - p_2)^{\alpha_2 - 1} (t - a_3)^{\alpha_3 - 1} \ldots$$
$$\ldots (t - a_k)^{\alpha_k - 1} (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} \ldots (p_3 - t)^{\alpha_n - 1}\, dt.$$

Эти интегралы несобственные. Подынтегральная функция каждого из них может обратиться в бесконечность в двух точках — при t, равном нижнему и верхнему пределам интегрирования. Однако эти несобственные интегралы существуют. Это непосредственно вытекает из признака Коши, так как числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ всегда больше нуля. Всякий интеграл такого вида может быть вычислен по методу, предложенному Л. В. Канторовичем [4]. Идея этого метода состоит в следующем. Подынтегральную функцию обозначим $F(t)$. Ее можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
F(t) &= (t - p_1)^{\alpha_1 - 1} (t - p_2)^{\alpha_2 - 1} (t - a_3)^{\alpha_3 - 1} \ldots \\
&\quad \ldots (t - a_k)^{\alpha_k - 1} (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} \ldots (p_3 - t)^{\alpha_n - 1} = \\
&= (t - a_k)^{\alpha_k - 1} [\varphi(a_k) + \varphi'(a_k)(t - a_k)] + \\
&+ (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} [\psi(a_{k+1}) - \psi'(a_{k+1})(a_{k+1} - t)] + \\
&+ \{F(t) - (t - a_k)^{\alpha_k - 1} [\varphi(a_k) + \varphi'(a_k)(t - a_k)] - \\
&- (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} [\psi(a_{k+1}) - \psi'(a_{k+1})(a_{k+1} - t)]\},
\end{aligned}$$

---

[1]). Н. П. Стенин [1]. В этой работе также дан критерий, с помощью которого по данным начальным значениям можно сказать, что они гарантируют сходящийся процесс, если применение метода Ньютона — Фурье начать с этих значений. Более точные условия сходимости этого метода указаны в гл. IV работы Л. В. Канторовича [18]. См. также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XVIII.

где

$$\varphi(t) = (t-p_1)^{\alpha_1-1}(t-p_2)^{\alpha_2-1}(t-a_3)^{\alpha_3-1}\ldots$$
$$\ldots(t-a_{k-1})^{\alpha_{k-1}-1}(a_{k+1}-t)^{\alpha_{k+1}-1}\ldots(p_3-t)^{\alpha_n-1},$$
$$\psi(t) = (t-p_1)^{\alpha_1-1}(t-p_2)^{\alpha_2-1}(t-a_3)^{\alpha_3-1}\ldots$$
$$\ldots(t-a_k)^{\alpha_k-1}(a_{k+2}-t)^{\alpha_{k+2}-1}\ldots(p_3-t)^{\alpha_n-1}.$$

Интеграл E можно разбить на два интеграла E_1 и E_2:

$$E_1 = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \{(t-a_k)^{\alpha_k-1}[\varphi(a_k)+\varphi'(a_k)(t-a_k)] +$$
$$+(a_{k+1}-t)^{\alpha_{k+1}-1}[\psi(a_{k+1})-\psi'(a_{k+1})(a_{k+1}-t)]\}\,dt,$$
$$E_2 = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \{F(t)-(t-a_k)^{\alpha_k-1}[\varphi(a_k)+\varphi'(a_k)(t-a_k)] -$$
$$-(a_{k+1}-t)^{\alpha_{k+1}-1}[\psi(a_{k+1})-\psi'(a_{k+1})(a_{k+1}-t)]\}\,dt.$$

Интеграл E_1 легко вычисляется в конечном виде, а интеграл E_2 совсем не имеет особенностей, так как подынтегральная функция непрерывна вместе с производной. Поэтому E_1 вычисляется точно, а E_2 можно находить приближенно по какой-нибудь из известных формул приближенного вычисления определенных интегралов.

4. Примеры. Применим рассуждения предыдущих пунктов к частным случаям.

Пример 1. Многоугольником A является треугольник с углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$. Так как два треугольника, имеющие равные углы, всегда подобны, то в этом случае не надо заботиться о выборе постоянных a. За точки $t=a_1$, $t=a_2$, $t=a_3$ могут быть взяты три произвольные точки вещественной оси.

Положим $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=\infty$. Согласно формуле (2), отображающая функция будет иметь вид

$$z = C_1\int_0^t t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,dt + C_2.$$

Для полного определения отображающей функции еще необходимо найти постоянные C_1 и C_2.

Определим C_1 и C_2 для случая равнобедренного прямоугольного треугольника, вершинами которого служат точки $A_1(0)$, $A_2(1)$ и $A_3(i)$.

Точке $t=0$ пусть соответствует вершина A_1, а точке $t=1$ — вершина A_2. Тогда $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{4}$ и отображающей функцией будет

$$z = C_1\int_0^t t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt + C_2.$$

Так как по условию $t=0$ должно соответствовать $z=0$, то $C_2=0$. При $t=1$ мы должны получить координату вершины A_2; следовательно, C_1 должно быть таким, что

$$C_1 \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt = 1,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt}.$$

Займемся вычислением интеграла, стоящего в знаменателе.[1]) Обозначим его через I:

$$I = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt = I_1 + I_2.$$

Вычислим сначала I_1. Подынтегральную функцию представим следующим образом:

$$t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} = t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{4} t\right) + t^{-\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} t \right].$$

Тогда

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{4} t\right) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} t \right] dt.$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно: он равен 1,5910. Второй интеграл вычислим по формуле Симпсона. Обозначим

$$t^{-\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} t \right]$$

через $y(t)$; тогда

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{16}\right) = 0{,}0104, \quad y\left(\frac{1}{8}\right) = 0{,}0328,$$
$$y\left(\frac{3}{16}\right) = 0{,}0644, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}1066, \quad y\left(\frac{5}{16}\right) = 0{,}1612,$$
$$y\left(\frac{3}{8}\right) = 0{,}2309, \quad y\left(\frac{7}{16}\right) = 0{,}3198, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4339,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y(t)\, dt = 0{,}0707,$$

$$I_1 = 1{,}5910 + 0{,}0707 = 1{,}6617.$$

---

[1]) Отметим, что этот интеграл есть $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ — эйлеров интеграл первого рода.

Перейдем к вычислению I_2. Подынтегральную функцию представим следующим образом:

$$t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}=(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[1+\frac{1}{2}(1-t)\right]+(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[t^{-\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}(1-t)\right];$$

тогда

$$I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[1+\frac{1}{2}(1-t)\right]dt+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\left[t^{-\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}(1-t)\right]dt.$$

Первый интеграл равен 3,5318. Второй интеграл вычисляется так же, как и вторая часть интеграла I_1. Он равен 0,0506.

$$I_2=3{,}5824;\quad I=I_1+I_2=5{,}2441.$$

Таким образом,

$$C_1=\frac{1}{5{,}2441}=0{,}1907.$$

Задача полностью решена.

Для проверки вычислим еще гипотенузу треугольника:

$$A_2A_3=0{,}1907\int\limits_{1}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{3}{4}}dt,$$

$$\int\limits_{1}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{3}{4}}dt=2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}}d\tau\ \left(\text{замена}\ \ \tau=\frac{1}{t}\right),$$

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}(1-\tau)^{-\frac{3}{4}}d\tau=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}\left(1+\frac{3}{4}\tau\right)d\tau+\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{4}}\left[(1-\tau)^{-\frac{3}{4}}-1-\frac{3}{4}\tau\right]d\tau=$$

$$=3{,}6158+0{,}0922=3{,}7080,$$

$$A_2A_3=0{,}1907\cdot 2\cdot 3{,}7080=1{,}4142.$$

Точное значение A_2A_3 равно $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$

Пример 2. Многоугольником A является прямоугольник, вершинами которого служат точки:

$$A_1(-\omega),\ A_2(\omega),\ A_3(\omega+\omega i)\ \text{и}\ A_4(-\omega+\omega i),$$

где ω — вещественная постоянная. Предположим сначала, что правая половина верхней полуплоскости ($\operatorname{Re}(t)>0$, $\operatorname{I}(t)>0$) отображена на правую часть прямоугольника так, что точка $t=0$ перешла в $z=0$, $t=1$ в $z=\omega$ и $t=\infty$ в $z=\omega i$. Сделаем отражение в мнимых осях на плоскости t и на плоскости z. Тогда по принципу симметрии будем иметь отображение всей верхней полуплоскости на весь прямоугольник, причем $t=0$ будет соответствовать $z=0$; $t=1$, $z=\omega$; $t=-1$, $z=-\omega$; $t=\infty$, $z=\omega i$.

Вершины A_3 и A_4 будут соответствовать точкам, симметричным относительно мнимой оси; пусть это будут точки $\frac{1}{K}$ и $-\frac{1}{K}$, где $K<1$. Отображающая функция будет иметь вид:

$$z=C_1\int_0^t (t+1)^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{K}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t+\frac{1}{K}\right)^{-\frac{1}{2}}dt$$

или

$$z=C'_1\int_0^t (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Определим K таким образом, чтобы отношение

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{2\omega}{\omega}=2.$$

Система (7) в этом случае сводится к одному уравнению:

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=2\int_1^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Интеграл $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$ может быть заменен на

$$2\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Подставляя в уравнение для определения K и сокращая на 2, получим

$$\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=\int_1^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Введем обозначения:

$$\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=I_1(K),$$

$$\int_0^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=I_2(K).$$

Уравнение $I_1(K)=I_2(K)$ будем решать по методу Ньютона—Фурье. Нам придется иметь дело только с одной поправкой, а поэтому будем ее называть h со значком внизу, указывающим на номер приближения. За начальное приближение возьмем $K=\frac{1}{2}$. Для определения h_1 будем иметь уравнение

$$I_1\left(\frac{1}{2}\right)+h_1\frac{dI_1\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}=I_2\left(\frac{1}{2}\right)+h_1\frac{dI_2\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}.$$

Вычислим свободный член и коэффициенты этого уравнения. Имеем

$$I_1\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]dt.$$

Пусть

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\psi(t).$$

Тогда $\psi_1(1)=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\psi'(1)=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подынтегральная функция $I_1\left(\frac{1}{2}\right)$ может быть представлена следующим образом:

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\sqrt{\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{12}(1-t)\right]+$$
$$+(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{3}}(1-t)\right].$$

Тогда

$$I_1\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{12}(1-t)\right]dt+$$
$$+\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{3}}(1-t)\right]dt.$$

Первый интеграл $=1{,}5877$.

Второй интеграл вычислим по формуле Симпсона с тремя промежуточными точками. Подынтегральную функцию обозначим через $y(t)$. Тогда $y(0)=0{,}2515$; $y\left(\frac{1}{4}\right)=0{,}1571$; $y\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}0860$; $y\left(\frac{3}{4}\right)=0{,}0318$; $y(1)=0$;

$$\int_0^1 y(t)\,dt=\frac{1}{12}\,[0{,}2515+4\cdot 0{,}1571+2\cdot 0{,}0860+4\cdot 0{,}0318]=0{,}0983,$$

$$I_1\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}6860.$$

Дифференцируя $I_1(K)$ по K, получим:

$$\frac{dI_1(K)}{dK}=\int_0^1\frac{Kt^2dt}{(1-t^2)^{1/2}(1-K^2t^2)^{3/2}},$$

$$\frac{dI_1\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2dt}{(1-t^2)^{1/2}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Вычисляя с помощью того же метода, найдем $\dfrac{dI_1\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}=0{,}54$.

Перейдем к вычислению $I_2\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\dfrac{dI_2\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}$.

Имея в виду дифференцирование $I_2(K)$ по K, преобразуем этот интеграл от интервала $\left(1, \frac{1}{K}\right)$ к интервалу $(0,1)$. Сделаем замену переменной, положив

$$t = \frac{(1-K)\,t_1 + K}{K}.$$

Тогда

$$I_2(K) = \int_0^1 [(1-K)\,t_1^2 + 2Kt_1]^{-\frac{1}{2}} [(1+K) - 2Kt_1 - (1-K)\,t_1^2]^{-\frac{1}{2}}\, dt_1,$$

$$\frac{dI_2(K)}{dK} = \int_0^1 [(1-K)\,t_1^2 - (1-3K)\,t_1 - (1+2K)]\,t_1^{-\frac{1}{2}} (1-t_1)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times [(1-K)t_1 + 2K]^{-\frac{3}{2}} [(1+K) + (1-K)\,t_1]^{-\frac{3}{2}}\, dt_1,$$

$$I_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t_1^2 + t_1\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} - t_1 - \frac{1}{2}\,t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt_1 =$$

$$= 2\int_0^1 t_1^{-\frac{1}{2}} (2+t_1)^{-\frac{1}{2}} (1-t_1)^{-\frac{1}{2}} (3+t_1)^{-\frac{1}{2}}\, dt_1 =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} t_1^{-\frac{1}{2}} (2+t_1)^{-\frac{1}{2}} (1-t_1)^{-\frac{1}{2}} (3+t_1)^{-\frac{1}{2}}\, dt_1 +$$

$$+ 2\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-\frac{1}{2}} (2+t_1)^{-\frac{1}{2}} (1-t_1)^{-\frac{1}{2}} (3+t_1)^{-\frac{1}{2}}\, dt_1.$$

Каждый из последних интегралов разбиваем на два, первые из которых вычисляются непосредственно, а вторые—по формуле Симпсона. Выполнив все вычисления, получим:

$$I_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2{,}1570.$$

Вычисление $\dfrac{dI_2\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}$ производится совершенно так же, как и вычисление всех предыдущих интегралов, а поэтому мы его опускаем:

$$\frac{dI_2\left(\frac{1}{2}\right)}{dK} = -1{,}76.$$

Подставляя найденные значения $I_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $\dfrac{dI_1\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}$, $I_2\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\dfrac{dI_2\left(\frac{1}{2}\right)}{dK}$

в уравнение для h_1, получим:

$$1{,}6860+0{,}54h_1=2{,}1570-1{,}76h_1,$$

откуда $h_1=0{,}2$. Первое приближение будет равно $0{,}5+0{,}2=0{,}7$.

Для определения h_2 будем иметь уравнение:

$$I_1(0{,}7)+h_2\frac{dI_1(0{,}7)}{dK}=I_2(0{,}7)+h_2\frac{dI_2(0{,}7)}{dK}.$$

Вычисление свободного члена и коэффициента этого уравнения производится так же, как и для случая $K=\frac{1}{2}$. Выполнив все вычисления, получим: [1])

$$I_1(0{,}7)=1{,}8458,\qquad I_2(0{,}7)=1{,}8631,$$
$$\frac{dI_1(0{,}7)}{dK}=1{,}18,\qquad \frac{dI_2(0{,}7)}{dK}=-1{,}21.$$

Уравнение для h_2 поэтому может быть написано следующим образом:

$$1{,}8458+1{,}18h_2=1{,}8631-1{,}21h_2,$$

откуда $h_2=0{,}0072$. Второе приближенное значение K равно 0,7072.

Легко найти точное значение K. Во второй интеграл нашего уравнения для определения K, т. е. в

$$I_2(K)=\int_1^{\frac{1}{K}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

введем новую переменную интегрирования x по формуле:

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-K_1^2x^2}},$$

где $K_1^2=1-K^2$. Тогда

$$I_2(K)=\int_0^1(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K_1^2x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Наше уравнение будет иметь вид:

$$\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_0^1(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-K_1^2x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Следовательно,

$$K=K_1 \text{ или } K^2=1-K^2,$$

откуда

$$K=\sqrt{\frac{1}{2}}=0{,}7071.$$

Сравнивая приближенное значение K с точным, видим, что во втором приближении мы допускаем ошибку, меньшую 0,0002.

---

[1]) Заметим, что в данном частном примере требуемые интегралы можно найти, не пользуясь указанным выше методом, а с помощью таблиц эллиптических интегралов.

5. Отображение полуплоскости на произвольный четырехугольник. Покажем, что в случае четырехугольника не надо заботиться о выборе начальных значений.

Пусть верхняя полуплоскость плоскости t конформно отображена на четырехугольник с углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, $\alpha_4\pi$ и отношением четвертой стороны к первой, равным λ.

Нумерацию углов предположим выбранной таким образом, что угол $\alpha_1\pi$ будет не меньше каждого из остальных. Вершинам четырехугольника пусть соответствуют точки -1, 1, a и 3. Это не ограничивает общности. Дробно-линейным преобразованием верхнюю полуплоскость можно отобразить самое в себя так, что точки -1, 1, 3 перейдут в любые точки вещественной оси. Поэтому во всех дальнейших рассуждениях этого параграфа мы будем предполагать a заключенным между 1 и 3.

Отображающая функция будет иметь вид:

$$z(t) = C_1 \int_0^t (t+1)^{\alpha_1-1} (t-1)^{\alpha_2-1} (t-a)^{\alpha_3-1} (t-3)^{\alpha_4-1}\, dt + C_2.$$

Для определения a имеем уравнение:

$$I_4(a) = \lambda I_1(a),$$

где

$$I_4(a) = \int_3^\infty (t+1)^{\alpha_1-1} (t-1)^{\alpha_2-1} (t-a)^{\alpha_3-1} (t-3)^{\alpha_4-1} dt + \\ + \int_{-\infty}^{-1} (-1-t)^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} (a-t)^{\alpha_3-1} (3-t)^{\alpha_4-1}\, dt$$

и

$$I_1(a) = \int_{-1}^{1} (t+1)^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} (a-t)^{\alpha_3-1} (3-t)^{\alpha_4-1}\, dt.$$

В интегралах, выражающих $I_4(a)$, перейдем к конечному промежутку интегрирования. Для этого сделаем замену переменных, положив в первом интеграле $t = 2 + \frac{1}{x}$, а во втором $t = -\frac{1}{x}$.

Тогда

$$I_4(a) = \int_0^1 (1+3x)^{\alpha_1-1} (1+x)^{\alpha_2-1} [1+(2-a)\, x]^{\alpha_3-1} (1-x)^{\alpha_4-1} dx + \\ + \int_0^1 (1-x)^{\alpha_1-1} (1+x)^{\alpha_2-1} (1+ax)^{\alpha_3-1} (1+3x)^{\alpha_4-1}\, dx.$$

Положим $f(a) = I_4(a) - \lambda I_1(a)$; покажем, что $f'(a)$ положительна. Имеем:

$$f'(a) = (1-\alpha_3)\left\{\int_0^1 x(1+3x)^{\alpha_1-1}(1+x)^{\alpha_2-1}\times\right.$$
$$\times[1+(2-a)x]^{\alpha_3-2}(1-x)^{\alpha_4-1}\,dx -$$
$$-\int_0^1 x(1-x)^{\alpha_1-1}(1+x)^{\alpha_2-1}(1+ax)^{\alpha_3-2}(1+3x)^{\alpha_4-1}\,dx +$$
$$\left. + \lambda\int_{-1}^1 (t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}(a-t)^{\alpha_3-2}(3-t)^{\alpha_4-1}\,dt\right\},$$

или

$$f'(a) = (1-\alpha_3)\left\{\int_0^1 x(1+3x)^{\alpha_4-1}(1+x)^{\alpha_2-1}(1-x)^{\alpha_4-1}\times\right.$$
$$\times\left[\frac{(1+3x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{[1+(2-a)x]^{2-\alpha_3}} - \frac{(1-x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{(1+ax)^{2-\alpha_3}}\right]dx +$$
$$\left. + \lambda\int_{-1}^1 (t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}(a-t)^{\alpha_3-2}(3-t)^{\alpha_4-1}\,dt\right\}.$$

Непосредственно ясно, что выражение

$$\frac{(1+3x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{[1+(2-a)x]^{2-\alpha_3}} - \frac{(1-x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{(1+ax)^{2-\alpha_3}}$$

для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $1 \leqslant a \leqslant 3$ положительно, так как $\alpha_1 \geqslant \alpha_4$ по предположению. Следовательно, $f'(a)$ также положительна.[1]

При $a = 1$ и $a = 3$ соответственно третий и первый интегралы, входящие в выражение для $f'(a)$, перестанут существовать. Поэтому

---

[1]) Это же заключение можно сделать из рассмотрения функции

$$\Phi(a) = \frac{I_4(a)}{I_1(a)}.$$

Из единственности отображающей функции следует, что при изменении a от 1 до 3 $\Phi(a)$ будет монотонно возрастать или монотонно убывать.

$f'(1)$ и $f'(3)$ равны $+\infty$. Найдем еще $f''(a)$ и $f'''(a)$:

$$f''(a) = (1-\alpha_3)(2-\alpha_3)\left\{\int_0^1 x^2(1+3x)^{\alpha_1-1}(1+x)^{\alpha_2-1}\times\right.$$
$$\times[1+(2-a)x]^{\alpha_3-3}(1-x)^{\alpha_4-1}\,dx+$$
$$+\int_0^1 x^2(1-x)^{\alpha_1-1}(1+x)^{\alpha_2-1}(1+ax)^{\alpha_3-3}(1+3x)^{\alpha_4-1}\,dx+$$
$$\left.+\lambda\int_{-1}^1 (t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}(a-t)^{\alpha_3-3}(3-t)^{\alpha_4-1}\,dt\right\},$$

$$f'''(a) = (1-\alpha_3)(2-\alpha_3)(3-\alpha_3)\times$$
$$\times\left\{\int_0^1 x^3(1+3x)^{\alpha_1-1}(1+x)^{\alpha_2-1}[1+(2-a)x]^{\alpha_3-4}(1-x)^{\alpha_4-1}\,dx-\right.$$
$$-\int_0^1 x^3(1-x)^{\alpha_1-1}(1+x)^{\alpha_2-1}(1+ax)^{\alpha_3-4}(1+3x)^{\alpha_4-1}\,dx+$$
$$\left.+\lambda\int_{-1}^1 (t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}(a-t)^{\alpha_3-4}(3-t)^{\alpha_4-1}\,dt\right\}.$$

Производная $f'''(a)$, как и $f'(a)$, в интервале $(1, 3)$ положительна.[1] При $a=1$ $f(a)$ и $f''(a)$ равны $-\infty$, а при $a=3$ равны $+\infty$. Поэтому при изменении a от 1 до 3 $f(a)$ и $f''(a)$ будут непрерывно возрастать от $-\infty$ до $+\infty$.

Легко дать для $f'(a)$ оценку снизу.[2] Имеем:

$$\min\left\{\frac{(1+3x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{[1+(2-a)x]^{2-\alpha_3}} - \frac{(1-x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{(1+ax)^{2-\alpha_3}}\right\} = \frac{(1+3x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{(1+x)^{2-\alpha_3}} - \frac{(1-x)^{\alpha_1-\alpha_4}}{(1+x)^{2-\alpha_3}},$$
$$\min(a-t)^{\alpha_3-2} = \frac{1}{(3-t)^{2-\alpha_3}}.$$

Поэтому

$$f'(a) > (1-\alpha_3)\left\{\int_0^1 x(1+3x)^{\alpha_4-1}(1+x)^{\alpha_2+\alpha_3-3}(1-x)^{\alpha_4-1}\times\right.$$
$$\times[(1+3x)^{\alpha_1-\alpha_4}-(1-x)^{\alpha_1-\alpha_4}]\,dx+$$
$$\left.+\lambda\int_{-1}^1 (t+1)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}(3-t)^{\alpha_3+\alpha_4-3}\,dt\right\} = K.$$

---

[1]) То же самое можно сказать относительно всех других нечетных производных функции $f(a)$.

[2]) Можно указать также оценку снизу для $f'(a)$ в корне уравнения
$$f(a) = 0.$$

Из рассмотрения производных функции $f(a)$ следует, что уравнения $f(a)=0$ и $f''(a)=0$ имеют в интервале (1, 3) по одному корню. Корень первого из этих уравнений обозначим a^*, а корень второго a^{**}.

Уравнение $f(a)=0$ будем решать по методу Ньютона — Фурье.

При решении уравнений этим методом, вообще говоря, весьма существенную роль играет выбор начального значения. Покажем, что в нашем случае начальное значение не будет зависеть от взаимного расположения чисел a^{**} и a^* и что его можно взять в интервале (1, 3) совершенно произвольно.

Число a^{**} может быть: 1) равно числу a^*, 2) больше a^*, 3) меньше a^*.

Разберем все эти случаи.

1. Геометрически ясно (рис. 59), что за начальное значение в этом случае может быть взято любое число a_0 из интервала (1, 3). Докажем это аналитически. Для определенности положим, что a_0 является приближением по недостатку. В таком случае $f(a)$ и $f''(a)$ в интервале (a_0, a^*) будут отрицательными. Очевидно, существует число M такое, что для всех $a_0 \leqslant a \leqslant a^*$ будет $f'(a) < M$. Первая поправка

$$\alpha^{(1)} = -\frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

Рис. 59.

будет положительной. Введем в рассмотрение еще точные поправки. Их мы будем обозначать буквой h.

Поправка h_1 будет положительной (раз a_0 — приближение по недостатку) и будет удовлетворять уравнению:

$$f(a_0) + h_1 f'(a_0) + \frac{h_1^2}{2} f''(a^c) = 0,$$

где a^c — некоторое значение a между a_0 и a^*.

Из последнего уравнения вычтем уравнение для определения $\alpha^{(1)}$. Тогда получим:

$$(h_1 - \alpha^{(1)}) f'(a_0) = -\frac{h_1^2}{2} f''(a^c).$$

Но $h_1 - \alpha^{(1)} = h_2$, $f''(a^c) < 0$, и поэтому

$$h_2 = -\frac{h_1^2}{2}\frac{f''(a^c)}{f'(a_0)}$$

положительна.

Следовательно, первое приближение a_1, как и a_0, является приближением по недостатку. Из этого вытекает также, что и все следующие приближения будут приближениями по недостатку. Соответствующие поправки будут положительными. Точные поправки h, оставаясь положительными, будут при этом убывать.

Легко показать, что если разность между h_N и h_{N+1} достаточно мала, то и само h_N также мало.

В самом деле, пусть

$$h_N - h_{N+1} < \frac{K}{M}\varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина. Но $h_N - h_{N+1} = \alpha^{(N)}$, и поэтому $\alpha^{(N)} < \frac{K}{M}\varepsilon$. Из уравнения для определения $\alpha^{(N)}$ имеем:

$$\alpha^{(N)} = -\frac{f(a_{N-1})}{f'(a_{N-1})} = \frac{|f(a_{N-1})|}{f'(a_{N-1})}; \quad |f(a_{N-1})| = \alpha^{(N)} f'(a_{N-1});$$

h_N может быть определено из уравнения

$$f(a_{N-1}) + h_N f'(a^c) = 0, \quad \text{где } a_{N-1} < a^c < a^*.$$

Поэтому

$$h_N = \frac{|f(a_{N-1})|}{f'(a^c)} = \frac{\alpha^{(N)} f'(a_{N-1})}{f'(a^c)}; \quad h_N < \frac{K}{M}\varepsilon\frac{M}{K} = \varepsilon.$$

Следовательно, пределом последовательности положительных убывающих чисел $h_1, h_2, \ldots, h_N$ будет нуль.

Этим же способом может быть произведено исследование в том случае, когда a_0 будет приближением по избытку. Все последовательные приближения в этом случае будут также приближениями по избытку.

2. $a^{**} > a^*$.

Для начальных значений, меньших a^*, сходимость уже установлена (случай 1). В интервале (a_0, a^*) $f(a)$ и $f''(a)$ будут, как и в случае 1, отрицательными. Условие $f''(a^*) = 0$ в случае 1 осталось неиспользованным.

Пусть, далее, a_0 такое, что $a^* < a_0 \leqslant a^{**}$.

Тогда $f(a_0) > 0$, а $f''(a_0) < 0$ и для всех $a < a_0$ будет отрицательной; $\alpha^{(1)}$ и h_1 будут также отрицательными. Посмотрим, какой будет h_2:

$$h_2 = -\frac{1}{2} h_1^2 \frac{f''(a^c)}{f'(a_0)}. \quad \text{Но } f''(a^c) < 0,$$

и поэтому h_2 будет положительной. Это означает, что первое приближение будет приближением по недостатку.[1]) Такими же будут и

---

[1]) Если a_1 окажется вне интервала $(1, 3)$, т. е. будет меньше 1, то за первое приближение нужно взять другое число, большее a_1 и 1.

все дальнейшие приближения, и мы будем иметь сходимость к a^* со стороны меньших значений (опять случай 1).

Рассмотрим еще последнюю возможность

$$a_0 > a^{**}.$$

$f(a)$ будет положительной во всем интервале (a^*, a_0); $f''(a)$ в интервале (a^*, a^{**}) будет отрицательной, а в интервале (a^{**}, a_0) — положительной; $\alpha^{(1)}$ и h_1 будут отрицательными; a_1 может оказаться в одном из следующих интервалов: (a^{**}, a_0); (a^*, a^{**}); $(1, a^*)$.

Если a_1 окажется во втором или третьем интервалах, то по доказанному мы будем иметь сходимость к a^* со стороны меньших значений.

Таким образом, дополнительного исследования требует еще тот случай, когда a_1 и все следующие за ним приближения будут больше a^{**}. Однако все последовательные приближения быть больше a^{**} не могут. Непрерывно уменьшаясь и оставаясь в то же время больше a^{**}, они должны были бы стремиться к некоторому пределу, большему или равному a^{**}. При достаточно большом N разность между h_N и h_{N+1} была бы сколь угодно малой, например меньше

$$\frac{a^{**}-a^*}{2}\cdot\frac{K}{M},$$

где M — наибольшее значение $f'(a)$ в интервале (a^*, a_0). Так же, как и в случае 1, можно показать, что $|h_N|$ при этом будет меньше $\frac{a^{**}-a^*}{2}$. По предположению же $|h_N| \geqslant a^{**}-a^*$.

Полученное противоречие убеждает нас в том, что, начав осуществление метода Ньютона — Фурье с $a_0 > a^{**}$, мы перейдем через a^{**} и попадем в такой промежуток, сходимость в котором уже установлена.

3. $a^{**} < a^*$.

В этом случае тем же методом, что и в двух предыдущих, можно показать, что за a_0 может быть взято любое число из рассматриваемого интервала $(1, 3)$.

Пример. Составим функцию, отображающую верхнюю полуплоскость плоскости t на трапецию $A_1A_2A_3A_4$ плоскости z (рис. 60). Углы трапеции соответственно равны $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$. Длины сторон трапеции предположим равными 1, $\sqrt{3}$, $1+2\sqrt{3}$, 3.

Отображающей функцией будет

$$z = C_1\int_0^t (t+1)^{-\frac{1}{6}}(t-1)^{-\frac{1}{3}}(t+a)^{-\frac{2}{3}}(t-3)^{-\frac{5}{6}}\,dt + C_2.$$

Сначала займемся определением параметра a; будем определять его из уравнения

$$I_4(a) = 3I_1(a), \tag{12}$$

где

$$I_4(a) = \int_0^1 (1+3x)^{-\frac{1}{6}} (1+x)^{-\frac{1}{3}} [1+(2-a)x]^{-\frac{2}{3}} (1-x)^{-\frac{5}{6}} dx + \\ + \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{6}} (1+x)^{-\frac{1}{3}} (1+ax)^{-\frac{2}{3}} (1+3x)^{-\frac{5}{6}} dx,$$

$$I_1(a) = \int_{-1}^1 (t+1)^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} (a-t)^{-\frac{2}{3}} (3-t)^{-\frac{5}{6}} dt.$$

Первое слагаемое $I_4(a)$ обозначим $I_{41}(a)$, а второе слагаемое — $I_{42}(a)$. Тогда $I_4(a) = I_{41}(a) + I_{42}(a)$. Интеграл $I_1(a)$ представим также в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-1}^0 (t+1)^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} (a-t)^{-\frac{2}{3}} (3-t)^{-\frac{5}{6}} dt$$

и

$$\int_0^1 (t+1)^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} (a-t)^{-\frac{2}{3}} (3-t)^{-\frac{5}{6}} dt,$$

первый из которых обозначим через $I_{11}(a)$, а второй — через $I_{12}(a)$.

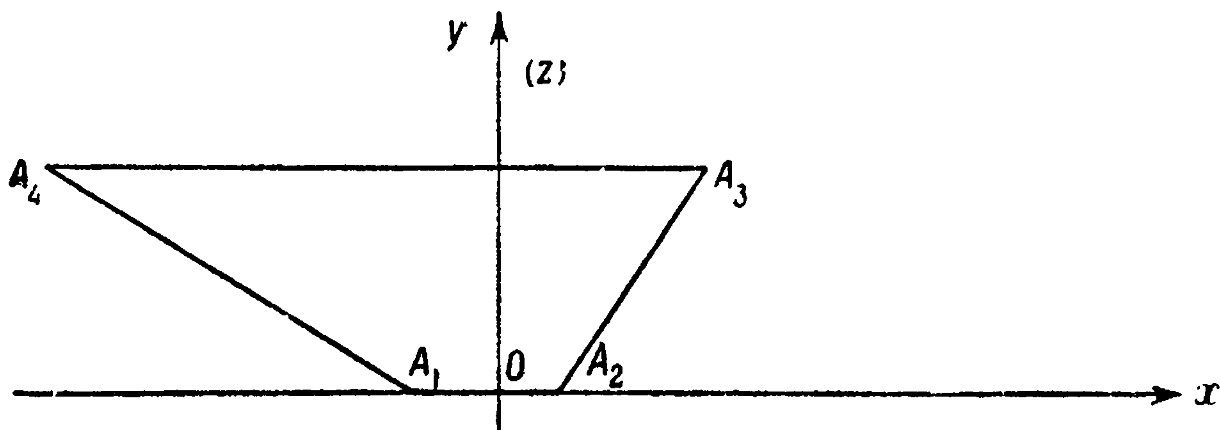


Рис. 60.

Уравнение (12) решаем по методу Ньютона — Фурье. Вычисление частных значений I_{11}, I_{12}, I_{41}, I_{42} и их производных по параметру a производим методом Л. В. Канторовича. Интегралы, не имеющие особенностей (их мы в дальнейшем называем правильными интегралами), вычисляем по формуле Симпсона с тремя промежуточными ординатами. Вычисления производим в следующем порядке: сначала составляем общие выражения для особенных интегралов, ординат Симпсона и правильных интегралов, а затем уже в полученные формулы подставляем числовые значения a.

Если за начальное значение a примем 2, то первая поправка $\alpha^{(1)}$ будет равна — 0,65, а первое приближение $a_1 = 1{,}35$. Для второй поправки $\alpha^{(2)}$ и для второго приближения a_2 получаем соответственно значения 0,015 и 1,365. Третью поправку $\alpha^{(3)}$ вычисляем, пользуясь значениями $\frac{dI_1}{da}$ и $\frac{dI_4}{da}$ при $a = 1{,}35$. Для $\alpha^{(3)}$ и a_3 получаем значения: 0,0005 и 1,3655.

Результаты вычислений видны из таблицы:

Интеграл	Элемент интеграла	При $a=2$	При $a=1,35$	При $a=1,365$	При $a=1,3655$
I_{11}	Особенный интеграл	0,1834	0,2205	0,2195	0,21944
	Правильный интеграл	0,0180	0,0272	0,0269	0,02687
I_{12}	Особенный интеграл	0,4500	0,1582	0,1998	0,20110
	Правильный интеграл	0,1101	0,7618	0,7038	0,70201
I_1		0,7615	1,1677	1,1500	1,14942
I_{41}	Особенный интеграл	3,9372	2,9213	2,9377	2,93826
	Правильный интеграл	0,0631	0,1019	0,1012	0,10111
I_{42}	Особенный интеграл	0,2253	0,2603	0,2593	0,25935
	Правильный интеграл	0,1517	0,1494	0,1495	0,14954
I_4		4,3773	3,4329	3,4478	3,44826
$3I_1$		2,2845	3,5031	3,4500	3,44826
$\frac{3}{2}I'_{11}$	Особенный интеграл	—0,0684	—0,1078	—	—
	Правильный интеграл	—0,0140	—0,0322	—	—
$\frac{3}{2}I'_{12}$	Особенный интеграл	—0,1500	—4,4790	—	—
	Правильный интеграл	—0,2871	—6,1551	—	—
I'_1		—0,3463	—1,2107	—	—
$\frac{3}{2}I'_{41}$	Особенный интеграл	3,3972	1,6285	—	—
	Правильный интеграл	—0,0667	—0,0791	—	—
$\frac{3}{2}I'_{42}$	Особенный интеграл	—0,0678	—0,0968	—	—
	Правильный интеграл	0,0022	0,0092	—	—
I'_4		2,1766	0,9745	—	—

Сопоставляя $I_4(a)$ и $3I_1(a)$, мы видим, что при $a=1,3655$ $I_4(a)$ с точностью до пятого десятичного знака равно $3I_1(a)$. Поэтому для a примем значение 1,3655.

Перейдем к определению параметров C_1 и C_2. Функция

$$z^* = \int_0^t (t+1)^{-\frac{1}{6}}(t-1)^{-\frac{1}{3}}(t-1,3655)^{-\frac{2}{3}}(t-3)^{-\frac{5}{6}}\,dt$$

будет отображать верхнюю полуплоскость плоскости t на трапецию $A_1^*A_2^*A_3^*A_4^*$, подобную заданной $A_1A_2A_3A_4$. Определим комплексную координату z_1^*

вершины A_1^*, соответствующей точке $t=-1$:

$$z_1^* = \int_0^{-1} (t+1)^{-\frac{1}{6}} (t-1)^{-\frac{1}{3}} (t-1{,}3655)^{-\frac{2}{3}} (t-3)^{-\frac{5}{6}} dt =$$

$$= -(-1)^{-\frac{11}{6}} \int_{-1}^{0} (t+1)^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} (1{,}3655-t)^{-\frac{2}{3}} (3-t)^{-\frac{5}{6}} dt =$$

$$= -(-1)^{\frac{1}{6}} \int_{-1}^{0} (t+1)^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} (1{,}3655-t)^{-\frac{2}{3}} (3-t)^{-\frac{5}{6}} dt =$$

$$= -(-1)^{\frac{1}{6}} \cdot 0{,}24631.$$

Если $(-1)^{\frac{1}{6}}$ принять равным i, то

$$z^* = -0{,}24631\, i.$$

Для комплексной координаты z_2^* вершины A_2^*, соответствующей точке $t=1$, получим значение

$$z_2^* = 0{,}90311\, i.$$

От трапеции $A_1^*A_2^*A_3^*A_4^*$ к трапеции $A_1A_2A_3A_4$ перейдем следующим образом. Преобразуем плоскость z^* в плоскость z так, чтобы вершина A_1^* перешла в A_1, а вершина A_2^* в A_2. Функция, совершающая это преобразование, будет иметь вид

$$z = C_1 z^* + C_2.$$

Для определения C_1 и C_2 будем иметь систему уравнений:

$$-0{,}5 = -0{,}24631 i\, C_1 + C_2,$$

$$0{,}5 = 0{,}90311 i\, C_1 + C_2,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{1{,}14942 i} = -0{,}87000 i \text{ и } C_2 = -0{,}28571.$$

Итак, для отображающей функции получаем выражение:

$$z = -0{,}87000 i \int_0^t (t+1)^{-\frac{1}{6}} (t-1)^{-\frac{1}{3}} (t-1{,}3655)^{-\frac{2}{3}} (t-3)^{-\frac{5}{6}} dt - 0{,}28571.$$

ГЛАВА VI

ПРИНЦИПЫ ПРИЛОЖЕНИЯ КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. Введение

1. О преобразовании оператора Лапласа. В предыдущей главе мы исследовали конформное преобразование областей друг в друга. Сейчас мы имеем в виду дать принципы его приложения к решению ряда задач математической физики.

В задачах интересующего нас типа, как мы уже имели случай отмечать, решение определяется тремя обстоятельствами: уравнением, определяющим класс функций, отвечающих изучаемому процессу; областью, для которой ищется решение, зависящей от формы изучаемого объекта, и, наконец, предельными условиями.

Пусть вместо старых независимых переменных x и y мы ввели новые переменные ξ и η при помощи равенств:

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y).$$

Искомая функция $u(x, y)$ перейдет в некоторую новую функцию u от ξ и η. При этом, вообще говоря, изменяется как дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция u, так и область, в которой она ищется, и предельные условия, которые должны быть соблюдены на границе области. Может оказаться, при надлежащем выборе новых переменных ξ и η, что новая преобразованная задача будет проще исходной, и поставленная проблема, трудно разрешимая в старых переменных, станет легко разрешимой в новых.

Оставляя в стороне общую теорию подобного рода преобразований, мы займемся сейчас конформными преобразованиями, доставляемыми парами сопряженных гармонических функций или, что то же самое, аналитическими функциями комплексной переменной.

Пусть $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$f(z)=\xi+i\eta$ будет моногенной функцией комплексной переменной $z=x+iy$. Посмотрим, как преобразуется оператор Лапласа. Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)$$

или, если воспользоваться уравнениями Коши — Римана и гармоничностью ξ и η:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right).$$

Таким образом, оператор Лапласа $\Delta_{xy}u$ в старых переменных после преобразования принимает вид:

$$\Delta_{xy}u=|f'(z)|^2\,\Delta_{\xi\eta}u. \qquad (1)$$

Отсюда следует тот известный результат, что функция, гармоническая до преобразования, будет гармонической и после него, ибо $|f'(z)|$ вообще отличен от нуля.

Отметим еще один важный с точки зрения практических приложений факт. Пусть в переменных x, y нам задано уравнение Пуассона

$$\Delta_{xy}u=\varphi,$$

где φ — известная функция от x и y.

После преобразования это уравнение примет вид:

$$\Delta_{\xi\eta}u=\frac{1}{|f'(z)|^2}\,\varphi=\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2\varphi,\quad \zeta=\xi+i\eta.$$

Мы получили вновь уравнение Пуассона, правда, с измененной правой частью. Это обстоятельство дает возможность широко применять конформное преобразование к исследованию задач, связанных с уравнением Пуассона, например задач о кручении однородных изотропных балок и стержней.

2. О преобразовании бигармонического оператора. Формула Гурса. Связь бигармонических функций с плоской задачей теории упругости. Под именем бигармонического оператора понимают оператор вида:

$$\Delta_{xy}\Delta_{xy}=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Функции же, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_{xy}\Delta_{xy}u=0, \qquad (2)$$

носят название бигармонических.

Из результата, установленного нами относительно оператора Лапласа в прошлом номере, вытекает, что после преобразования области B плоскости $z=x+iy$ при помощи функции $\zeta=f(z)=\xi+i\eta$ бигармонический оператор примет вид:

$$\Delta_{xy}\Delta_{xy}u=|f'(z)|^2\Delta_{\xi\eta}(|f'(z)|^2\Delta_{\xi\eta}u). \tag{3}$$

Отсюда видно, что функция $u(x, y)$, бигармоническая до преобразования, вообще говоря, не будет бигармонической в переменных ξ, η. Бигармонический характер ее сохранится лишь в том случае, когда $|f'(z)|=\text{const}$, т. е. при линейном преобразовании вида $\zeta=\alpha z+\beta$.

Гурса была впервые установлена важная в теории бигармонических функций формула, позволяющая весьма просто выразить эти функции через две аналитические функции комплексного переменного.

Согласно (2), $\Delta_{xy}u=r(x, y)$ должна быть гармонической функцией. Обозначим через $s(x, y)$ сопряженную с ней функцию. Тогда

$$f(z)=r+is$$

будет аналитической функцией от z. Введем функцию:

$$\varphi(z)=\frac{1}{4}\int f(z)dz=p+iq,$$

причем

$$\Delta p=\Delta q=0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}r, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{1}{4}s.$$

На основании этих равенств без затруднений можно проверить, что $u-xp-yq$ будет гармонической функцией. Назовем ее p_1 и обозначим $\chi(z)$ функцию комплексной переменной, для которой p_1 является вещественной частью:

$$u=xp+yq+p_1=\text{Re}\,[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]. \tag{4}$$

Можно показать, что и наоборот при всяких аналитических функциях $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ формула (4) дает бигармоническую функцию.[1])

Отметим еще, что при заданной функции u входящие в формулу (4) $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ определяются не вполне и содержат некоторый произвол.

В самом деле, по известной $r(x, y)$ функция $f(z)$ определится с точностью до чисто мнимого слагаемого ai, и поэтому $\varphi(z)$ найдется только с точностью до слагаемого вида

$$C+aiz,$$

[1]) Гурса [2].

где C — произвольная комплексная постоянная. Его мы можем фиксировать, задав произвольно в какой-либо точке z_0 значение самой функции $\varphi(z)$ и мнимой части ее производной, например:

$$\varphi(z_0)=0, \quad \mathrm{I}[\varphi'(z_0)]=0.$$

Далее, функция $\chi(z)$ найдется с точностью до чисто мнимой постоянной, которую можно определить, задав значение мнимой части $\chi(z)$ в z_0, например, подчинив ее требованию:

$$\mathrm{I}[\chi(z_0)]=0.$$

Уравнение (4) позволяет просто определить вид функций, в которые перейдут бигармонические функции в плоскости $z=x+iy$ после конформного преобразования.

Обозначим через $z=\omega(\zeta)$ функцию, обратную $\zeta=f(z)$, и положим:

$$\varphi[\omega(\zeta)]=\Phi(\zeta), \quad \chi[\omega(\zeta)]=\mathrm{X}(\zeta).$$

Функция $u(x, y)$ после преобразования примет вид:

$$u=\mathrm{Re}\,[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi(\zeta)+\mathrm{X}(\zeta)], \tag{5}$$

где $\Phi(\zeta)$ и $\mathrm{X}(\zeta)$ — произвольные аналитические функции переменной ζ, причем первая из них определяется при заданной функции u с точностью до слагаемого вида $C+ai\omega(\zeta)$, вторая же — с точностью до мнимой постоянной.

Укажем вкратце на связь между плоской задачей теории упругости и функциями комплексной переменной. Для более обстоятельного знакомства с этим вопросом мы отсылаем читателя к книге Н. И. Мусхелишвили [4].

В случае отсутствия внешних сил уравнения плоской задачи имеют, если сохранить обычные обозначения, следующий вид:[1])

$$\begin{gathered}
\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0, \\
X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\
X_y=Y_x=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Кроме того, должны быть выполнены так называемые условия совместности Бельтрами — Мичеля, которые в нашем случае приводятся к одному уравнению

$$\Delta(X_x+Y_y)=0.$$

[1]) См., например, Мусхелишвили [4].

Первое из написанных уравнений дает необходимое и достаточное условие того, чтобы существовала некоторая функция B, удовлетворяющая условию:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -X_y, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = X_x. \tag{7}$$

Совершенно так же из второго вытекает существование функции A, для которой

$$\frac{\partial A}{\partial x} = Y_y, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -Y_x = -X_y.$$

Сравнение двух выражений для X_y покажет, что

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Следовательно, должна существовать функция двух переменных $U(x, y)$ такая, что

$$A = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Компоненты напряжения выражаются через нее по формулам:

$$X_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \tag{8}$$

$U(x, y)$ называется функцией Эри, по имени знаменитого английского астронома Дж. Бидделя Эри, впервые обратившего внимание на ее существование.

Из условия Бельтрами — Мичеля вытекает, так как $X_x + Y_y = \Delta U$, что $U(x, y)$ должна быть бигармонической:

$$\Delta\Delta U = 0. \tag{9}$$

В силу полученных в этом номере результатов найдутся две аналитические функции комплексной переменной $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ такие, что

$$U = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]. \tag{10}$$

Нам ниже потребуются еще выражения для частных производных от $U(x, y)$.

Дифференцируя (10) по x и y и полагая всюду $\chi'(z) = \psi(z)$, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \operatorname{Re}[\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)],$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \operatorname{Re}[-i\varphi(z) + \bar{z}i\varphi'(z) + i\psi(z)].$$

Удобнее, однако, часто пользоваться не этими формулами, а следующими их комбинациями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}&=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)},\\ \frac{\partial U}{\partial x}-i\frac{\partial U}{\partial y}&=\overline{\varphi(z)}+\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Дадим комплексное представление смещений и напряжений:

$$\left.\begin{aligned} X_x+iX_y&=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2U}{\partial x\,\partial y}=-i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right),\\ X_x+iX_y&=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}-\overline{z\varphi''(z)}-\overline{\psi'(z)}; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_y-iX_y&=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right),\\ Y_y-iX_y&=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}+\overline{z\varphi''(z)}+\overline{\psi'(z)}. \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

Из формул (12) и (12′) легко получаются два следующих более простых выражения:

$$X_x+Y_y=2\,[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]=4\mathrm{Re}\,[\varphi'(z)],$$
$$Y_y-X_x+2iX_y=2\,[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)].$$

Вопрос о выражении компонентов смещения u и v через бигармоническую функцию U приводится к задаче о нахождении u и v из уравнений:

$$\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2U}{\partial y^2},\quad \lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2},$$
$$\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2U}{\partial x\,\partial y}.$$

Первые два из них, решенные относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, дают:

$$\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta U,\\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial^2U}{\partial^2 y}+\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta U, \end{aligned} \tag{13}$$

или, так как $\Delta U=r=4\frac{\partial p}{\partial x}=4\frac{\partial q}{\partial y}$,

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Интегрируя эти равенства соответственно по x и y, получим:

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} p + F_1(y),$$

$$2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} q + F_2(x).$$

Подставив найденные выражения в третье из уравнений, после сокращений имеем:

$$F_1'(y) + F_2'(x) = 0,$$

откуда вытекает, что

$$F_1(y) = -\gamma y + \alpha, \quad F_2(x) = \gamma x + \beta,$$

где α, β и γ — произвольные постоянные. Эти выражения дают жесткое смещение тела, не имеющее значения при исследовании его упругих свойств. Отбрасывая их, окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} p, \\ 2\mu v &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} q. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Умножим вторую формулу на i и сложим с первой:

$$2\mu(u+iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varphi(z), \tag{15}$$

отсюда, ввиду (11), если положить

$$\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu},$$

вытекает следующая очень удобная формула:

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Основными задачами теории упругости являются две следующие:

1) определение упругого равновесия по заданным внешним напряжениям, приложенным к границе L тела B;

2) определение упругого равновесия по заданным смещениям точек границы L тела B.

Получим предельные условия для первой из них.

Примем за положительное направление нормали внешнее относительно области B, как это обычно делается в теории упругости, с тем чтобы направления нормали и касательной были расположены относительно друг друга так же, как оси x и y (см. рис. 61).

Под напряжением $X_n\,ds$ и $Y_n\,ds$, действующим на элеменг контура, будем подразумевать, как обычно, напряжение, действующее со стороны положительной нормали:

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cos(n, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos(n, y),$$

$$Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos(n, x) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cos(n, y),$$

или, так как для внешней нормали

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds},$$

имеем:

$$X_n = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

$$Y_n = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

В комплексной же форме

$$X_n + iY_n = -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = i\int_{s_0}^{s}(X_n + iY_n)\,ds + \text{const}.$$

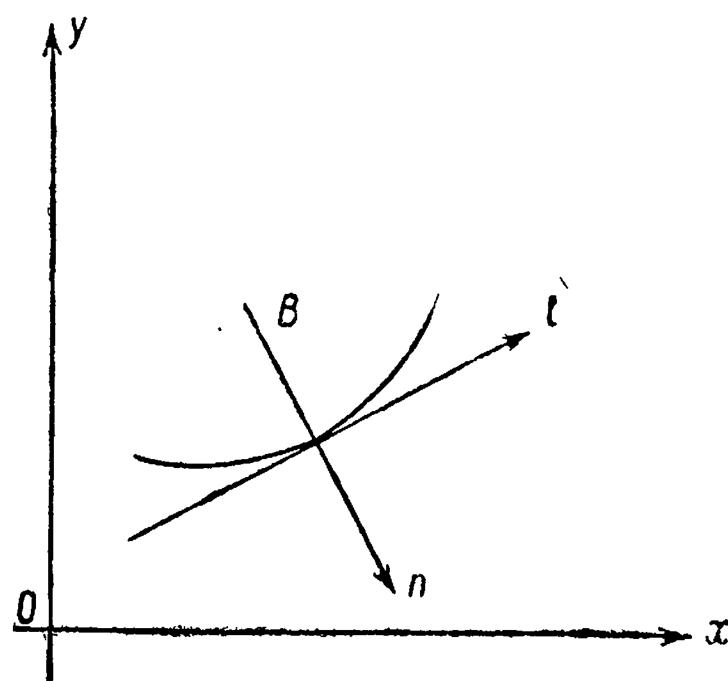


Рис. 61.

Обозначив интеграл, стоящий в правой части, через $f_1(s) + if_2(s)$ и внося в предыдущее равенство вместо левой части ее выражение (11), получаем предельное условие задачи в форме:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1(s) + if_2(s) + \text{const на } L. \qquad (16)$$

Комбинация $\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}$ определена лишь с точностью до постоянного слагаемого, и поэтому постоянную в правой части мы можем фиксировать произвольно.

Предельные условия во второй основной задаче являются прямым следствием формулы (15). Если через $g_1(s)$ и $g_2(s)$ обозначить компоненты смещения точек контура, получим:

$$\varkappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2). \qquad (17)$$

Кроме написанных предельных условий (16) или (17), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны внутри области удовлетворять еще некоторым требованиям, вытекающим из физического смысла проблемы. Не входя в подробности, мы перечислим их.

Если область ограничена и односвязна, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны быть однозначны и регулярны во всей области.

Пусть область многосвязна и ограничена внутренними контурами $L_1, L_2, \ldots, L_m$ и внешним L_{m+1}. Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ в этом случае будут, вообще говоря, многозначны.

Обозначим через X_k и Y_k главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру L_k. Можно показать, что при условии однозначности смещений и напряжений здесь:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi^*(z), \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi^*(z), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ — однозначные аналитические функции в B, а z_k — точка, лежащая внутри контура L_k.

Если же потребовать однозначности только напряжений, допустив многозначность смещений, то $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= z\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\sum_{k=1}^{m}(a_k+ib_k)\ln(z-z_k)+\varphi^*(z), \\ \psi(z) &= z\sum_{k=1}^{m}(a'_k+ib'_k)\ln(z-z_k)+\sum_{k=1}^{m}(a''_k+ib''_k)\ln(z-z_k)+\psi^*(z); \end{aligned}\right\} \tag{18'}$$

A_k, a_k, b_k, a'_k, b'_k, a''_k, b''_k — некоторые постоянные, механическое значение которых мы приводить не станем и которые должны быть определены из условий задачи.

Представляет интерес случай бесконечной области. Будем считать, что область состоит из внешности нескольких замкнутых контуров L_1, $L_2, \ldots, L_m$.

Пусть X, Y суть компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к границе области, так что

$$X=\sum_{k=1}^{m}X_k, \qquad Y=\sum_{k=1}^{m}Y_k.$$

Если предположить ограниченность компонентов напряжения вблизи бесконечно далекой точки, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны иметь строение:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+(B+iC)z+\varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+(B'+iC')z+\psi_0(z). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

При этом $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные в области бесконечно далекой точки:

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots,$$

$$\psi_0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \ldots,$$

и начало координат считается лежащим вне области.

Постоянные B, C, B', C', входящие в формулы (19), имеют простой физический смысл. Если обозначить через $X_x(\infty)$, $Y_y(\infty)$, $X_y(\infty)$ пределы, к которым стремятся X_x, Y_y, X_y при удалении точки на бесконечность, то

$$X_x(\infty) = 2B - B', \quad Y_y(\infty) = 2B + B', \quad X_y(\infty) = C'.$$

Отсюда следует, что если N_1 и N_2 суть главные напряжения на бесконечности и α — угол, который образует главная ось, соответствующая N_1, с осью x, то

$$B = \frac{N_1 + N_2}{4}, \quad B' = -\frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\alpha, \quad C' = \frac{N_1 - N_2}{2}\sin 2\alpha.$$

Постоянная C не влияет на напряжения и связана с вращением бесконечно далекой точки плоскости:

$$\frac{1+\varkappa}{2\mu} C = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Мы имели случай выше отметить, что функции φ и ψ содержат произвольные элементы. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо фиксировать каким-либо способом этот произвол. Само собой разумеется, число произвольных элементов будет зависеть от рода задачи.

Так, в первой основной задаче для ограниченных областей мы можем фиксировать произвольно в какой-либо точке области значения φ, ψ и мнимую часть φ', положив, например:

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad I[\varphi'(0)] = 0.$$

Если же мы фиксировали постоянную в равенстве (16), то можно распоряжаться выбором лишь одной из постоянных $\varphi(0)$ и $\psi(0)$.

Отметим здесь же, что, когда область многосвязна, постоянную равенства (16) мы имеем право задавать произвольно лишь на одном из контуров L_k. Значения ее на остальных контурах должны быть определены при решении задачи.

Когда область бесконечна, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют строение (19). В этих формулах мы можем считать:

$$\varphi_0(\infty) = 0, \quad \psi_0(\infty) \neq 0, \quad C = 0,$$

с аналогичной оговоркой для постоянной условия (16).

Во второй основной задаче для ограниченных областей можно фиксировать только одно из значений $\varphi(0)$ или $\psi(0)$, например, считая

$$\varphi(0)=0.$$

Аналогично для бесконечной области:

$$\varphi_0(\infty)=0.$$

Более подробное изложение всех приведенных результатов читатель может найти в книге Н. И. Мусхелишвили [4].

3. Преобразование предельных условий. Наиболее простым случаем изменения предельных условий при конформном преобразовании будет тот, когда эти условия относятся только к искомым функциям, как это имеет место, например, в задачах Дирихле и Гильберта.

Чтобы составить предельные условия, которым должна удовлетворять искомая функция после преобразования, здесь достаточно знать соответствие между точками границ преобразуемых областей.

Немного более сложным является случай, когда в предельные условия входят производные по какому-либо направлению от искомой функции.

Рассмотрим производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении l от функции u. Совершим конформное преобразование плоскости z при помощи функции $\zeta=f(z)$. Направление l при преобразовании перейдет в некоторое направление λ плоскости ζ, при этом производные по обоим направлениям будут связаны друг с другом следующим очевидным равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial l},$$

где $\frac{\partial \lambda}{\partial l}$ — коэффициент растяжения в соответствующих направлениях. В силу конформности он не будет зависеть от направления, а будет зависеть лишь от положения рассматриваемой точки плоскости. Численно он равен, как известно, модулю производной $f'(z)$.

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial \lambda}\left|f'(z)\right|=\frac{\partial u}{\partial \lambda}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

Отсюда следует, например, что если искомая функция на контуре L области B до преобразования должна была удовлетворять соотношению

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+l\frac{\partial u}{\partial s}+mu=d,$$

где k, l, m, d — заданные функции положения точки контура, то на

границе преобразованной области должно быть соблюдено равенство:

$$k\frac{\partial u}{\partial \nu}+l\frac{\partial u}{\partial \sigma}+m\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| u=d\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|,$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ и $\frac{\partial}{\partial \sigma}$ — производные по нормали и дуге преобразованного контура.

Среди обширного класса проблем, приводящих к бигармоническим функциям, и соответствующих им различных предельных условий, мы остановимся лишь на наиболее часто встречающихся задачах.

Рассмотрим первую основную задачу.

1. Найти функцию u, бигармоническую внутри области, по заданным значениям на контуре самой функции и ее нормальной производной:

$$u=\omega_1(s),\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\omega_2(s). \tag{20}$$

Мы сформулировали задачу в обычном виде. Для нас, однако, удобнее несколько иная формулировка. Легко видеть, что условия (20) дают значения на контуре области частных производных от искомой функции по координатным осям. Действительно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,x)+\frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,x)=\\&=\omega_1'(s)\cos(s,x)+\omega_2(s)\cos(n,x)=\omega_3(s),\\\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,y)+\frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,y)=\\&=\omega_1'(s)\cos(s,y)+\omega_2(s)\cos(n,y)=\omega_4(s).\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Наоборот, пусть нам заданы на границе области значения частных производных по координатным осям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\omega_3(s),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\omega_4(s).$$

По ним можно найти значение нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y).$$

Что же касается значений на контуре области самой функции u, то они определяются с точностью до произвольного постоянного слагаемого из равенства

$$u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+C.$$

Наличие аддитивной произвольной постоянной в граничных значениях u в нашей задаче несущественно, так как при изменении на постоянную всех значений u на границе области на ту же постоянную изменится u и всюду внутри области. Поэтому граничные условия (20) мы можем заменить условиями (21).

Воспользовавшись формулой Гурса и равенствами (11), мы можем новые предельные условия записать в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\omega_3+i\omega_4=F, \tag{22}$$

что вполне совпадает с (16).

Обратимся ко второй основной задаче.

2. Нужно найти бигармоническую функцию, если известно, что входящие в состав ее функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют на границе области условию:

$$\varkappa\varphi(z)-\overline{z\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}=\Phi, \tag{23}$$

где Φ — заданная функция комплексной переменной.

Посмотрим, как изменятся предельные условия (22) и (23) при конформном преобразовании.

Введем вместо переменной z новую переменную ζ при помощи соотношения:

$$z=\omega(\zeta),$$

преобразующего область G в B.

Результат подстановки в $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ вместо z указанного выражения обозначим через $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$:

$$\varphi[\omega(\zeta)]=\varphi_1(\zeta),\quad \psi[\omega(\zeta)]=\psi_1(\zeta).$$

Так как

$$\varphi'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\varphi_1'(\zeta)\frac{1}{\omega'(\zeta)},$$

равенства (22) и (23) примут вид:

$$\varphi_1(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_1'(\zeta)}+\overline{\psi_1(\zeta)}=F, \tag{24}$$

$$\varkappa\varphi_1(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_1'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=\Phi. \tag{25}$$

Замечание. Для существования решения первой основной задачи для ограниченных областей необходимо соблюдение равенства нулю главного вектора всех внешних усилий, приложенных к контуру области, и равенства нулю главного момента этого вектора.

Главный вектор $X+iY$, очевидно, имеет следующее выражение:

$$X+iY=\int_L(X_n+iY_n)\,ds=\frac{1}{i}\Big|_L(f_1+if_2)=\frac{1}{i}\Big|_L F,$$

поэтому равенство его нулю приводит к равенству нулю интеграла:

$$\int_L (X_n + iY_n)\,ds, \tag{26}$$

взятого по всему контуру области, или, что то же самое, к равенству нулю приращения $f_1(s) + if_2(s) = F$ при обходе по контуру:

$$\Big|_L F = \Big|_L f_1(s) + if_2(s) = 0. \tag{26'}$$

После конформного преобразования это сведется к равенству нулю приращения функции F, стоящей в правой части равенства (24).

Что касается главного момента, то равенство его нулю после интегрирования по частям принимает следующий вид:

$$0 = \int_L (xY_n - yX_n)\,ds = -\int_L (x\,df_1 + y\,df_2) = -\Big|_L (xf_1 + yf_2) + \int_L (f_1dx + f_2dy)$$

или, если главный вектор равен нулю и приращения функций f_1 и f_2 вдоль контура равны нулю,

$$\int_L (f_1dx + f_2dy) = 0. \tag{27}$$

С другой стороны, как сразу же видно, для функции F, стоящей в правой части равенства (24), это сводится к следующему:

$$\mathrm{Re}\left[\int_L F\,\overline{dz}\right] = 0. \tag{28}$$

После же конформного преобразования области B при помощи равенства $z = \omega(\zeta)$ последнее условие сведется к следующему:

$$\mathrm{Re}\left|\int_L F\overline{\omega'(\zeta)}\,\overline{d\zeta}\right| = 0. \tag{29}$$

4. Интегралы типа Коши; их вычисление. Позже, при исследовании вопроса о приведении задач математической физики к функциональным, в частности интегральным, уравнениям, нам придется иметь дело с интегралами специального вида, которые ввиду аналогии их строения со строением широко известного интеграла Коши получили название интегралов типа Коши.

Пусть L — произвольная спрямляемая кривая и $F(z)$ — произвольная функция комплексной переменной z, определенная в точках L и абсолютно интегрируемая вдоль нее, т. е. такая, что сходится интеграл

$$\int_L |F(z)|\,ds.$$

Под интегралом типа Коши подразумевают интеграл следующего вида:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)}{t - z}\,dt. \tag{30}$$

Он, очевидно, абсолютно сходится при всяком z, лежащем вне L, и будет аналитической функцией от z. Однако характер зависимости его от z может быть весьма сложным.

Так, если L — простая разомкнутая кривая, интеграл представляет собой одну только аналитическую функцию, определенную во всех точках плоскости, за исключением точек L, которые, вообще говоря, для этой функции являются особыми. Если L — простая замкнутая кривая, то интеграл будет представлять собой две функции, различные между собой — одну внутри контура L, другую же вне его. Ни одна из них не является, за исключением тривиального случая $F(t) = 0$, продолжением другой. Однако между предельными значениями их на L и функцией $F(t)$ существует определенное соотношение, справедливое при частных предположениях о функции $F(t)$.

Мы приведем его без доказательства, отсылая читателя, желающего ознакомиться с его доказательством, к специальной литературе.[1])

Сейчас и всюду ниже, где нам придется иметь дело с интегралами типа Коши и переходить к пределу на контур, мы будем предполагать функцию $F(t)$, стоящую под знаком этого интеграла, непрерывной и удовлетворяющей условию Липшица порядка α, которое заключается в следующем: существуют два положительных числа M и $\alpha \leqslant 1$ такие, что для всякой пары точек z' и z'' на L выполнено неравенство

$$|F(z') - F(z'')| \leqslant M |z' - z''|^{\alpha}.$$

Контур L будем считать, простоты ради, кусочно-гладким. Когда точка z лежит на самом контуре, интеграл (30) лишен смысла, ибо функция $\frac{F(t)}{t-z}$ не интегрируема вдоль L. Под значением интеграла понимают тогда его главное значение. Отложим от точки z в ту и другую сторону дугу длины ε. Оставшуюся часть назовем L_ε. Интеграл вдоль нее имеет смысл, ибо точка z лежит вне L_ε. Будем ε уменьшать до нуля. Предел, к которому стремится интеграл по L_ε, и будет главным значением (30) в точке z на L:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{F(t)}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \frac{F(t)}{t-z}\, dt.$$

Назовем $f_i(z_0)$ и $f_e(z_0)$ пределы, к которым стремится (30) при приближении z к z_0 соответственно изнутри и извне L.[2])

[1]) См., например, Н. И. Мусхелишвили [5], гл. 1, §§ 9—22.

[2]) Можно показать, что эти пределы существуют при приближении z к z_0 по любому некасательному пути.

Предложение, которое мы имеем в виду сформулировать, дается двумя следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} f_i(z_0) &= \frac{1}{2}F(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(t)}{t-z_0}\,dt, \\ f_e(z_0) &= -\frac{1}{2}F(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(t)}{t-z_0}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Формулы (31) имеют место, если z_0 не угловая точка. В противном случае они должны быть заменены двумя следующими:

$$\left.\begin{aligned} f_i(z_0) &= \frac{\delta_e}{2\pi}F(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(t)}{t-z_0}\,dt, \\ f_i(z_0) &= -\frac{2\pi-\delta_e}{2\pi}F(z_0) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{F(t)}{t-z_0}\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{31'}$$

где δ_e — внешний угол области в точке z_0.

Исследуем поведение производной

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(t)}{(t-z)^2}\,dt$$

вблизи L. Допустим, что $F(t)$ имеет непрерывную производную по t вдоль контура L, удовлетворяющую условию Липшица. Вычислим интеграл по частям следующим приемом:

$$f'(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t-z}\right)dt = -\frac{1}{2\pi i}\left|\frac{F(t)}{t-z}\right|_L + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F'_t(t)}{t-z}\,dt.$$

Внеинтегральное слагаемое правой части, ввиду однозначности $F(t)$ на L, дает нуль; интеграл же имеет уже рассмотренный вид с той только разницей, что теперь под знаком его стоит не $F(t)$, а $F'(t)$. При приближении к контуру L $f'(z)$ будет стремиться к пределу, вычислить который, пользуясь формулами (31), не представит труда.

Тот же прием мы, очевидно, можем применить и к производной порядка n. Если $F(t)$ имеет производную n-го порядка вдоль контура L, удовлетворяющую условию Липшица, то

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_t^{(n)}(t)}{t-z}\,dt$$

будет стремиться к определенному пределу, когда z приближается к точке z_0 контура L по любому некасательному пути.

Несколько слов о вычислении интегралов типа Коши. Если положить $dt = e^{i\alpha}\,ds$; $t - z = re^{i\varphi}$ и обозначить через (n_t, r) угол,

образуемый внутренней нормалью n_t с r — отрезком, соединяющим точки z и t, отсчитываемый в направлении от нормали n_t к r, то, как мы подробно выяснили в главе V, § 9, n° 1,

$$\frac{dt}{t-z}=\frac{i}{r}e^{-i(n_t,\,r)}\,ds=\frac{i}{r}\left[\cos(n_t,r)-i\sin(n_t,r)\right].$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{F\cos(n_t,\,r)}{r}\,ds-\frac{i}{2\pi}\int_L\frac{F\sin(n_t,r)}{r}\,ds.$$

Первый интеграл, представляющий собою логарифмический потенциал двойного слоя, весьма упрощается в смысле его вычисления, если его представить в виде интеграла Стильтьеса. Именно

$$\frac{\cos(n_t,\,r)}{r}\,ds=d\omega,$$

где $d\omega$ — элементарный угол, под которым виден элемент дуги ds из точки z, и поэтому первый интеграл может быть записан в следующей более простой и удобной для вычисления форме:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L F(t)\,d\omega.$$

Если ω есть монотонная функция длины дуги s, то последний интеграл обращается просто в интеграл Римана, взятый по углу ω в пределах изменения ω, соответствующих обходу по всей кривой L. Если L — замкнутая кривая, ω будет изменяться от нуля до 2π, и тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{F\cos(n_t,r)}{r}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\,d\omega.$$

Иначе говоря, величина интеграла есть среднее арифметическое значение функции $F(t)$, взятое по углу ω.

Второй интеграл представляет в смысле вычислений несколько бо́льшие затруднения. Если его преобразовать, как и первый, к углу ω, он примет вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{F\sin(n_t,r)}{r}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_L F\,\mathrm{tg}\,(n_t,\,r)\,d\omega.$$

Для частного случая монотонности ω как функции s интеграл будет равен также среднему арифметическому, но уже не от функции $F(t)$, а от произведения $F(t)\,\mathrm{tg}\,(n_t,r)$.

Подобное преобразование особенно выгодно в том случае, когда r не будет касаться кривой L, т. е. $(n_t,\,r)\neq\frac{\pi}{2}$; в противном случае

$\operatorname{tg}(n_t, r)$ обращается в бесконечность и интеграл становится несобственным.

В приложениях интеграла Коши к задачам математической физики и механики весьма важную роль играет теорема, впервые высказанная в 1855 году Гарнаком, которая говорит следующее.[1]

Пусть L — окружность радиуса R с центром в начале координат и $F(\vartheta)$ — вещественная кусочно-непрерывная функция полярного угла ϑ.

Если равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F(\vartheta)}{t-z}\, dt = 0, \quad t = Re^{i\vartheta},$$

имеет место для всяких z, лежащих внутри круга $|z| < R$, то $F(\vartheta) = 0$ всюду, за исключением, может быть, точек разрыва.

Если же написанное равенство имеет место для всяких z, лежащих вне круга, то $F(\vartheta)$ равна постоянной, опять, может быть, за исключением точек разрыва.

Ввиду аналогии доказательства обеих частей теоремы, мы установим, например, лишь первую часть ее.

Разложим $f(z)$ по степеням z. Так как

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \ldots,$$

имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F(\vartheta)}{t-z}\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu,$$

где

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L F(\vartheta)\, t^{-\nu-1}\, dt = \frac{1}{2\pi R^\nu} \int\limits_0^{2\pi} F(\vartheta)\, e^{-i\nu\vartheta}\, d\vartheta.$$

В силу равенства нулю суммы степенного ряда, все его коэффициенты α_ν должны равняться нулю, т. е. должны равняться нулю все коэффициенты ряда Фурье для функции $F(\vartheta)$, что может быть лишь в том случае, когда $F(\vartheta)$ либо всюду нуль, либо отлична от нуля только в точках разрыва. Этим все доказано.

Из теоремы Гарнака вытекают два простых, но существенных для нас следствия:

1) Если $F_1(\vartheta)$ и $F_2(\vartheta)$ — две вещественные кусочно-непрерывные функции и равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F_1(\vartheta)}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F_2(\vartheta)}{t-z}\, dt$$

1) Мы даем формулировку теоремы Гарнака в упрощенной, но достаточно общей для приложений форме.

имеет место для всяких $|z|<R$, то

$$F_1(\vartheta)=F_2(\vartheta),$$

за исключением, может быть, точек разрыва функций $F_1(\vartheta)$ и $F_2(\vartheta)$.

Если это равенство имеет место для всяких $|z|>R$, то

$$F_1(\vartheta)=F_2(\vartheta)+\text{const},$$

за возможным исключением точек разрыва.

2) Если $F_1(\vartheta)$ и $F_2(\vartheta)$ — две произвольные кусочно-непрерывные комплексные функции от ϑ и равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_1(\vartheta)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_2(\vartheta)}{t-z}dt; \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F_1(\vartheta)}}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F_2(\vartheta)}}{t-z}dt$$

имеют место при всяких $|z|<R$, то

$$F_1(\vartheta)=F_2(\vartheta).$$

Если же эти равенства имеют место при $|z|>R$, то

$$F_1(\vartheta)=F_2(\vartheta)+\text{const}.$$

Исключение в обоих случаях могут составлять точки разрыва.

Первое следствие совершенно очевидно. Второе может быть сведено к первому путем сложения и вычитания входящих в его формулировку интегральных равенств.

Причина важности роли теоремы Гарнака в приложениях заключается в том обстоятельстве, что она дает возможность свести граничные условия, выраженные некоторым функциональным равенством к интегральным условиям, справедливым уже не на контуре, а во всей рассматриваемой области.

§ 2. Задача Дирихле

1. Интеграл Пуассона. Задача Дирихле об определении значений гармонической функции внутри круга, если известны ее значения на границе, решается, как известно, интегралом Пуассона:

$$u(r,\varphi)=\int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi, \tag{1}$$

где r, φ — полярные координаты той точки, где ищется значение решения; R — радиус окружности и $u(\vartheta)$ — функция полярного угла θ, дающая граничные значения $u(r,\varphi)$.

Когда нужно найти функцию, гармоническую всюду в круге и отличающуюся от $u(r,\varphi)$ не больше чем на заданную величину, наиболее просто, по-видимому, будет воспользоваться тригонометрическими

рядами. Без труда можно проверить, что ядро интеграла, т. е. дробь, стоящая множителем при $u(\psi)$ под знаком интеграла, есть вещественная часть следующей аналитической функции:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}=\operatorname{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\qquad (z=re^{i\varphi},\ t=Re^{i\psi}).$$

Разложив правую часть в ряд Тэйлора около начала координат и отделив в результате вещественную часть, получим:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\psi-\varphi).$$

Поэтому $u(r,\varphi)$ представима следующим рядом:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\,d\psi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\cos n(\psi-\varphi)\,d\psi=$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi);\qquad (2)$$

a_n и b_n суть коэффициенты Фурье $u(\vartheta)$:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\,d\psi;\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\cos n\psi\,d\psi;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\psi)\sin n\psi\,d\psi.$$

Взяв достаточно большой отрезок ряда, мы можем, вообще говоря, представить $u(r,\varphi)$ как угодно точно во всем круге. В самом деле, разница между $u(r,\varphi)$ и суммой N первых членов ряда будет функцией, гармонической внутри и на границе, принимающей значения:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

Так как гармоническая функция достигает своего максимума на границе области, то

$$\left|u(r,\varphi)-\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\right|,$$

и если ряд Фурье для $u(\vartheta)$ сходится равномерно, то правая часть путем выбора N может быть сделана как угодно малой для всех φ.

В том случае, когда нужно не общее приближенное представление $u(r, \varphi)$, а ее значения в отдельных точках внутри, было бы бесполезно прибегать к тригонометрическому ряду. Здесь проще воспользоваться интегральной формулой (1). Мы не будем останавливаться на методах непосредственного вычисления интеграла Пуассона в том его виде, какой он имеет в формуле (1), так как применение этой формулы не требует никаких пояснений, ввиду ее простоты.

Наше внимание мы сосредоточим на ином методе, связанном с предварительным преобразованием или, если угодно, с представлением интеграла в форме Стильтьеса. Этот путь нам кажется более эффективным, чем прямое пользование формулой (1).

Основная мысль способа весьма проста и основана на приведении (1) к простейшему случаю.

В центре окружности при $r=0$ мы получаем:

$$u(0, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\,d\psi. \qquad (3)$$

Равенство представляет известную теорему Гаусса о том, что значение гармонической функции в центре окружности есть среднее арифметическое ее значений на самой окружности.

Интеграл, стоящий в правой части, имеет строение, более простое, чем (1), и к вычислению интегралов такого рода пытаются свести (1) в общем случае.

Допустим, что мы при помощи дробно-линейного преобразования отобразили круг $|t|\leqslant R$ на единичный круг плоскости $\zeta=\rho e^{i\vartheta}$ так, что точка $z=re^{i\varphi}$ перешла в центр $\zeta=0$. Функция u, гармоническая в круге $|t|\leqslant R$, перейдет в функцию, гармоническую в единичном круге плоскости ζ. Граничные значения ее на окружности $|t|=R$ перейдут в граничные значения на единичной окружности $|\zeta|=1$. Зависимость их от полярного угла ϑ мы будем знать, если определим зависимость ψ от ϑ. Последняя в аналитической форме может быть представлена следующим образом.

Функция, доставляющая требуемое конформное преобразование, если поставить условие, чтобы луч $\psi=\varphi$ переходил в вещественную ось, имеет вид:

$$\zeta=Re^{-i\varphi}\frac{t-z}{R^2-t\bar{z}}.$$

На границе круга, когда $t=Re^{i\psi}$,

$$e^{i\vartheta}=e^{-i\varphi}\frac{\frac{R}{r}e^{i\psi}-e^{i\varphi}}{\frac{R}{r}-e^{i(\psi-\varphi)}}$$

или, если положить $\frac{R}{r}=e^{\alpha}$, $\alpha=\ln\frac{R}{r}$,

$$e^{i\vartheta}=\frac{e^{\alpha}e^{i(\psi-\varphi)}-1}{e^{\alpha}-e^{i(\psi-\varphi)}}.$$

Отсюда получается следующая формула:

$$\frac{e^{i\vartheta}-1}{e^{i\vartheta}+1}=\frac{[e^{i(\psi-\varphi)}-1]}{[e^{i(\psi-\varphi)}+1]}\frac{[e^{\alpha}+1]}{[e^{\alpha}-1]} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\frac{\psi-\varphi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Она дает зависимость между ϑ, ψ и α в весьма простом виде.

В плоскости ζ та точка, для которой мы должны разыскать значение гармонической функции u, расположена в центре круга, и поэтому по теореме о среднем значении имеем:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u[\psi(\vartheta)]\,d\vartheta. \tag{5}$$

Последняя формула позволяет указать способ вычисления интеграла, более простой, чем предыдущие. Разделим промежуток $(-\pi, \pi)$ изменения ϑ на равные части точками $\vartheta_0=-\pi$, $\vartheta_1=-\frac{(n-2)\pi}{n}, \ldots, \vartheta_{n-1}=\frac{(n-2)\pi}{n}$. Соответствующие им значения ψ и $u(\psi)$ обозначим через

$$\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1} \text{ и } u_0=u(\psi_0),\ u_1=u(\psi_1), \ldots, u_{n-1}=u(\psi_{n-1}).$$

Применим теперь к вычислению интеграла один из приближенных способов, например способ прямоугольников, положив:

$$u=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})=\frac{u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}}{n}. \tag{6}$$

Значение $u(r, \varphi)$ будет равно среднему арифметическому значений функции $u(\psi)$ на контуре; однако эти значения берутся не в равноотстоящих точках, как это мы получили бы при вычислении u в центре круга плоскости z, пользуясь формулой (3), а в точках, расположение которых на окружности зависит от положения той точки, где мы ищем решение, и которые соответствуют равноотстоящим значениям ϑ. Найти их мы можем легко, пользуясь соотношением (4). В практике, по-видимому, наиболее быстро приводящим к цели будет простой графический прием, основанный на применении неравномерных шкал. [1])

Увеличению аргумента z, т. е. передвижению точки z вдоль окружности с центром в начале координат, соответствует вычитание из ψ

[1]) См. об этом статью Рунге [2].

постоянного числа, равного углу поворота. Последнее же равносильно просто передвижению шкалы $\psi(\theta)$ вдоль самой себя. Поэтому мы всегда в праве считать $\varphi = 0$ и формулу (4) брать в виде:

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}.$$

Изготовим шаблон, представляющий в координатной системе ψ, r линии уровня ϑ. Разобьем для этого интервал $(-\pi, +\pi)$ изменения ϑ на четное число n частей и в прямоугольнике $0 \leqslant r \leqslant 1$, $-\pi \leqslant \psi \leqslant \pi$ начертим те линии, для которых ϑ сохраняет постоянные значения:

$$\vartheta = 0, \quad \vartheta = \pm\frac{2\pi}{n}, \quad \vartheta = \pm 2\frac{2\pi}{n}, \ \ldots, \vartheta = \pm\pi.$$

Прилагая к такому шаблону на надлежащей высоте равномерную шкалу для ψ в промежутке $(-\pi, +\pi)$, мы можем по этой шкале отсчитать те значения ψ, которые соответствуют взятым выше значениям ϑ при любом r.

После этого находятся $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, и u во взятой точке определится как среднее арифметическое их по формуле (6).

Подобные упрощения можно сделать и для других методов приближенного вычисления интеграла (5).

2. Интеграл Пуассона для внешности круга. Пусть нужно будет найти функцию, гармоническую и ограниченную вне окружности $|z| = R$ и принимающую на самой окружности заданные значения:

$$u(R, \varphi) = u(\varphi).$$

Сейчас мы покажем, что искомая функция может быть представлена интегралом типа Пуассона, который может быть получен из (1) весьма простым способом. Положим, как раньше, $z = re^{i\varphi}$ и введем новую независимую переменную

$$\zeta = \frac{1}{z} = \rho e^{i\vartheta}.$$

Функция $u(r, \varphi)$, гармоническая вне окружности $|z| = R$, перейдет в функцию $u^*(\rho, \vartheta) = u\left(\frac{1}{\rho}, -\vartheta\right)$, гармоническую внутри круга радиуса $\frac{1}{R}$, принимающую на его границе значения:

$$u^*\left(\frac{1}{R}, \vartheta\right) = u(R, -\vartheta) = u(-\vartheta).$$

По формуле (1) она при $\rho < \frac{1}{R}$ представима интегралом Пуассона:

$$u^*(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(-\psi^*)\frac{\frac{1}{R^2} - \rho^2}{\frac{1}{R^2} - 2\frac{1}{R}\rho\cos(\psi^* - \vartheta) + \rho^2}\,d\psi^*.$$

Если в этом равенстве подставить вместо ρ и ϑ их выражения через r и φ и заменить переменную интегрирования, положив $\psi^* = -\psi$,

мы получим формулу:

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\,\frac{r^2-R^2}{r^2-2Rr\,\cos(\psi-\varphi)+R^2}\,d\psi, \qquad (7)$$

решающую поставленную задачу. Она отличается от (1) только тем, что в ней R и r переменились местами, так что ядро интеграла (7) отличается от ядра интеграла Пуассона (1) только знаком.

Разложение искомой функции в тригонометрический ряд, подобный ряду (2), представляющий ее вне окружности, может быть получено поэтому из (2) путем замены r на R и наоборот:

$$u(r, \varphi)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi), \qquad (7')$$

при этом a_n и b_n имеют прежние значения.

Будем в равенстве (7′) увеличивать r до бесконечности. В пределе мы получим равенство, представляющее теорему Гаусса для внешности окружности:

$$u_\infty=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\,d\psi, \qquad (8)$$

т. е. значение гармонической функции на бесконечности есть среднее арифметическое ее значений на граничной окружности.

На этой формуле может быть, как и в предыдущем номере, основан простой метод нахождения $u(r, \varphi)$ в любой точке внешности окружности.

Преобразуем внешность круга $|t|\leqslant R$ плоскости, в которой мы вычисляем значения $u(r, \varphi)$, на внешность единичного круга плоскости ζ так, чтобы точка z перешла в бесконечно далекую точку. Будем кроме того, требовать, чтобы луч $\arg t=\varphi$ перешел в вещественную ось. Преобразующая функция имеет вид:

$$\zeta=\frac{e^{i\varphi}}{R}\,\frac{t\bar{z}-R^2}{t-z};$$

на окружности $t=Re^{i\psi}$

$$d\vartheta=|d\zeta|=\frac{1}{R}\,\frac{r^2-R^2}{|t-z|^2}\,|dt|=\frac{r^2-R^2}{r^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+R^2}\,d\psi.$$

Зависимость между ψ и ϑ, если ввести обозначение $\alpha=\ln\frac{r}{R}$, может быть приведена к равенству:

$$\operatorname{tg}\frac{\psi-\varphi}{2}=-\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}. \qquad (9)$$

Применение формулы (8) в плоскости ζ дает нам следующее выражение для $u(r, \varphi)$:

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u[\psi(\vartheta)]\,d\vartheta. \qquad (10)$$

К нему может быть применено все, что мы говорили об интеграле (5) в предыдущем номере.

3. Задача Дирихле для полуплоскости. В некоторых вопросах проще бывает преобразовывать заданную область не на круг, а на полуплоскость или, наоборот, полуплоскость на область. Представляет поэтому известный интерес аналитический аппарат, позволяющий представить гармоническую функцию внутри верхней полуплоскости по известным граничным значениям ее на вещественной оси. Его можно получить из интеграла Пуассона путем преобразования круга радиуса R плоскости z на верхнюю полуплоскость плоскости ζ при помощи функции $\zeta = \frac{1}{i}\frac{z-R}{z+R}$.

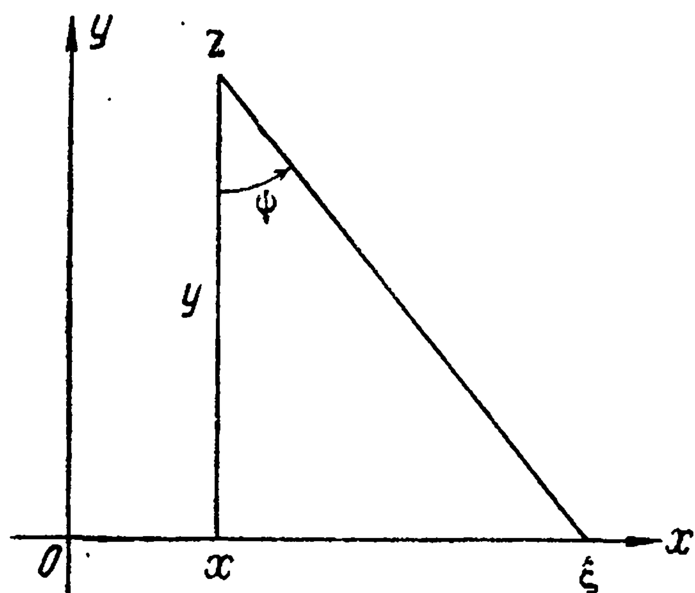


Рис. 62.

Граничные значения на окружности перейдут в граничные значения на вещественной оси. После несложных вычислений мы получим искомую формулу в виде:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x+\xi')\frac{d\xi'}{\xi'^2+y^2}. \tag{11}$$

Первый из интегралов преобразован во второй заменой переменной $\xi = x + \xi'$.

При неточных графических расчетах формулу (11) удобнее употреблять в ином виде, взяв за переменную интегрирования не ξ, а угол ψ, который образует прямая $z\xi$ с перпендикуляром zx к оси ξ, опущенным из точки z (рис. 62). Имеем:

$$\operatorname{arctg}\frac{\xi-x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{\xi'}{y} = \psi, \quad d\psi = \frac{y\,d\xi}{\xi'^2+y^2}.$$

Поэтому равенство (11) принимает следующую простую форму:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u[x+\xi'(\psi)]\,d\psi. \tag{12}$$

Искомая величина $u(x, y)$ опять определяется как среднее арифметическое контурных значений, при этом среднее берется по углу ψ. Все элементы, нужные для вычисления интеграла, могут быть сняты с чертежа.

4. Задача Дирихле для кольца. Граничные значения гармонической функции $u(r, \varphi)$ на окружностях кольца $R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2$ мы

будем предполагать заданными в форме функций от полярного угла φ и обозначим их соответственно через $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$.

Сопряженная с $u(r, \varphi)$ гармоническая функция $v(r, \varphi)$ будет, вообще говоря, не однозначной, и функция комплексной переменной $f(z) = u + iv$ будет состоять из двух слагаемых: однозначной составляющей, могущей быть разложенной в ряд Лорана в кольце, и логарифма z с вещественным коэффициентом:

$$u + iv = A \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_\nu z^\nu, \quad \gamma_\nu = a_\nu + i\beta_\nu. \tag{13}$$

Отделяя вещественную и мнимую части, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
u &= A \ln r + \alpha_0 + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n r^n + \alpha_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi - (\beta_n r^n - \beta_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi], \\
v &= A\varphi + \beta_0 + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} [(\beta_n r^n + \beta_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi + (\alpha_n r^n - \alpha_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi].
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Если теперь в первом из полученных равенств перейти на границы кольца, положив там $r = R_1$ и $r = R_2$, мы должны получить разложение в ряд Фурье функций $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$. Это дает:

$$\left.\begin{aligned}
A \ln R_1 + \alpha_0 &= a_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\psi)\, d\psi, \\
A \ln R_2 + \alpha_0 &= a_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_2(\psi)\, d\psi, \\
\alpha_n R_1^n + \alpha_{-n} R_1^{-n} &= a_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\psi) \cos n\psi\, d\psi, \\
\alpha_n R_2^n + \alpha_{-n} R_2^{-n} &= a_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_2(\psi) \cos n\psi\, d\psi, \\
\beta_{-n} R_1^{-n} - \beta_n R_1^n &= b_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_1(\psi) \sin n\psi\, d\psi, \\
\beta_{-n} R_2^{-n} - \beta_n R_2^n &= b_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_2(\psi) \sin n\psi\, d\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Отсюда получаем (ср. гл. I, § 1, n° 1):

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{a_0^{(2)} - a_0^{(1)}}{\ln R_2 - \ln R_1}, & \alpha_0 &= \frac{a_0^{(1)} \ln R_2 - a_0^{(2)} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \\ \alpha_n &= \frac{a_n^{(1)} R_2^{-n} - a_n^{(2)} R_1^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n}, & \alpha_{-n} &= \frac{a_n^{(1)} R_2^n - a_n^{(2)} R_1^n}{R_2^n R_1^{-n} - R_2^{-n} R_1^n}, \\ \beta_n &= \frac{b_n^{(2)} R_1^{-n} - b_n^{(1)} R_2^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n}, & \beta_{-n} &= -\frac{b_n^{(2)} R_1^n - b_n^{(1)} R_2^n}{R_2^n R_1^{-n} - R_2^{-n} R_1^n}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Ряд (13) суммируется в более сложных функциях, чем анологичный ряд для круга. Формула Шварца для кольца была получена, насколько нам известно, Вилля. Для ознакомления с нею мы отсылаем читателя к мемуару этого ученого [1] или к его книге [2].

5. Формула Шварца. Нахождение сопряженной гармонической функции. По заданным граничным значениям вещественной части функция комплексной переменной находится, как известно, с точностью до чисто мнимого слагаемого. Аналитический аппарат, дающий выражение функции $f(z) = u + iv$, регулярной в области, через значения u на контуре, в том случае, когда область есть круг радиуса R, известен — это есть так называемый интеграл Шварца:[1])

$$u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi) \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi; \quad z = re^{i\varphi}. \qquad (17)$$

Полагая здесь $z = 0$, мы найдем для $u + iv$ чисто вещественное значение, а написанная выше формула дает такое значение $f(z)$, для которого мнимая часть обращается в нуль в начале координат. Чтобы получить общее решение, мы должны добавить к правой части произвольное мнимое слагаемое Ci:

$$u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\psi) \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + Ci. \qquad (18)$$

Отделим в (17) вещественную и мнимую части; так как

$$\frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} - i\frac{2Rr\sin(\psi - \varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2},$$

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов [1], т. III, ч. 2, п. 48, или Р. Курант [1], стр. 95.

вещественная часть даст нам интеграл Пуассона для u, мнимая же часть доставляет выражение $v(r, \varphi)$ через $u(\psi)$:

$$v(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\frac{2Rr\sin(\psi-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi. \tag{19}$$

Тригонометрический ряд для $v(r, \varphi)$ будет сопряженным с рядом для $\tilde{u}(r, \varphi)$ без свободного члена:

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(-b_n\cos n\varphi + a_n\sin n\varphi).$$

Составление его не требует никаких новых операций.

Если нужно знать приближенно v не всюду в круге, а лишь значения ее в отдельных точках внутри круга, естественно воспользоваться интегральной формулой (19). Вычисления по ней, однако, проводить проще, если ее предварительно преобразовать, введя вместо переменной интегрирования ψ новую переменную ϑ, как указано в предыдущем параграфе.

Так как

$$d\vartheta = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi,$$

что видно из сопоставления формул (1) и (5) § 2, мы получаем следующее выражение для $v(r, \varphi)$:

$$v(r, \varphi) = -\frac{Rr}{\pi(R^2-r^2)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} u[\psi(\vartheta)]\sin(\psi-\varphi)\,d\vartheta. \tag{20}$$

Подобные формулы можно указать и для внешности круга. Из (7') видно, что гармоническая вне окружности $|z| = R$ функция $u(r, \varphi)$, принимающая заданные значения при $r = R$, есть вещественная часть следующей функции комплексной переменной:

$$u + iv = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n)\left(\frac{R}{z}\right)^n.$$

Сопряженная функция $v(r, \varphi)$ представляется, следовательно, рядом:

$$v(r, \varphi) = b_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(b_n\cos n\varphi - a_n\sin n\varphi).$$

Мы уже имели случай отметить в n° 2, что ядро интеграла Пуассона для внешности круга будет отличаться от ядра для внутрен-

ности только знаком, поэтому формула Шварца для внешности получится из (18) путем изменения в правой части знака на обратный:

$$u+iv=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\,\frac{z+Re^{i\psi}}{z-Re^{i\psi}}\,d\psi+Ci$$

и

$$v(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} u(\psi)\,\frac{Rr\sin(\psi-\varphi)}{r^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+R^2}\,d\psi+C.$$

Наконец, если вместо переменной ψ ввести новую переменную интегрирования ϑ, как это мы делали в конце п° 2, для численного нахождения $v(r,\varphi)$ мы получим следующую более удобную формулу:

$$v(r,\varphi)=\frac{Rr}{\pi(r^2-R^2)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} u[\psi(\vartheta)]\sin(\psi-\vartheta)\,d\vartheta.$$

Обратимся к случаю полуплоскости. Для построения интеграла Шварца воспользуемся формулой (11). Так как

$$\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}=\operatorname{Re}\left[\,i\left(\frac{1}{z-\xi}+c(\xi)\right)\right],$$

где $c(\xi)$ — произвольная вещественная функция вещественной переменной ξ, функция $f(z)=u+iv$, голоморфная в верхней полуплоскости, представится через значения своей вещественной части на оси $y=0$ следующим интегралом:

$$f(z)=\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\left[\frac{1}{z-\xi}+c(\xi)\right]d\xi.$$

За $c(\xi)$ можно выбрать такую функцию, которая была бы регулярна на вещественной оси и по возможности усиливала бы сходимость интеграла. Вблизи бесконечно далекой точки первое слагаемое в подынтегральных скобках имеет разложение:

$$\frac{1}{z-\xi}=-\frac{1}{\xi}-\frac{z}{\xi^2}-\ldots$$

Возьмем $c(\xi)$ такой, чтобы вся скобка имела при $\xi=\infty$ нуль второго порядка, т. е. чтобы $c(\xi)$ имела на бесконечности главный член $\frac{1}{\xi}$. Наиболее простой функцией, обладающей перечисленными свойствами, будет $c(\xi)=\frac{\xi}{1+\xi^2}$. Мы поэтому будем полагать:

$$f(z)=\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\frac{1+\xi z}{z-\xi}\,\frac{d\xi}{1+\xi^2}. \tag{21}$$

Если же $u(\xi)$ достаточно быстро убывает при $\xi \to \infty$, например удовлетворяет неравенству $|u(\xi)| \leqslant \frac{M}{|\xi|^\alpha}$, $\alpha > 0$, то более просто положить $c(\xi) = 0$ и $f(z)$ взять в форме:

$$f(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \frac{d\xi}{z - \xi}.$$

6. Решение уравнения Пуассона в круге. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \tag{22}$$

и пусть нужно будет найти в круге $|z| < R$ решение этого уравнения, принимающее на границе заданные значения

$$u \big|_{r=R} = F(\varphi).$$

Упростим сначала нашу задачу. Представим искомую функцию u в виде двух слагаемых

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u_1 = 0$ и принимает на окружности заданные значения $u_1\big|_{r=R} = F(\varphi)$. Вторая же функция u_2 удовлетворяет уравнению Пуассона (22) и принимает на границе круга нулевые значения:

$$u_2\big|_{r=R} = 0.$$

Функция u_1 может быть найдена при помощи интеграла Пуассона (1). Для нас сейчас представляет интерес лишь разыскание u_2. Сообразно с этим мы изменим нашу первоначальную задачу и будем искать в круге $|z| < R$ решение уравнения (22), удовлетворяющее на окружности круга граничному условию

$$u \big|_{r=R} = 0. \tag{23}$$

Функция u, доставляющая решение задачи, может быть просто построена на основании свойств функции Грина. Мы, однако, при построении u будем исходить не из функции Грина, а примем за основание наших рассуждений более элементарный факт из теории логарифмического потенциала.

Пусть в области B плоскости z дана функция $\mu(\xi, \eta)$. Обозначим $t = \xi + i\eta$ переменную точку области B. Логарифмическим потенциалом непрерывно распределенных в B масс с плотностью $\mu(\xi, \eta)$ в точке $z = x + iy$ называют следующую функцию от x и y:

$$v(x, y) = \iint_B \mu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{|z - t|} d\sigma.$$

Известно,[1]) что вне притягивающих масс, т. е. вне области B, потенциал $v(x, y)$ есть гармоническая функция, внутри же области он будет удовлетворять не уравнению Лапласа, а уравнению Пуассона

$$\Delta v = -2\pi\mu(x, y).$$

Если это уравнение сравнить с (22), то будет ясно, что если мы плотность $\mu(x, y)$ возьмем равной $\frac{1}{2\pi} f(x, y)$ и за область B возьмем наш круг $|z| < R$, то потенциал с такой плотностью

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|<R}\int f(\xi, \eta) \ln \frac{1}{|z-t|}\, d\sigma \tag{24}$$

будет решением уравнения (22). Но $v(x, y)$ не будет удовлетворять граничному условию (23). Построим в круге гармоническую функцию $w(x, y)$ с граничными значениями

$$w|_{r=R} = -v|_{r=R}.$$

Ясно, что сумма $u = v + w$ будет удовлетворять и уравнению (22) и граничному требованию (23).

Функцию w мы построим при помощи ряда по правилу, даваемому равенством (2). Согласно ему, мы должны граничные значения w разложить в ряд Фурье по полярному углу и затем к гармонике номера n приписать множитель $\left(\frac{r}{R}\right)^n$.

Положим $z = re^{i\varphi}$ и $t = \rho e^{i\psi}$. Граничные значения w на окружности будут равны

$$w|_{r=R} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|<R}\int f \ln |Re^{i\varphi} - \rho e^{i\psi}|\, d\sigma.$$

Тригонометрический ряд для них получится немедленно, если разложить в ряд логарифм, стоящий под знаком интеграла. Так как $\rho < R$, будем иметь:

$$\ln |Re^{i\varphi} - \rho e^{i\psi}| = \operatorname{Re}[\ln(Re^{i\varphi} - \rho e^{i\psi})] =$$
$$= \operatorname{Re}\left[\ln Re^{i\varphi} + \ln\left(1 - \frac{\rho}{R} e^{i(\psi-\varphi)}\right)\right] =$$
$$= \operatorname{Re}\left[\ln Re^{i\varphi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\rho^n}{R^n} e^{in(\psi-\varphi)}\right] = \ln R - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\rho^n}{R^n} \cos n(\varphi - \psi).$$

[1]) См., например, Гурса [1], т. III, n° 536.

Если этот ряд подставить в выражение для $w|_{r=R}$ и произвести почленное интегрирование, мы получим следующий ряд Фурье для нужных нам граничных значений:

$$w|_{r=R}=\frac{\ln R}{2\pi}\int\limits_{|t|<R}\int f\,d\sigma-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{|t|<R}\int f\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\varphi-\psi)\,d\sigma.$$

Чтобы получить значение w в любой внутренней точке $z=re^{i\varphi}$ круга, мы, по указанному выше правилу, должны к n-му члену ряда приписать множитель $\frac{r^n}{R^n}$, так что

$$w(r,\varphi)=\frac{\ln R}{2\pi}\int\limits_{|t|<R}\int f\,d\sigma-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi n}\frac{r^n}{R^n}\int\limits_{|t|<R}\int f\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\varphi-\psi)\,d\sigma. \quad (25)$$

Для представления $w(r,\varphi)$ в более компактной форме мы преобразуем полученный ряд в интеграл. Изменим прежде всего порядок суммирования и интегрирования:

$$w(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<R}\int f\left[\ln R-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{r^n\rho^n}{R^{2n}}\cos n(\varphi-\psi)\right]d\sigma.$$

Если, кроме того, заметить, что

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{r^n\rho^n}{R^{2n}}\cos n(\varphi-\psi)=\mathrm{Re}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{r^n\rho^n}{R^{2n}}e^{in(\varphi-\psi)}\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z^n\bar{t}^n}{R^{2n}}\right]=\mathrm{Re}\left[\ln\left(1-\frac{z\bar{t}}{R^2}\right)\right]=\ln\left|1-\frac{z\bar{t}}{R^2}\right|,$$

для w получим

$$w(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<R}\int f\ln R\left|1-\frac{z\bar{t}}{R^2}\right|d\sigma. \quad (26)$$

Следовательно, искомая нами функция u, равная сумме v и w, представляется следующим интегралом:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<R}\int f\ln\frac{R\left|1-\frac{z\bar{t}}{R^2}\right|}{|z-t|}\,d\sigma. \quad (27)$$

§ 3. Задача Неймана

1. Формула Дини. Наряду с задачей Дирихле часто приходится решать задачу Неймана, состоящую в определении значений гармонической функции внутри области по известным значениям ее нормальной производной на границе.

Известно, что решение не всегда существует. Условием, необходимым и достаточным для его существования, является выполнение очевидного с физической точки зрения требования равенства нулю интеграла от граничных значений нормальной производной. Если оно выполнено, то само решение определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Для круга задача Неймана имеет простое решение, и искомая функция представляется в замкнутой форме при помощи так называемого интеграла Дини, который может быть получен элементарным путем из теории тригонометрических рядов. Ниже мы будем предполагать, что нам задана на границе производная по внутренней нормали.

Всякая функция, гармоническая в круге $|z|<R$, может быть представлена там рядом:

$$u=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi). \tag{1}$$

Производная по внутренней нормали будет отличаться в случае круга от производной по r лишь знаком, так как направление нормали противоположно направлению возрастания r. Дифференцируя предыдущее равенство по r, полагая затем в нем $r=R$ и приравнивая результат $-\frac{\partial u}{\partial n}$, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{R}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)=-\frac{\partial u}{\partial n},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}a_k=-\frac{R}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\cos k\psi\,d\psi,\quad b_k=-\frac{R}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\sin k\psi\,d\psi\\ (k=1,\ 2,\ \ldots)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и, следовательно, если отбросить остающийся неопределенным a_0,

$$u=-\frac{R}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\cos k(\psi-\varphi)\,d\psi=$$

$$=-\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k(\psi-\varphi)\,d\psi.$$

Заметив, что сумма, стоящая под знаком интеграла, есть вещественная часть ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{t}\right)^k = -\ln\left(1-\frac{z}{t}\right), \quad z = re^{i\varphi}, \ t = Re^{i\psi},$$

имеем:

$$u = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \operatorname{Re}\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right] d\psi \tag{3}$$

или, так как

$$\operatorname{Re}\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right] = \ln|t-z| - \ln R$$

и

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln R\, d\psi = \ln R \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\psi = 0,$$

получаем следующий интеграл Дини:

$$u = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln|t-z|\, d\psi. \tag{3$'$}$$

Ряд (1) и формула (3′) имеют весьма простое строение, и пользование ими не представит никаких затруднений.

По известному $\frac{\partial u}{\partial n}$ сопряженная с u гармоническая функция v определится с точностью до постоянного слагаемого и может быть найдена либо как тригонометрический ряд, сопряженный с (1), либо из формулы (3):

$$v = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{I}\left[\ln\left(\frac{t-z}{t}\right)\right] d\psi = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n}[\arg(t-z) - \arg t]\, d\psi. \tag{4}$$

Если же отбросим здесь постоянное слагаемое, равное

$$\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \psi\, d\psi,$$

то будем иметь:

$$v = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \arg(t-z)\, d\psi.$$

Наконец, аналитическая функция комплексной переменной, для которой заданы значения нормальной производной ее вещественной

части $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе, определится с точностью до произвольного комплексного слагаемого и в замкнутой форме представится либо интегралом:

$$f(z) = u + iv = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) d\psi, \tag{5}$$

когда мы имеем в виду нормирование $f(0) = 0$; либо, если отбросить постоянную $\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln t \, d\psi$, интегралом:

$$f(z) = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln (t - z) \, d\psi. \tag{5'}$$

Замечание. Интеграл (3'), если в нем заменить $\frac{\partial u}{\partial n}$ произвольной вещественной функцией $F(\psi)$, даст гармоническую функцию

$$u = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi) \ln |t - z| \, d\psi. \tag{*}$$

Но, однако, граничные значения его нормальной производной, вообще говоря, не будут совпадать с $F(\varphi)$, а будут равны

$$F(\psi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi) \, d\psi,$$

что легко проверяется путем разложения предшествующего интеграла в ряд по степеням z.

2. Внешность окружности. Формула Дини для внешности круга может быть получена из (3) или (3') путем, подобным тому, который мы употребляли для интеграла Пуассона в n° 2 § 2.

Пусть вне окружности $|z| = R$ ищется гармоническая функция, регулярная в бесконечно далекой точке и удовлетворяющая на границе при $r = R$ условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = F(\varphi),$$

причем n — внутренняя нормаль области. В нашем случае производная по нормали будет одновременно производной по радиусу, и поэтому условие на контуре может быть переписано в форме:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = F(\varphi).$$

При помощи функции $\zeta = \rho e^{i\vartheta} = \frac{1}{z}$ преобразуем заданную область во внутренность окружности $|\zeta| = \frac{1}{R}$.

Искомая гармоническая функция $u(r, \varphi)$ перейдет в функцию $u\left(\frac{1}{\rho}, -\vartheta\right)$, граничные условия для которой будут:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\rho=\frac{1}{R}} = -\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=\frac{1}{R}} = r^2 \left.\frac{\partial u(r, -\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=R} = R^2 F(-\vartheta).$$

Применив к ней формулу (3), получим:

$$u\left(\frac{1}{\rho}, -\vartheta\right) = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi}^{+\pi} R^2 F(-\chi) \ln\left|1 - \frac{\zeta}{\tau}\right| d\chi, \quad \tau = \frac{1}{R} e^{i\chi},$$

или, если заменить переменную интегрирования, положив $\tau = \frac{1}{t} = \frac{1}{R} e^{-i\psi}$, и возратиться к прежней переменной z:

$$u(r, \varphi) = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi) \ln\left|1 - \frac{t}{z}\right| d\psi. \tag{6}$$

Наконец, в силу того, что $\int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi)\, d\psi = 0$,

$$u(r, \varphi) = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi) \ln|t - z|\, d\psi. \tag{6'}$$

Функция же комплексной переменной, имеющая $u(r, \varphi)$ своей вещественной частью, как видно из этих формул, представится интегралами вида (5) и (5').

3. Задача Неймана для полуплоскости. Пусть область, для которой мы решаем задачу Неймана, есть полуплоскость:

$$\mathrm{I}(z) = y > 0.$$

Производная по нормали к границе здесь есть вместе с тем производная по y, поэтому граничное условие может быть взято в форме

$$u_y(x, 0) = F(x). \tag{7}$$

Функцию $F(x)$, простоты ради, мы будем предполагать непрерывной и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяющей условию:

$$|F(x)| \leqslant \frac{M}{|x|^p}, \text{ где } p > 1.$$

Наиболее просто формула, аналогичная формуле Дини для круга, может быть получена в разбираемом случае, по-видимому, путем применения равенства (11) § 2, решающего задачу Дирихле для полуплоскости.

Рассмотрим гармоническую функцию $\frac{\partial u}{\partial y}$. По известным значениям ее (7) на вещественной оси она может быть восстановлена путем применения указанного нами равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\,d\xi.$$

Интеграл, стоящий в правой части, является производной по y от $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}d\xi$, в чем можно легко убедиться в силу наложенных на $F(x)$ ограничений. Поэтому искомая функция $u(x, y)$ отличается от последнего интеграла слагаемым $\omega(x)$, зависящим только от x; с другой стороны, $\omega(x)$ как разность между двумя гармоническими функциями — $u(x, y)$ и написанным выше интегралом — также должна быть гармонической функцией, и, так как среди функций от одной переменной гармонической будет лишь линейная функция, должно быть

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}d\xi+Ax+B=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\ln(\xi-z)\,d\xi+Az+B\right]. \qquad (8)$$

Отсюда вытекает аналог формулы Дини:

$$f(z)=u+iv=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\ln(\xi-z)\,d\xi+Az+B. \qquad (8')$$

Наши рассуждения мы приводили в простейших предположениях относительно контурных значений $\frac{\partial u}{\partial n}$. Если воспользоваться тем обстоятельством, что при восстановлении $u(x, y)$ по известной $\frac{\partial u}{\partial y}$ мы, не изменяя гармонического характера u, можем прибавлять под знаком интеграла (8) произвольную функцию от ξ, линейно зависящую от x, можно построить формулу, позволяющую решать задачу Неймана для полуплоскости при более общих предположениях.

Вблизи бесконечно далекой точки $\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$ имеет разложение вида:

$$\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}=\ln\sqrt{\xi^2}-\frac{x}{\xi}+\frac{y^2-x^2}{2\xi^2}+\ldots$$

Вычтем отсюда функцию $\ln\sqrt{1+\xi^2}-\frac{x\xi}{1+\xi^2}$, имеющую в разложении около бесконечности такие же два первых члена, как и $\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$. В результате получим функцию, имеющую для всяких x и y в точке $\xi=\infty$ нуль второго порядка.

Гармоническая функция

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\left[\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}-\ln\sqrt{1+\xi^2}+\frac{x\xi}{1+\xi^2}\right]d\xi \tag{9}$$

имеет, очевидно, ту же производную по y, что и (8), и, следовательно, удовлетворяет поставленным требованиям, однако формула (9) сохраняет смысл при более общих предположениях, чем (8); интеграл в правой части ее остается абсолютно сходящимся в том случае, когда

$$|F(\xi)|\leqslant M|\xi|^{\alpha} \quad \text{при } \alpha<1.$$

4. Задача Неймана для кольца. Обозначим через $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ значения нормальной производной гармонической функции $u(r, \varphi)$ на граничных окружностях $|z|=R_1$ и $|z|=R_2$ кольца $R_1<|z|<R_2$.

Сопряженная с $u(r, \varphi)$ функция $v(r, \varphi)$, вообще говоря, не будет однозначной в кольце, и аналитическая функция $f(z)=u+iv$ будет иметь внутри кольца разложение вида:

$$f(z)=A\ln z+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\gamma_k z^k \quad (\gamma_k=\alpha_k+i\beta_k). \tag{9'}$$

Отделение вещественной и мнимой частей приводит к равенствам (14) § 2. Напомним, что в наших исследованиях сейчас мы имеем в виду внутреннюю нормаль, производная по ней на меньшей окружности кольца будет совпадать с производной по радиусу, на большей же отличается от нее знаком.

Таким образом, функция u, определяемая первым рядом (14) § 2, должна на внешнем и внутреннем контурах кольца удовлетворять условиям:

$$F_1(\varphi)=\frac{A}{R_1}+\sum_{k=1}^{\infty}k\,[(\alpha_k R_1^{k-1}-\alpha_{-k}R_1^{-k-1})\cos k\varphi-$$
$$-(\beta_k R_1^{k-1}+\beta_{-k}R_1^{-k-1})\sin k\varphi],$$

$$F_2(\varphi)=-\frac{A}{R_2}-\sum_{k=1}^{\infty}k\,[(\alpha_k R_2^{k-1}-\alpha_{-k}R_2^{-k-1})\cos k\varphi-$$
$$-(\beta_k R_2^{k-1}+\beta_{-k}R_2^{-k-1})\sin k\varphi].$$

Коэффициент A находится двояким образом, и равенство обоих полученных выражений есть известное условие возможности решения задачи Неймана:

$$A=\frac{R_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F_1(\psi)\,d\psi=-\frac{R_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F_2(\psi)\,d\psi. \tag{10}$$

Что касается остальных коэффициентов, то они должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\left.\begin{aligned}
k\,(\alpha_k R_1^{k-1}-\alpha_{-k}R_1^{-k-1})&=a_k^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F_1(\psi)\cos k\psi\,d\psi,\\
-k\,(\alpha_k R_2^{k-1}-\alpha_{-k}R_2^{-k-1})&=a_k^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F_2(\psi)\cos k\psi\,d\psi,\\
-k\,(\beta_k R_1^{k-1}+\beta_{-k}R_1^{-k-1})&=b_k^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F_1(\psi)\sin k\psi\,d\psi,\\
k\,(\beta_k R_2^{k-1}+\beta_{-k}R_2^{-k-1})&=b_k^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F_2(\psi)\sin k\psi\,d\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

После решения их относительно α_k, α_{-k}, β_k, β_{-k} получим:

$$\alpha_k=\frac{1}{k}\,\frac{a_k^{(1)}R_1R_2^{-k}+a_k^{(2)}R_2R_1^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_2^kR_1^{-k}},\qquad \beta_k=-\frac{1}{k}\,\frac{b_k^{(1)}R_1R_2^{-k}+b_k^{(2)}R_2R_1^{-k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_2^kR_1^{-k}},$$

$$\alpha_{-k}=\frac{1}{k}\,\frac{a_k^{(1)}R_1R_2^{k}+a_k^{(2)}R_2R_1^{k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_2^kR_1^{-k}},\qquad \beta_{-k}=\frac{1}{k}\,\frac{b_k^{(2)}R_2R_1^{k}+b_k^{(1)}R_1R_2^{k}}{R_1^kR_2^{-k}-R_2^kR_1^{-k}}.$$

§ 4. Общая предельная задача для гармонических функций

1. Постановка задачи. Случай постоянных коэффициентов в предельном условии. Задачи Неймана и Дирихле являются наиболее простыми предельными задачами теории гармонических функций. Исследуем теперь методы решения общей предельной задачи. Пусть нужно будет найти гармоническую функцию внутри области B, если известно, что на контуре L она удовлетворяет предельному условию вида:

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=g \tag{1}$$

или вида:

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+l\frac{\partial u}{\partial s}+mu=g, \tag{1'}$$

где a, b, c, g, k, l, m — суть заданные вещественные функции точки контура и n — внутренняя нормаль.

Равенства (1) и (1') отличаются друг от друга лишь формой; в первом из них мы берем производные по координатным осям, во втором же — по направлениям, связанным с границей области. Но, как хорошо известно, одни производные могут быть просто выражены через другие.

В прикладных задачах чаще пользуются предельными условиями в форме (1').

Мы будем всюду предполагать область B кругом с центром в начале координат, радиус которого, простоты ради, положим равным единице и начнем свой анализ с наиболее простого случая постоянных коэффициентов.

Пусть в условии (1') k, l, m суть постоянные и g — известная функция полярного угла φ. Случай $k=0$, очевидно, не представляет никакого интереса; предельное условие тогда вырождается в дифференциальное уравнение для предельных значений u, ибо в него будет входить лишь функция u и производная от нее по длине дуги. Решая его относительно u, мы найдем значения гармонической функции на L и получим просто задачу Дирихле, которую только что разбирали.

Разделив (1') на k, мы можем предельное условие на границе взять в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial n}+l\frac{\partial u}{\partial s}+mu=g(\varphi). \tag{2}$$

Положим:

$$f(z)=u+iv=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n,$$

$$\alpha_n=a_n+ib_n,$$

при этом

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi-b_n\sin n\varphi). \tag{3}$$

Разложим функцию $g(\varphi)$, стоящую в правой части (2), в тригонометрический ряд:

$$g(\psi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi). \tag{4}$$

Мы говорили выше, что

$$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r},\quad \frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

заметив это, подставим ряд (3) в условие (2) и сравним коэффициенты при синусах и косинусах одинаковых углов. В результате сравнения

получим следующую систему уравнений из которой и должны будем определить a_k и b_k:

$$\left.\begin{aligned} ma_0 &= A_0, \\ -na_n - lnb_n + ma_n &= A_n, \\ nb_n - lna_n - mb_n &= B_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Если $m=0$, первое уравнение дает необходимое условие разрешимости задачи:

$$A_0 = 0,$$

или

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0; \qquad (6)$$

остальные уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} a_n + lb_n &= -\frac{A_n}{n}, \\ -la_n + b_n &= \frac{B_n}{n}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Определитель каждой системы равен $1 + l^2 \neq 0$, и системы наверное могут быть решены относительно a_n, b_n:

$$a_n = -\frac{A_n + lB_n}{n(1+l^2)}, \qquad b_n = \frac{B_n - lA_n}{n(1+l^2)}, \qquad (8)$$

Коэффициент a_0 остается произвольным, и искомая гармоническая функция может быть найдена, таким образом, лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Исследуем теперь второй случай вырождения задачи, когда $l=0$ и m есть целое положительное число; обозначим последнее через k.

Система (5) при $n=k$ дает равенства:

$$A_k = 0, \quad B_k = 0,$$

или

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(\varphi) \cos k\varphi\, d\varphi = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} g(\varphi) \sin k\varphi\, d\varphi = 0, \qquad (9)$$

являющиеся необходимыми условиями разрешимости задачи. Остальные системы имеют определитель, отличный от нуля, и могут быть решены относительно a_n и b_n:

$$a_0 = \frac{A_0}{k}, \quad a_n = -\frac{A_n}{n-k}, \quad b_n = \frac{B_n}{n-k} \quad (n \neq k), \qquad (10)$$

a_k, b_k остаются произвольными. Решение задачи будет найдено, следовательно, только с точностью до слагаемого вида:

$$r^k (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi).$$

Во всех остальных случаях задача имеет единственное решение и коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам:

$$a_0=\frac{A_0}{m},\quad a_n=-\frac{(n-m)A_n+lnB_n}{(n-m)^2+l^2n^2},$$

$$b_n=\frac{(n-m)B_n-lnA_n}{(n-m)^2+l^2n^2}\qquad (n=1,\ 2,\dots).$$

Объединяя все результаты, мы можем высказать следующее предложение.

Гармоническая функция $u(x,\ y)$, удовлетворяющая условию (2), представляется рядом:

$$u(x,\ y)=\frac{A_0}{m}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left[-\frac{(n-m)A_n+lnB_n}{(n-m)^2+l^2n^2}\cos n\varphi-\frac{(n-m)B_n-lnA_n}{(n-m)^2+l^2n^2}\sin n\varphi\right].\qquad (11)$$

Если один из членов ряда теряет смысл ввиду равенства нулю знаменателя, т. е. когда или $m=0$, или $l=0$ и $m=k$, то соответствующий член в ряду должен быть выпущен, и функция $u(x,\ y)$ может быть найдена лишь при соблюдении условий соответственно (6) либо (9), при этом решение перестает быть единственным, и для построения функции общего вида, удовлетворяющей поставленному условию, мы должны добавить к ряду (11) либо произвольную постоянную при $m=0$, либо член $r^k(a_k\cos k\varphi-b_k\sin k\varphi)$ с произвольными a_k и b_k.

Ряд (11) представляет собой вещественную часть следующей функции комплексной переменной z:

$$f(z)=\frac{A_0}{m}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n-iB_n}{m-n(1-li)}z^n.\qquad (12)$$

Если сюда вместо A_n и B_n подставить их значения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\cos n\psi\,d\psi,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\sin n\psi\,d\psi$$

и переменить местами порядок интегрирования и суммирования, мы получим:

$$f(z)=\frac{A_0}{m}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-in\psi}z^n}{m-n(1-li)}d\psi.$$

Далее, если условиться отбрасывать при интегрировании произвольную постоянную, мы можем написать:

$$\frac{z^n}{m-n(1-li)}=-\frac{1}{1-li}z^p\int^{z}\zeta^{n-p-1}d\zeta,\quad p=\frac{m}{1-li},$$

и, следовательно,

$$f(z)=\frac{A_0}{m}-\frac{1}{1-li}\frac{z^p}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\psi}\int\zeta^{n-p-1}\,d\zeta\,d\psi=$$

$$=\frac{A_0}{m}-\frac{1}{1-li}\frac{z^p}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\int^{z}\frac{\zeta^{-p}}{e^{i\psi}-\zeta}\,d\zeta\,d\psi,$$

или, ввиду того что

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\,d\psi \quad \text{и} \quad \frac{1}{m}=-\frac{pz^p}{m}\int^{z}\zeta^{-p-1}\,d\zeta,$$

$$f(z)=\frac{z^p}{\pi(1-li)}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\int^{z}\left\{-\frac{1}{2\zeta}-\frac{1}{e^{i\psi}-\zeta}\right\}\zeta^{-p}\,d\zeta\,d\psi=$$

$$=\frac{z^p}{2\pi(li-1)}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\int^{z}\zeta^{-p-1}\frac{e^{i\psi}+\zeta}{e^{i\psi}-\zeta}\,d\zeta\,d\psi. \qquad (12')$$

Наконец, если заметить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi=F(z)$$

есть интеграл Шварца для аналитической в единичном круге функции, имеющей на окружности вещественную часть $g(\varphi)$, получаем формулу:

$$f(z)=\frac{z^p}{li-1}\int^{z}F(\zeta)\,\zeta^{-p-1}\,d\zeta. \qquad (13)$$

В частном случае, когда m — отрицательное число, вещественная часть p будет отрицательной, ибо $p=\frac{m}{1+l^2}+\frac{mli}{1-l^2}$, и интегрирование по переменной ζ может быть выполнено от нуля до z:

$$f(z)=\frac{z^p}{2\pi(li-1)}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\int_{0}^{z}\zeta^{-p-1}\frac{e^{i\psi}+\zeta}{e^{i\psi}-\zeta}\,d\zeta\,d\psi. \qquad (14)$$

Для внешности круга разбираемая задача может быть сформулирована следующим образом: найти функцию $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n+ib_n}{z^n}$, голоморфную всюду вне единичного круга, включая и бесконечно далекую точку, вещественная часть которой $u=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$ на границе удовлетворяет условию (2).

Дифференцирование по внутренней нормали будет совпадать с дифференцированием по r, и поэтому условие (2) мы можем переписать в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial r}+l\frac{\partial u}{\partial \varphi}+mu=g(\varphi).$$

Преобразуем переменные, положив $z=\frac{1}{\zeta}=\frac{1}{\rho}e^{-i\vartheta}$. В плоскости ζ мы будем иметь внутреннюю задачу. Выясним, как изменятся предельные условия.

Так как $r=\frac{1}{\rho}$ и $\varphi=-\vartheta$, то на границе

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{\partial u}{\partial \rho},\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial u}{\partial \vartheta},$$

и (2) поэтому примет вид:

$$-\frac{\partial u}{\partial \rho}-l\frac{\partial u}{\partial \vartheta}+mu=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\vartheta-B_n\sin n\vartheta)=g(-\vartheta).$$

Новое предельное условие отличается от рассмотренного раньше лишь изменением знака у l и B_n.

Искомая функция $f(z)$, таким образом, представляется следующим рядом:

$$f(z)=\frac{A_0}{m}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n+iB_n}{m-n(1+li)}\cdot\frac{1}{z^n}. \qquad (15)$$

Если один из знаменателей членов ряда обращается в нуль, т. е. когда или $m=0$, или $l=0$, $m=k$, то решение существует лишь при условиях соответственно либо $A_0=0$, либо $A_k=B_k=0$; при этом оно перестает быть единственным. Общий вид искомых функций мы получим, выпустив в ряду (15) теряющий смысл член и прибавив к нему произвольное выражение вида $\frac{a_k+ib_k}{z^k}$.

Ряд в правой части легко можно просуммировать. В результате получим:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi(1+li)}\cdot\frac{1}{z^p}\int_{-\pi}^{+\pi}g(\psi)\int^{z}\zeta^{p-1}\frac{\zeta+e^{i\psi}}{\zeta-e^{i\psi}}\,d\zeta\,d\psi, \qquad (16)$$

где

$$p=\frac{m}{1+li}.$$

2. Задача Гильберта. Перейдем к исследованию задач с переменными коэффициентами. Для нас сейчас удобнее брать предельное условие в форме (1). Начнем с простейшего случая, когда $c=0$:

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=g.$$

Если u есть вещественная часть регулярной функции $f(z)$, то, ввиду того, что производная от нее будет равна $\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $-\frac{\partial u}{\partial y}$ будут вещественной и мнимой частями регулярной функции $f'(z)$, и наша задача, следовательно, равносильна следующей задаче Гильберта:

Найти функцию $f(z)=u+iv$, регулярную в круге $|z|<1$ и такую, что вещественная и мнимая части ее на граничной окружности удовлетворяют линейному условию:

$$\alpha(\varphi)\,u+\beta(\varphi)\,v=g(\varphi). \tag{17}$$

Коэффициенты $\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$ мы будем считать непрерывными функциями полярного угла φ, не обращающимися одновременно в нуль. Разделив равенство (17) на $\sqrt{\alpha^2(\varphi)+\beta^2(\varphi)}$, можно всегда достигнуть выполнения требования:

$$\alpha^2(\varphi)+\beta^2(\varphi)=1.$$

Введем угол $\omega(\varphi)$, определенный равенствами:

$$\alpha=\cos\omega,\quad \beta=-\sin\omega;\quad \omega=-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Граничное условие (17) примет вид:

$$u\cos\omega-v\sin\omega=\operatorname{Re}\left[e^{i\omega(\varphi)}f(z)\right]=g(\varphi). \tag{17'}$$

1. Остановимся на наиболее простом случае, когда $\omega(\varphi)$ будет однозначной функцией от φ.

Будем рассматривать $\omega(\varphi)$ как предельные значения вещественной части некоторой голоморфной функции $\Pi(z)$. Пользуясь интегралом Шварца, можем написать:

$$\Pi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(\psi)\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi.$$

Пусть $\omega_1(\varphi)$ суть предельные значения ее мнимой части на окружности. Рассмотрим голоморфную функцию $e^{i\Pi(z)}f(z)$. Так как на окружности $e^{i\Pi(z)}=e^{-\omega_1(\varphi)+i\omega(\varphi)}$, вещественная часть ее при $|z|=1$ будет равна

$$e^{-\omega_1(\varphi)}\operatorname{Re}\left[e^{i\omega(\varphi)}f(z)\right].$$

Наша задача, таким образом, свелась к разысканию функции $f(z)$, удовлетворяющей предельному требованию:

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\Pi(z)} f(z)\right] = g(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)}. \tag{17''}$$

Применив формулу Шварца, получим:

$$e^{i\Pi(z)} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi)\, e^{-\omega_1(\varphi)} \frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\, d\psi + Ci,$$

и окончательно для $f(z)$ имеем следующую формулу:

$$f(z) = e^{-i\Pi(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi)\, e^{-\omega_1(\varphi)} \frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\, d\psi + Ci\right]. \tag{18}$$

Решение задачи определяется с точностью до слагаемого вида $Cie^{-i\Pi(z)}$.

Перейдем теперь к более сложным случаям, когда $\omega(\varphi)$ — многозначная функция от φ.

2. Пусть при обходе окружности $\omega(\varphi)$ приобретает слагаемое $-2n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\omega(\pi) - \omega(-\pi) = -2n\pi.$$

Построим однозначную на граничной окружности функцию:

$$\chi(\varphi) = \omega(\varphi) + n\varphi.$$

Рассматривая $\chi(\varphi)$ как граничные значения вещественной части регулярной функции $\sigma(z)$, по формуле Шварца восстановим эту функцию $\sigma(z)$.

Далее, вещественная часть функции

$$\sigma_1(z) = \sigma(z) + in \ln z$$

на единичной окружности будет равна $\omega(\varphi)$. Предельные же значения мнимой части будут такими же, что и у $\sigma(z)$. Обозначим их через $\omega_1(z)$ и образуем функцию:

$$e^{i\sigma_1(z)} f(z) = z^{-n} e^{i\sigma(z)} f(z).$$

При $|z| = 1$ она удовлетворяет требованию:

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n} e^{i\sigma(z)} f(z)\right] = e^{-\omega_1(\varphi)} \operatorname{Re}\left[e^{i\omega(\varphi)} f(z)\right] = g(\varphi)\, e^{-\omega_1(\varphi)}. \tag{19}$$

Ввиду наличия множителя z^{-n}, функция, стоящая под знаком Re, может иметь в начале координат полюс порядка n.

Построим сначала регулярную функцию, имеющую на границе вещественную часть (19). Это будет

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi)\, e^{-\omega_1(\psi)} \frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\, d\psi + Ci.$$

Сюда мы должны добавить функцию, имеющую на окружности вещественную часть, равную нулю и могущую иметь в начале координат полюс порядка n. Она имеет форму:

$$\sum_{k=1}^{n} [A_k (z^{-k} - z^k) + iB_k (z^{-k} + z^k)],$$

где A_k и B_k — произвольные вещественные постоянные.

Окончательно для $f(z)$ мы получаем следующее выражение:

$$f(z) = z^n e^{-i\sigma(z)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi) e^{-\omega_1(\psi)} \frac{e^{i\psi} + z}{e^{i\psi} - z} d\psi + Ci + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n} [A_k (z^{-k} - z^k) + iB_k (z^{-k} + z^k)] \right\}. \quad (20)$$

Общее решение будет содержать, таким образом, $2n+1$ произвольных постоянных.

3. Допустим теперь, что при обходе по окружности, $\omega(\varphi)$ приобретает слагаемое $2n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Однозначная часть $\chi(\varphi)$ функции $\omega(\varphi)$ здесь будет:

$$\chi(\varphi) = \omega(\varphi) - n\varphi.$$

Пусть $\sigma(z)$ будет регулярной функцией, имеющей вещественную часть, при $|z| = 1$ равную $\chi(\varphi)$.

Предельные значения вещественной части у функции

$$\sigma_1(z) = \sigma(z) - in \ln z$$

будут совпадать с $\omega(\varphi)$. Что касается мнимой части при $|z| = 1$, то она будет такая же, как и у $\sigma(z)$. Мы сохраним за ней обозначение $\omega_1(z)$.

Точно так же можно показать, что

$$e^{i\sigma_1(z)} f(z) = z^n e^{i\sigma(z)} f(z)$$

удовлетворит на границе требованию:

$$\text{Re}\, [z^n e^{i\sigma(z)} f(z)] = g(\varphi) e^{-\omega_1(\varphi)}. \quad (21)$$

Выражение, стоящее в скобках, очевидно, имеет в начале координат корень кратности n, поэтому в разложении в ряд Фурье правой части свободный член и коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ должны обращаться в нуль для всяких k от 1 до $n-1$.

Задача будет иметь, следовательно, решение лишь только в том случае, когда соблюдены следующие требования:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\,d\psi=0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\cos k\psi\,d\psi=0, \tag{22}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\sin k\psi\,d\psi=0 \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1);$$

решение дается следующей формулой:

$$f(z)=z^{-n}e^{-i\sigma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\psi)e^{-\omega_1(\psi)}\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\psi+Ci\right]. \tag{23}$$

4. Пусть при обходе окружности $\omega(\varphi)$ получает приращение вида $(2n+1)\pi$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$; при этом, очевидно, $e^{i\omega(\varphi)}$ будет менять знак на обратный.

Из (17′) видно, что задача будет иметь здесь голоморфное решение только в том случае, когда $g(\varphi)$ будет неоднозначной функцией от φ и будет при обходе менять знак на обратный.

Если же $g(\varphi)$ однозначная функция от φ, $f(z)$, решающая задачу, должна иметь, очевидно, строение $f(z)=\sqrt{z}\,P(z)$, где $P(z)$ — однозначна в круге.

В обоих случаях мы приведем проблему к уже разобранным вопросам, если вместо переменной z введем новую переменную $\zeta=\sqrt{z}$.

3. Общая предельная задача. Общая предельная задача с граничным условием (1) или (1′) может быть приведена к интегральному уравнению, если воспользоваться полученными в предыдущем номере формулами, решающими задачу Гильберта в общем случае.

Однако исследования, связанные с таким путем, в общем случае громоздки и затруднительны. Мы ограничимся частным случаем, представляющим с точки зрения приложений наибольший интерес, когда условия на границе круга $|z|=1$ выражены равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial n}+m(\varphi)\,u=f(\varphi), \tag{24}$$

где $m(\varphi)$, $f(\varphi)$ — заданные непрерывные функции полярного угла.[1])

---

[1]) Для ознакомления с интегральными уравнениями, возникающими при решении общей проблемы, мы отсылаем к работе Н е т е р [1].

Перенесем второй член левой части направо и по нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, применив формулу (3') § 3, восстановим функцию u внутри круга:

$$u = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} mu \ln|t-z|\,d\psi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\ln|t-z|\,d\psi + C,$$

где C — некоторая вполне определенная постоянная, равная, как мы знаем, значению функции u в центре круга.

Перейдем в этом равенстве на окружность $z = e^{i\varphi}$:

$$u = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\,u \ln|t-z|\,d\psi + F(\varphi) + C, \tag{25}$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\ln|t-z|\,d\psi.$$

Мы получили интегральное уравнение для граничных значений искомой функции. Однако решение его не эквивалентно, очевидно, задаче (24), ибо интеграл типа Дини, которым мы воспользовались при его выводе, хотя и представляет собой гармоническую функцию, но нормальная производная от нее на контуре совпадает с функцией, стоящей под знаком интеграла типа Дини, лишь в том случае, когда интеграл от нее по окружности равен нулю, что представляет собой известное необходимое условие разрешимости задачи Неймана; в противном случае значения нормальной производной на контуре от интеграла типа Дини [(*) § 3] дадут не функцию, стоящую под знаком интеграла Дини, а эту функцию минус среднее арифметическое ее значений. В обозначениях n° 1 § 3 это будет

$$F(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\psi)\,d\psi.$$[1]

Следовательно, кроме (24), искомая функция должна еще удовлетворять требованию:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [m(\psi)\,u - f(\psi)]\,d\psi = 0. \tag{26}$$

Последнее можно было бы получить прямым интегрированием условия (24) по окружности.

Решение уравнения (25) при условии (26) вполне эквивалентно решению поставленной предельной задачи.

---

[1]) См. замечание в n° 1 § 3.

Само уравнение (25) содержит неизвестную постоянную C, которую надлежит определить из условия существования решения.

Ядро интегрального уравнения не ограничено; оно логарифмически бесконечно при $z=t$. Но уже второе итерированное ядро будет, как можно видеть, ограниченным, и к уравнению поэтому применима вся теория Фредгольма.

Уравнение (25) является частным случаем более общего уравнения:

$$u=\lambda\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\ln|t-z|\,u\,d\psi+F(\varphi)+C \tag{27}$$

при $\lambda=-\frac{1}{\pi}$. Допустим сначала, что $\lambda=-\frac{1}{\pi}$ не есть собственное число. Тогда уравнение имеет единственное решение. Обозначим через u_F решение уравнения:

$$u=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\ln|t-z|\,u\,d\psi+F(\varphi) \tag{25'}$$

и через u_1 решение уравнения:

$$u=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi)\ln|t-z|\,u\,d\psi+1. \tag{25''}$$

Решение исходного уравнения, очевидно, будет равно:

$$u=u_F+Cu_1. \tag{28}$$

Осталось еще подобрать C так, чтобы удовлетворить требованию (26). Оно даст:

$$C\int_{-\pi}^{+\pi} mu_1\,d\varphi+\int_{-\pi}^{+\pi}(mu_F-f)\,d\varphi=0. \tag{29}$$

Если

$$\int_{-\pi}^{+\pi} mu_1\,d\varphi\neq 0,$$

то отсюда мы единственным образом найдем C и по найденным контурным значениям (28) гармонической функции u восстановим и эту функцию. Задача имеет здесь единственное решение.

В противном случае, когда

$$\int_{-\pi}^{+\pi} mu_1\,d\varphi=0,$$

равенство (29) возможно только в том случае, когда функции m и f удовлетворяют условию:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (mu_F - f)\, d\varphi = 0. \tag{30}$$

Число C остается произвольным и задача будет допускать бесчисленное множество решений.

Более сложным является случай, когда $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ будет собственным числом уравнения (27). Тогда (25) будет иметь решение только при специальном виде правой части; именно, для существования решения необходимо и достаточно, чтобы всякое решение однородного союзного уравнения:

$$v = -\frac{m(\varphi)}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln|t - z|\, v\, d\psi \tag{31}$$

было ортогонально к свободному члену $F(\varphi) + C$.

Пусть $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ есть полная система линейно-независимых решений уравнения (31). Можно легко убедиться, что каждое решение (31) отличается только лишь множителем $m(\varphi)$ от решения однородного уравнения:

$$u = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} m(\psi) \ln|t - z|\, u\, d\psi. \tag{32}$$

В самом деле, пусть v удовлетворяет (31). Если разделить в нем обе части на $m(\varphi)$ и обозначить $\frac{v}{m(\varphi)} = u$, мы получим уравнение (32). Наоборот, если считать, что u удовлетворяет уравнению (32) и положить $v = m(\varphi)\, u$, то v будет решением (31). Поэтому полной системой независимых решений (32) будет:

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{m}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{m}, \ldots, \quad \bar{u}_n = \frac{\bar{v}_n}{m}.$$

Условия существования решения уравнения (25) будут:

$$C \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_k\, d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} F \bar{v}_k\, d\varphi = 0,$$

или

$$\frac{\int_{-\pi}^{+\pi} F \bar{v}_1\, d\varphi}{\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_1\, d\varphi} = \ldots = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} F \bar{v}_n\, d\varphi}{\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_n\, d\varphi}. \tag{33}$$

Допустим, что они выполняются и по крайней мере один из знаменателей, например $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_1 d\varphi$, отличен от нуля. Число C найдется из предыдущего равенства.

Назовем $\tilde{u}$ какое-либо частное решение неоднородного уравнения (25). Общее решение его имеет вид:

$$u = \tilde{u} + \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{u}_k,$$

где A_k — произвольные постоянные. Условие (26) здесь дает:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \int\limits_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_k\, d\varphi + \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (m\tilde{u} - f)\, d\varphi = 0.$$

Отсюда мы можем найти постоянную A_1 как функцию $A_2, \ldots, A_n$, ибо коэффициент при ней будет отличен от нуля, так как

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_1\, d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_1 d\varphi \neq 0.$$

Таким образом, мы получим решение поставленной проблемы, содержащее $n-1$ произвольную постоянную.

Перейдем к случаю, когда все знаменатели равенств (33) обращаются в нуль:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_k d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \bar{v}_k d\varphi = 0.$$

Для выполнения (33) тогда необходимо должно быть:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} F\bar{v}_k\, d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Это значит, что уравнения (25′) и (25″) одновременно имеют решения. Назовем частные решения их соответственно $\tilde{u}_F$ и $\tilde{u}_1$. Общее решение (25) будет:

$$u = \tilde{u}_F + C\tilde{u}_1 + \sum_{k=1}^{n} A_k \bar{u}_k,$$

где C и A_k — произвольные постоянные.

Требование (26) даст, ввиду $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} m\bar{u}_k d\varphi = 0$,

$$C\int\limits_{-\pi}^{+\pi} m\tilde{u}_1\, d\varphi + \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (m\tilde{u}_F - f)\, d\varphi = 0.$$

Отсюда должно быть найдено число C. Если коэффициент при C отличен от нуля, мы получим решение, содержащее n произвольных постоянных; если же он равен нулю, то задача либо вовсе не имеет решения в случае

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (m\tilde{u}_F - f)\, df \neq 0,$$

либо имеет решение, содержащее $n+1$ произвольную постоянную в противном случае.

§ 5. Основные задачи для бигармонических функций

1. Первая основная задача. Приведение к системе уравнений. Нужно найти две функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфные в единичном круге $|z| < 1$ и удовлетворяющие на границе условию:

$$\varphi(z) + \frac{\omega(z)}{\overline{\omega'(z)}}\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = F(z); \qquad (1)$$

$\omega(z)$ — функция, дающая конформное преобразование круга $|z| < 1$ на односвязную ограниченную область B.

Ниже, в n° 3, нам потребуется считать ее контур L таким, что существуют непрерывные производные до второго порядка от координат точек контура по длине дуги.

В n° 2 § 1 мы имели случай заметить, что задача может иметь единственное решение, если мы фиксируем $\varphi(0)$ и $I\left[\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}\right]$[1]. Будем считать $\varphi(0) = 0$, мнимую же часть $\varphi'(0) : \omega'(0)$ оставим пока произвольной.

---

[1]) Вторая из этих величин имеет форму, отличную от той, которая указана в n° 2 § 1. А именно, если в плоскости z дана некоторая область B, содержащая начало координат, и для нее решается первая основная задача с граничным условием вида (16) § 1, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются единственным образом, когда заданы значения $\varphi(0)$ $I[\varphi'(0)]$. Граничное же условие вида (1), рассматриваемое нами сейчас, получается из условия вида (16) § 1 при преобразовании круга на B. Если потребовать, чтобы при преобразовании нулевые точки переходили друг в друга, то задание величин $\varphi(0)$ и $I[\varphi'(0)]$ в области B равносильно заданию в круге величин вида $\varphi(0)$ и $I\left[\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}\right]$, указанных нами в тексте книги.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть представлены рядами:

$$\varphi(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu z^\nu, \qquad \psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu z^\nu. \tag{2}$$

Будем искать α_ν, β_ν методом неопределенных коэффициентов. Разложим для этого свободный член $F(z)$ и коэффициент $\frac{\omega(z)}{\overline{\omega'(z)}}$ в ряд Фурье по степеням $e^{i\vartheta}=\sigma$:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\delta_\nu\sigma^\nu,^{1)} \qquad F(\sigma)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}A_\nu\sigma^\nu.$$

Подставив ряды (2) в условие (1) и положив там $z=\sigma$, придем к следующему равенству:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\sigma^\nu+\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\delta_\nu\sigma^\nu\cdot\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu\bar{\alpha}_\nu\sigma^{-\nu+1}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{\beta}_\nu\sigma^{-\nu}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}A_\nu\sigma^\nu. \tag{3}$$

Отсюда, после сравнения коэффициентов при положительных степенях σ, получаем систему уравнений:

$$\alpha_\nu+\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{\alpha}_k\delta_{\nu+k-1}=A_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ldots). \tag{4}$$

Сравнение же коэффициентов при σ^ν для $\nu=0,\ -1,\ -2,\ldots$ дает следующую систему:

$$\bar{\beta}_\nu+\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{\alpha}_k\delta_{-\nu+k-1}=A_{-\nu} \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{5}$$

Очевидно, все сводится к нахождению чисел α_ν из системы (4), ибо после того как они оттуда найдены, числа β_ν вполне определяются по формулам (5).

Из самой постановки задачи ясно, что система (4) не может иметь единственного решения, удовлетворяющего условиям сходимости рядов для $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ до тех пор, пока мы не фиксируем мнимую часть $\alpha_1/\omega'(0)$.

Кроме того, если $\mathrm{I}\left[\frac{\alpha_1}{\omega'(0)}\right]$ фиксирована, решение может существовать лишь при определенных условиях, налагаемых на правые части системы, эквивалентных условиям (26′) и (29), которые указаны во введении к настоящей главе и выражают равенство нулю главного вектора усилий, приложенных к контуру области, и его главного момента.

---

1) При сделанных относительно L предположениях можно показать, что ряд сходится абсолютно и равномерно.

В разбираемом случае условие (26′) приводится к равенству нулю приращения функции $F(z)$ вдоль окружности круга или просто к ее однозначности.

Равенство же (29), ввиду $\zeta = e^{i\vartheta}$, $d\zeta = ie^{i\vartheta}d\vartheta$ дает:

$$\mathrm{I}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} F(e^{i\vartheta})\,\overline{\omega'(e^{i\vartheta})}\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta\right] = 0. \qquad (6)$$

Если нам удастся разыскать решение (4) такое, что ряды для $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z)$ будут абсолютно сходиться при $|z| \leqslant 1$, то мы можем быть уверены в том, что построенные функции удовлетворяют всем поставленным требованиям.

В приближенных вычислениях часто встречается тот случай, когда единичный круг отображается на область B при помощи полинома некоторой степени n, если не точно, то, по крайней мере, приближенно с погрешностью, лежащей за пределами допустимой ошибки вычислений.

Итак, допустим, что

$$\omega(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_n z^n \qquad (\gamma_1 \neq 0,\ \gamma_n \neq 0). \qquad (7)$$

Обозначим через $\overline{\omega}(z)$ полином, коэффициенты которого сопряжены с коэффициентами $\omega(z)$:

$$\overline{\omega}(z) = \overline{\gamma}_1 z + \overline{\gamma}_2 z^2 + \ldots + \overline{\gamma}_n z^n.$$ [1]

Так как $\omega'(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$, функция $\overline{\omega}'\left(\frac{1}{z}\right)$ будет регулярна и отлична от нуля всюду при $|z| \geqslant 1$. Поэтому отношение

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{z}\right)}$$

представляет собой регулярную при $|z| \geqslant 1$ функцию, имеющую на бесконечности полюс n-го порядка. Ее разложение в ряд Лорана около бесконечно далекой точки имеет вид:

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{z}\right)} = \delta_n z^n + \delta_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \delta_1 z + \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{-\nu} z^{-\nu}. \qquad (8)$$

---

[1]) Такого рода обозначением мы будем многократно пользоваться ниже. Условимся в следующем: если функция $\varphi(z)$ представляется рядом

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

то под $\overline{\varphi}(z)$ будем понимать функцию, представляемую рядом

$$\overline{\varphi}(z) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$$

Положив в этом равенстве $z=\sigma$, имеем:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}=\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\delta_n\sigma^n+\delta_{n-1}\sigma^{n-1}+\ldots+\delta_1\sigma+\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{-\nu}\sigma^{-\nu}. \quad (9)$$

Все коэффициенты δ_ν с номером, большим n, оказываются равными нулю. Система (4) примет, следовательно, форму:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\overline{\alpha}_1\delta_1+2\overline{\alpha}_2\delta_2+\ldots+n\overline{\alpha}_n\delta_n&=A_1,\\ \alpha_2+\overline{\alpha}_1\delta_2+2\overline{\alpha}_2\delta_3+\ldots+(n-1)\overline{\alpha}_{n-1}\delta_n&=A_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ \alpha_n+\overline{\alpha}_1\delta_n&=A_n,\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\alpha_\nu=A_\nu,\quad \nu\geqslant n+1. \quad (11)$$

Система же (5) для определения β будет:

$$\overline{\beta_\nu}=\sum_{k=1}^{n+\nu+1}k\overline{\alpha}_k\delta_{-\nu+k-1}=A_{-\nu}\quad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots). \quad (12)$$

Равенства (10) дают систему $2n$ вещественных уравнений с $2n$ неизвестными a_k и b_k $(\alpha_k=a_k+ib_k)$. Определитель ее должен равняться нулю, ибо $I\left[\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right]$ остается неопределенной. Ранг системы равняется $n-1$, так как, если мы зададим эту величину, система будет иметь, что вытекает из единственности решения основной бигармонической задачи, единственное решение.

Замечание 1. Интегральное представление функции $\psi(z)$ через $\varphi(z)$ в общем случае может легко быть получено из предельного условия (1).

Действительно, положив там $z=\sigma$ и перейдя к сопряженным величинам, получим предельные значения $\psi(z)$ в форме:

$$\psi(\sigma)=\overline{F(\sigma)}-\overline{\varphi(\sigma)}-\overline{\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}}\,\varphi'(\sigma).$$

Применим формулу Коши к обеим частям равенства. Из теории аналитических функций известно, что если $f(\sigma)$ представляет предельные значения функции, голоморфной в единичном круге, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma=\overline{f(0)},\ [1])$$

[1]) В самом деле, пусть $f(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k}\sigma^k$. С другой стороны,

$$\frac{1}{\sigma-z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\sigma^{\nu+1}},\quad d\sigma=ie^{i\vartheta}\,d\vartheta=i\sigma\,d\vartheta.$$

и, стало быть,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\varphi(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma=\overline{\varphi(0)}=0.$$

Поэтому

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-z}\,d\sigma. \qquad (13)$$

Представляет интерес случай, когда $\omega(z)$ — целая функция

$$\omega(z)=\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\cdots$$

Тогда $\overline{\omega(\sigma)}$ будут предельными значениями на единичной окружности функции

$$\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\overline{\gamma}_1}{z}+\frac{\overline{\gamma}_2}{z^2}+\ldots,$$

голоморфной всюду за исключением точки нуль, являющейся для нее либо полюсом, когда $\omega(z)$ — полином, либо существенной особенностью, когда $\omega(z)$ — трансцендентная функция.

Второй интеграл правой части (13) будет равен:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-z}\,d\sigma$$

и дает сумму вычетов функции

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\,\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta-z} \qquad (*)$$

относительно особых точек внутри единичной окружности. Таких точек две. Во-первых, $\zeta=z$ с вычетом

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\,\varphi'(z) \qquad (**)$$

и, во-вторых, точка $\zeta=0$. Нам нет нужды проделывать вычисления для нахождения второго вычета. Достаточно заметить следующее весьма простое обстоятельство. Как известно, он будет равен коэффициенту при $\frac{1}{\zeta}$ в разложении функции (*) около начала координат в ряд Лорана. Последний же

Если подставить все под знак интеграла, мы приведем его к вычислению суммы:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k,\nu=0}^{\infty}\overline{a}_k z^{\nu}\int_{-\pi}^{+\pi}\sigma^{-k-\nu}\,d\vartheta,$$

но все интегралы вида $\int_{-\pi}^{+\pi}\sigma^{-k-\nu}\,d\vartheta$ равны нулю за исключением одного, когда $k=\nu=0$; последний равен 2π, и от всей суммы сохранится один лишь член $\overline{a}_0=\overline{f(0)}$.

можно получить путем умножения степенных рядов для каждого сомножителя. Но когда мы будем раскладывать по степеням ζ дробь $\frac{1}{\zeta - z}$, переменная z войдет всюду в отрицательных степенях, ибо

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\zeta}{z^2} - \ldots$$

Поэтому вычет представится в виде степенного ряда от z, содержащего только отрицательные степени z. Эта функция от z, совместно с вычетом (**), должна в сумме дать голоморфную в единичном круге функцию. Вычет в нуле, следовательно, должен равняться взятой с обратным знаком главной части разложения Лорана по степеням z функции

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)} \varphi'(z);$$

изучаемый же интеграл поэтому равен регулярной части этого ряда. Обозначим ее символом Reg:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma = \operatorname{Reg}\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)} \varphi'(z)\right],$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}\, d\sigma - \operatorname{Reg}\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)} \varphi'(z)\right]. \qquad (14)$$

Приведем пример.

Пример 1. Решим сначала простейшую задачу. Пусть область B — круг радиуса R. Здесь $\omega(z) = Rz$, $\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \sigma$, $\delta_1 = 1$, $\delta_\nu = 0$ при $\nu \neq 1$. Уравнения для чисел α принимают вид:

$$\alpha_1 + \overline{\alpha_1} = A_1, \quad \alpha_\nu = A_\nu, \quad \nu \geqslant 2.$$

Решение возможно лишь в том случае, когда $\mathrm{I}\,(A_1) = 0$.
Положим $b_1 = \mathrm{I}\,(\alpha_1) = 0$, тогда

$$\alpha_1 = a_1 = \frac{A_1}{2}.$$

Числа β_ν найдутся из равенств:

$$\overline{\beta}_\nu + (\nu + 2)\, \overline{a}_{\nu+2} = A_{-\nu},$$

$$\beta_\nu = \overline{A}_{-\nu} - (\nu + 2)\, a_{\nu+2},$$

тогда

$$\varphi(z) = \frac{A_1}{2} z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots,$$

или, так как

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\sigma)\,\sigma^{-\nu}\,d\vartheta,$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\sigma)\left[\frac{z}{2\sigma} + \frac{z^2}{\sigma^2} + \frac{z^3}{\sigma^3} + \ldots\right]d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{F(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma - A_0 - \frac{1}{2}A_1 z_1,$$

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{A}_{-\nu} z^\nu - \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu A_\nu z^{\nu-2} = \frac{2}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \frac{\varphi'(z)}{z} + \frac{A_1}{2z}.$$

Чтобы получить решение в области B, мы теперь всюду в формулах должны будем заменить z на $\frac{z}{R}$. Положив $\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = \varphi_1(z)$ и $\psi\left(\frac{z}{R}\right) = \psi_1(z)$, имеем:

$$\varphi_1(z) = \frac{A_1}{2R}z + \frac{A_2}{R^2}z^2 + \ldots = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=R} \frac{F\left(\frac{\sigma}{R}\right)}{\sigma - z}\,d\sigma - A_0 - \frac{1}{2}\frac{A_1}{R}z,$$

$$\psi_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{A}_{-\nu}}{R^\nu} z^\nu - \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu\frac{A_\nu}{R^{\nu-2}} z^{\nu-2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=R} \frac{\overline{F\left(\frac{\sigma}{R}\right)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \frac{R^2\varphi_1'(z)}{z} + \frac{RA_1}{2z}.$$

Пример 2. Граница области B есть улитка Паскаля:

$$\omega(z) = bz(1 + az), \quad b > 0, \quad 0 < a < \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sigma(1 + a\sigma)}{1 + 2a\overline{\sigma}} = \frac{\sigma^2(1 + a\sigma)}{2a + \sigma} =$$

$$= a\sigma^2 + (1 - 2a^2)\sigma - 2a(1 - 2a^2)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\left(\frac{2a}{\sigma}\right)^\nu,$$

$$\delta_\nu = 0\ (\nu > 2), \quad \delta_2 = a, \quad \delta_1 = 1 - 2a^2,$$
$$\delta_{-\nu} = (-1)^{\nu+1}(2a)^{\nu+1}(1 - 2a^2) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Система для чисел α_ν сводится к следующей:

$$\alpha_1 + \overline{\alpha}_1(1 - 2a^2) + 2a\overline{\alpha}_2 = A_1, \quad \alpha_2 + \overline{\alpha}_1 a = A_2,$$
$$\alpha_\nu = A_\nu, \quad \nu \geqslant 3.$$

Из второго уравнения найдем $\alpha_2 = A_2 - \overline{\alpha}_1 a$. Внося это в первое уравнение, получим:

$$\alpha_1 + \overline{\alpha}_1 = \frac{A_1 - 2a\overline{A}_2}{1 - 2a^2}.$$

Отсюда видно, что решение возможно только при условии I $[A_1 - 2a\overline{A_2}] = 0$. Будем опять считать $b_1 = 0$:

$$\alpha_1 = \frac{A_1 - 2a\overline{A}_2}{2(1 - 2a^2)};$$

функция $\varphi(z)$ найдена весьма просто. Для разыскания $\psi(z)$ применим формулу (14), приведенную в замечании:

$$\operatorname{Reg}\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z)\right] = \frac{z+a}{z^2(1+2az)}\varphi'(z) - \frac{a\alpha_1}{z^2} - \frac{2a\alpha_2 + \alpha_1(1-2a^2)}{z},$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma - \frac{z+a}{z^2(1+2az)}\varphi'(z) + \frac{a\alpha_1}{z^2} + \frac{2a\alpha_2 + \alpha_1(1-2a^2)}{z}.$$

Задача для внешности замкнутой кривой может быть простым преобразованием сведена к разобранному случаю.

Пусть B есть область, внешняя относительно кривой L и не содержащая начала координат. Отобразим на нее при помощи функции $z = \omega(\zeta)$ единичный круг так, чтобы нуль плоскости ζ перешел в бесконечно далекую точку плоскости z. Отображающая функция имеет здесь вид:

$$\omega(\zeta) = \frac{\gamma}{\zeta} + \gamma_0 + \gamma_1\zeta + \ldots \tag{15}$$

В области B, как нами указывалось в n° 2 § 1, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в общем случае имели форму:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + (B+Ci)\,z + \varphi^0(z), \\ \psi_1(z) &= \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + (B'+C'i)\,z + \psi^0(z), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где X, Y, B, C, B', C' суть некоторые постоянные, обладающие известным физическим значением, а φ^0, ψ^0 — однозначные аналитические функции, регулярные всюду вне контура L, включая и бесконечность. Подставляя сюда вместо z его значение, мы видим, что в силу равенства (15), функции φ_1 и ψ_1 примут следующую форму:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + (B+Ci)\,\frac{\gamma}{\zeta} + \varphi_0(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= -\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + (B'+C'i)\,\frac{\gamma}{\zeta} + \psi_0(\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

причем $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ — голоморфны в единичном круге. Постоянную C на основании сказанного в конце n° 2 § 1 будем считать равной нулю. Внесем $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в предельное условие (1). Простые вычисления показывают, что

$\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ должны удовлетворять тому же условию, но с измененной правой частью:

$$\varphi_0(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi_0'(\sigma)}+\overline{\psi_0(\sigma)}=F_0(\sigma),$$

где

$$F_0(\sigma)=F(\sigma)-\frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma-\frac{B\gamma}{\sigma}-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\left[\frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\sigma-B\bar{\gamma}\sigma^2\right]-\\-(B'-iC')\gamma\bar{\sigma}. \qquad (18)$$

В самой постановке задачи мы не предполагали главный вектор внешних действующих на контур L напряжений равным нулю и функция $F(\sigma)$ могла быть многозначной. При обходе по окружности в положительном направлении $F(\sigma)$ получает приращение $i(X+iY)$. На такую же величину увеличивается и $\frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma$, и $F_0(\sigma)$ возвращается поэтому к прежнему значению.

Для φ_0 и ψ_0 мы получили, таким образом, уже известную задачу.

Как и в предыдущей задаче, представляет интерес частный случай отображающей функции, когда система уравнений для a_ν будет особенно простой.

Пусть единичный круг с достаточной точностью отображается на область B при помощи функции $\omega(\zeta)$, где

$$\left.\begin{aligned}\omega(\zeta)&=\frac{\gamma}{\zeta}+\gamma_0+\gamma_1\zeta+\ldots+\gamma_n\zeta^n,\\ \overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)&=-\bar{\gamma}\zeta^2+\bar{\gamma}_1+\ldots+n\frac{\bar{\gamma}_n}{\zeta^{n-1}}.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Ввиду $\omega'(\zeta)\neq 0$ в единичном круге $\dfrac{1}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ будет регулярной всюду при $|\zeta|\geqslant 1$ и иметь бесконечно далекую точку полюсом второго порядка; отношение же

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$$

будет функцией, регулярной вне единичного круга и имеющей на бесконечности полюс порядка $n-2$. Ее разложение около бесконечности будет:

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\delta_{n-2}\zeta^{n-2}+\ldots+\delta_1\zeta+\delta_0+\delta_{-1}\zeta^{-1}+\ldots;$$

отсюда

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}=\delta_{n-2}\sigma^{n-2}+\ldots+\delta_1\sigma+\delta_0+\delta_{-1}\sigma^{-1}+\ldots$$

Система уравнений для коэффициентов α_ν примет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1+\bar{\alpha}_1\delta_1+2\bar{\alpha}_2\delta_2+\ldots+(n-2)\bar{\alpha}_{n-2}\delta_{n-2}=A_1^{(0)},\\ &\alpha_2+\bar{\alpha}_1\delta_2+2\bar{\alpha}_2\delta_3+\ldots+(n-3)\bar{\alpha}_{n-3}\delta_{n-2}=A_2^{(0)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_{n-2}+\bar{\alpha}_1\delta_{n-2}=A_{n-2}^{(0)};\quad \alpha_\nu=A_\nu^{(0)},\quad \nu\geqslant n-1.\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Замечание 2. Остановим внимание читателя еще на случае, когда ряд для $\omega(\zeta)$ сходится на всей плоскости:

$$\omega(\zeta)=\frac{\gamma}{\zeta}+\textit{целая функция.}$$

Буквальное повторение того, что мы говорили в замечании 1 относительно $\psi(z)$, применимо и к функции $\psi_0(\zeta)$, и поэтому мы можем записать:

$$\psi_0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F_0(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma-\operatorname{Reg}\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\,\varphi_0'(\zeta)\right]. \tag{21}$$

Пример 3. Пусть B — внешность эллипса с центром в начале координат и полуосями $a=R(1+m)$, $b=R(1-m)$, $R>0$, $0\leqslant m<1$. Здесь

$$\omega(\zeta)=R\left(m\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}=\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(m-\sigma^2)}=-\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^3}\left(1+\frac{m}{\sigma^2}+\frac{m^2}{\sigma^4}+\ldots\right).$$

Разложение $\dfrac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}$ в этом случае совершенно не содержит положительных степеней σ, и уравнения для нахождения α_ν принимают здесь весьма простой вид:

$$a_\nu=A_\nu;$$

тогда

$$\varphi_0(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu\zeta^\nu=\frac{\zeta}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}F_0(\sigma)\frac{d\vartheta}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\zeta}{\sigma}F_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}.$$

Функцию $\psi_0(\zeta)$ найдем, пользуясь равенством (21). Отношение

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}=-\frac{\zeta(m+\zeta^2)}{1-m\zeta^2}$$

есть голоморфная функция от ζ при $|\zeta|\leqslant 1$, так как $m<1$;

$$\psi_0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F_0(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma+\frac{\zeta(m+\zeta^2)}{1-m\zeta^2}\,\varphi'_0(\zeta).$$

Функции φ_0 и ψ_0 являются решениями задачи для того случая, когда $X=Y=B=B'=C'=0$. Чтобы получить общее решение, достаточно к ним прибавить соответственно:

$$\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+B\frac{\gamma}{\zeta};\qquad -\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+(B'+iC')\frac{\gamma}{\zeta}.$$

При этом

$$F_0(\sigma)=F(\sigma)-\frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma-\frac{BR}{\sigma}+$$
$$+\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(\sigma^2-m)}\left[\frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\sigma-BR\sigma^2\right]-(B'-iC')R\sigma.$$

2. Вторая основная задача. Приведение к системе уравнений. После отображения области B предельные условия второй основной задачи записываются в форме (см. n° 3 § 1):

$$\varkappa\varphi(z) - \frac{\omega(z)}{\overline{\omega'(z)}}\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = \Phi(z), \ |z| = 1. \tag{22}$$

Рассуждения и выкладки, связанные здесь с применением метода неопределенных коэффициентов, весьма сходны с теми, которые мы приводили для первой задачи. Здесь произвольным остается только одно из значений φ или ψ в какой-либо точке области. Значение же мнимой части отношения $\frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)}$ в той же точке должно быть найдено из задачи.

Пусть область B конечна и односвязна; $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут голоморфны при $|z| < 1$. Мы будем считать $\varphi(0) = 0$. Имеем:

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu, \quad \psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^\nu.$$

После подстановки в предельное условие (22), если положить там $z = \sigma$, имеем:

$$\varkappa \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sigma^\nu - \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta_\nu \sigma^\nu \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\bar{\alpha}_\nu \sigma^{-\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\beta}_\nu \sigma^{-\nu} = \Phi(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} B_\nu \sigma^\nu.$$

Откуда, после сравнения коэффициентов при степенях σ, получаем систему уравнений:

$$\varkappa\alpha_\nu - \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{\alpha}_k \delta_{\nu+k-1} = B_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{23}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k\bar{\alpha}_k \delta_{k-\nu-1} - \bar{\beta}_\nu = B_{-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2\ldots). \tag{24}$$

Так же как и в первой задаче, если нам удастся разыскать решение системы (23), коэффициенты β_ν определятся из системы (24) без затруднений.

В случае, когда отображающая функция есть полином (7) и разложение $\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}$ содержит только конечное число положительных степеней σ, система (23) вырождается и принимает форму:

$$\begin{gathered}
\varkappa\alpha_1 - \bar{\alpha}_1\delta_1 - 2\bar{\alpha}_2\delta_2 - \ldots - n\bar{\alpha}_n\delta_n = B_1, \\
\varkappa\alpha_2 - \bar{\alpha}_1\delta_2 - 2\bar{\alpha}_2\delta_3 - \ldots - (n-1)\bar{\alpha}_{n-1}\delta_n = B_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varkappa\alpha_n - \bar{\alpha}_1\delta_n = B_n, \\
\varkappa\alpha_\nu = B_\nu \qquad (\nu \geqslant n+1).
\end{gathered}$$

Интегральное представление функции ψ находится таким же способом, как и раньше (см. замечание 1 n° 1):

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\cdot\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma. \tag{25}$$

Наконец, когда $\omega(z)$ — целая функция, второй член в предыдущем равенстве вычисляется просто, и оно примет форму:

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma - \mathrm{Reg}\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z)\right]. \tag{26}$$

Аналогично все будет происходить и для бесконечной области, ограниченной одним простым контуром. Соответствующих выкладок мы приводить не будем.

3. Первая основная задача. Приведение к функциональным уравнениям. Область B мы будем предполагать ограниченной и односвязной. Ниже мы укажем, как изменятся функциональные уравнения для случая неограниченной области.

Наряду с предельным условием, получающимся после конформного преобразования ее на круг, рассмотрим условие, сопряженное с ним:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} &= F(\sigma),\\ \overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) &= \overline{F(\sigma)}.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Умножим оба равенства на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - z}$ и проинтегрируем по окружности $|\sigma| = 1$. По теореме Гарнака мы получим условия, эквивалентные исходным:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma = A(z),\\ &\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\varphi(\sigma)}}{\sigma - z}d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\psi(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma = B(z),\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где для краткости положено:

$$A(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{F(\sigma)}{\sigma-z}\,d\sigma,\quad B(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma. \tag{29}$$

После применения формулы Коши и использования того обстоятельства, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\varphi(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma=\overline{\varphi(0)}=\bar{\alpha}_0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma=\overline{\psi(0)}=\overline{\beta_0},\text{[1]}$$

условия (28) приводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma+\overline{\beta_0}=A(z),\\ \psi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(z)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-z}\,d\sigma+\overline{\alpha_0}=B(z).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Первое уравнение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение для $\varphi(z)$. Совместно с условием $\varphi(0)=\alpha_0$ оно вполне определяет функцию $\varphi(z)$, если задана мнимая часть отношения $\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$. В состав его входит неизвестная постоянная $\overline{\beta_0}=\overline{\psi(0)}$. Мы помним, однако, что одну из величин α_0 и β_0 мы можем задавать произвольно, поэтому при его решении мы могли бы произвольно фиксировать $\overline{\beta_0}$ вместо того, чтобы считать $\alpha_0=0$, как это мы обычно делали.

Из (30) легко получается интегральное уравнение, относящееся к граничным значениям $\varphi'(z)$. Для нас выгоднее сначала преобразовать (30) с тем, чтобы устранить особенность ядра.

В силу равенства

$$\frac{\omega(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{d\sigma}{\sigma-z}=\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}\,\omega(z),$$

мы можем первое уравнение (30) переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-z)}\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma+k\omega(z)+\bar{\beta}_0=A(z),\\ k=\overline{\varphi'(0)}:\overline{\omega'(0)}.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

[1]) См. сноску на стр. 621.

Полученное равенство содержит член $k\omega(z)$, существенно связанный через k со значением $\varphi'(z)$ в центре круга, и из него не может быть получено путем предельного перехода на окружность уравнение, относящееся исключительно к контурным значениям функции $\varphi'(z)$. Чтобы избегнуть этого, введем вместо $\varphi(z)$ новую неизвестную функцию $\varphi_0(z)$, связанную с ней равенством:

$$\varphi(z) = -k\omega(z) + \varphi_0(z). \tag{32}$$

В правой части оба члена неизвестны, ибо мы не знаем не только функцию $\varphi_0(z)$, но и число k. После того как будет найдена $\varphi_0(z)$, мы должны будем подобрать число k сообразно требованию $k = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}$.

Подставляя (32) в (31) мы, ввиду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\sigma - z}\, d\sigma = 0,$$

придем к равенству:

$$\varphi_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma - z)}\, \overline{\varphi'_0(\sigma)}\, d\sigma + \overline{\beta_0} = A(z). \tag{33}$$

Дифференцируя по z, получим:

$$\varphi'_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\sigma - z}\right\} \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\, d\sigma = A'(z),$$

откуда, устремляя z к произвольной точке z_0 окружности, получим после предельного перехода для $\varphi'_0(z_0)$ интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$\varphi'_0(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} K(z_0, \sigma)\, \overline{\varphi'_0(\sigma)}\, d\sigma = A'(z_0), \tag{34}$$

ядро которого

$$K(z_0, \sigma) = \frac{\omega(\sigma) - \omega(z_0) - (\sigma - z_0)\,\omega'(z_0)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma - z_0)^2} \tag{35}$$

при наших предположениях о контуре L будет ограниченным, ибо при $\sigma \to z_0$ оно будет стремится к

$$K(z_0, z_0) = \frac{1}{2}\,\frac{\omega''(z_0)}{\overline{\omega'(z_0)}}.$$

Ввиду единственности решения задачи теории упругости, уравнение (34) должно также иметь единственное решение.

Допустим, что мы каким-либо путем нашли $\varphi'_0(\sigma)$. Построим по нему $\varphi_0(z)$, определив надлежащим образом постоянную $\varphi_0(0)$; так,

если мы считаем, что $\varphi(0)=0$ и при преобразовании сохраняется начало координат, т. е. $\omega(0)=0$, нужно считать $\varphi_0(0)=0$.

Составляем затем функцию

$$\varphi(z)=-kw(z)+\varphi_0(z),$$

считая постоянную k неопределенной. Ее мы должны подобрать по условию $k=\overline{\varphi'(0)}:\overline{\omega'(0)}$. Это даст

$$k+\bar{k}=\frac{\overline{\varphi'_0(0)}}{\overline{\omega'(0)}}=2\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}, \tag{36}$$

что возможно лишь в том случае, когда отношение $\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$ будет равно вещественному числу. Таким образом, равенство:

$$I\left[\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}\right]=0$$

будет условием возможности решения проблемы. Оно, очевидно, должно свестись к требованию равенства нулю момента внешних действующих сил. Мы не станем этого проверять.

Из уравнения (36) можно найти только вещественную часть k; мнимая же часть остается произвольной.

Особенно просто решается проблема в том случае, когда отображающая функция будет рациональной. Мы имеем в виду остановиться на простейшем случае, когда $\omega(z)$ — полином, и предлагаем читателю, пожелавшему ознакомиться с вопросом в его общей постановке, обратиться к упоминавшейся уже несколько раз книге акад. Н. И. Мусхелишвили [4] (стр. 261).

Итак, пусть

$$\omega(z)=\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_n z^n.$$

Само собой разумеется, излагаемое нами сейчас будет лишь формой отличаться от того, что мы излагали в n° 1, развивая метод бесконечных систем уравнений.

Отношение

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{z}\right)},$$

обращающееся в $\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}$ при $z=\sigma$, имеет при $|z|\geqslant 1$ разложение вида

$$\frac{\omega(z)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{z}\right)}=\delta_n z^n+\ldots+\delta_1 z+\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{-\nu}z^{-\nu}.$$

Для решения проблемы нет необходимости вычислять все коэффициенты δ_ν; достаточно найти только $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.

Функциональное уравнение (30) для $\varphi(z)$, если в нем заменить σ на $\frac{1}{\sigma}$, примет следующий вид:

$$\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\frac{\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma-z}d\sigma+\beta_0=A(z).$$

Функция

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta-z},$$

так как $|z|<1$, голоморфна по ζ вне единичного круга, и интеграл поэтому равен вычету этой функции в бесконечно далекой точке, взятому с обратным знаком, т. е. равен коэффициенту при $\frac{1}{\zeta}$ в разложении этой функции около $\zeta=\infty$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots,\\ \overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)&=\overline{\alpha}_1+\frac{2\overline{\alpha}_2}{\zeta}+\frac{3\overline{\alpha}_3}{\zeta^2}+\ldots+\frac{n\overline{\alpha}_n}{\zeta^{n-1}}+\ldots,\\ \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)&=k_n\zeta^n+k_{n-1}\zeta^{n-1}+\ldots+k_1\zeta+k_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}k_{-\nu}\zeta^{-\nu},\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}k_n&=\overline{\alpha}_1\delta_n,\\ k_{n-1}&=\overline{\alpha}_1\delta_{n-1}+2\overline{\alpha}_2\delta_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ k_2&=\overline{\alpha}_1\delta_2+2\overline{\alpha}_2\delta_3+\ldots+(n-1)\overline{\alpha}_{n-1}\delta_n,\\ k_1&=\overline{\alpha}_1\delta_1+2\overline{\alpha}_2\delta_2+\ldots+n\overline{\alpha}_n\delta_n.\end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\frac{z^2}{\zeta^3}+\ldots$$

Поэтому искомый коэффициент будет:

$$k_0+k_1z+k_2z^2+\ldots+k_nz^n.$$

Подставив это в последнее уравнение для $\varphi(z)$, получим сразу же готовое выражение для нее:

$$\varphi(z)+\overline{\beta}_0+k_0+k_1z+k_2z^2+\ldots+k_nz^n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{F(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma,\tag{38}$$

которое содержит, правда, пока еще неизвестные величины $\overline{\beta}_0, k_0, \ldots, k_n$, но нахождение их уже не представит затруднений. Разлагая интеграл в правой части равенства по степеням z, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{F(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}F(\sigma)\,\sigma^{-\nu-1}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}F(\sigma)\,e^{-i\nu\vartheta}\,d\vartheta.$$

Сравним теперь коэффициенты при $z^0, z^1, z^2, \ldots, z^n$ в (38):

$$\overline{\beta}_0 + k_0 = A_0,$$
$$\alpha_\nu + k_\nu = A_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha_\nu = A_\nu \quad (\nu = n+1, n+2, \ldots).$$

Развертывая средние n уравнений, получим систему линейных уравнений для определения первых n коэффициентов α_ν:

$$\alpha_1 + \overline{\alpha}_1\delta_1 + \ldots + n\overline{\alpha}_n\delta_n = A_1,$$
$$\alpha_2 + \overline{\alpha}_1\delta_2 + \ldots + (n-1)\overline{\alpha}_{n-1}\delta_n = A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n + \overline{\alpha}_1\delta_n = A_n,$$

построенную нами также в n° 1.

После того как найдена $\varphi(z)$, функцию $\psi(z)$ можно найти, пользуясь равенством (14), которое, в силу (37), принимает вид:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-z}d\sigma - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)}{\omega'(z)}\varphi'(z) + \frac{\overline{k}_1}{z} + \frac{\overline{k}_2}{z^2} + \ldots + \frac{\overline{k}_n}{z^n}.$$

Обратимся к случаю бесконечной области B. При условии соответствия нуля единичного круга $|z| \leqslant 1$ и бесконечно далекой точки области B, отображающая функция будет:

$$\omega(z) = \frac{\gamma}{z} + \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots = \frac{\gamma}{z} + \omega_0(z).$$

Как нами выяснено выше, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют вид:

$$\varphi(z) = \frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + \frac{B\gamma}{z} + \varphi_0(z),$$

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + (B' + iC')\frac{\gamma}{z} + \psi_0(z),$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ голоморфны и должны удовлетворять на границе $z=\sigma$ условию:

$$\varphi_0(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi_0'(\sigma)}+\overline{\psi_0(\sigma)}=F_0(\sigma).$$

$F_0(\sigma)$ имеет известное значение (18).

Поэтому прежде всего интегралы типа Коши $A(z)$ и $B(z)$ в правых частях уравнений (28) должны быть замены соответственно на

$$A_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{F_0(\sigma)}{\sigma-z}\,d\sigma,\qquad B_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{F_0(\sigma)}}{\sigma-z}\,d\sigma. \tag{39}$$

Далее, ввиду $\omega'(0)=\infty$, $k=\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}=0$, член $k\omega(z)$ в уравнении (31) пропадает, и оно примет вид:

$$\varphi_0(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z)}\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma+\bar{\beta}_0=A_0(z). \tag{40}$$

Наконец,

$$\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\sigma-z}=\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(z)}{\sigma-z}-\frac{\gamma}{\sigma z},$$

и так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{d\sigma}{\sigma}=0,$$

что видно из того обстоятельства, что разложение интегрируемой функции по степеням σ не содержит свободного члена, равенство (40) можно записать следующим образом:

$$\varphi_0'(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(z)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z)}\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma+\bar{\beta}_0=A_0(z). \tag{41}$$

Отсюда дифференцированием и предельным переходом на окружность получаем интегральное уравнение для $\varphi_0'(z)$:

$$\varphi_0'(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}K_0(z_0,\sigma)\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma=A_0'(z_0), \tag{42}$$

где

$$K_0(z_0,\sigma)=\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(z_0)-(\sigma-z_0)\,\omega_0'(z_0)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-z_0)^2}.$$

Рассмотрим частный случай, когда отображающая функция будет:

$$\omega(z)=\frac{\gamma}{z}+\gamma_0+\gamma_1 z+\ldots+\gamma_n z^n.$$

Здесь

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\delta_{n-2}\zeta^{n-2}+\ldots+\delta_1\zeta+\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{-\nu}\zeta^{-\nu}.$$

Поэтому при $|\zeta|=1$

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi_0'(\zeta)}=k_{n-2}^{(0)}\zeta^{n-2}+\ldots+k_1^{(0)}\zeta+k_0^{(0)}+\sum_{\nu=0}^{\infty}k_{-\nu}^{(0)}\zeta^{-\nu},$$

где

$$k_{n-2}^{(0)}=\bar{\alpha}_1\delta_{n-2},$$

$$k_{n-3}^{(0)}=\bar{\alpha}_1\delta_{n-3}+2\bar{\alpha}_2\delta_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_1^{(0)}=\bar{\alpha}_1\delta_1+2\bar{\alpha}_2\delta_2+\ldots+(n-2)\,\bar{\alpha}_{n-2}\delta_{n-2}.$$

Интеграл в левой части уравнения (31) будег, следовательно, равен:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)-\omega(z)}{\overline{\omega'}(\bar{\sigma})(\sigma-z)}\overline{\varphi_0'(\sigma)}d\sigma=k_0^0+k_1^{(0)}z+\ldots+k_{n-2}^{(0)}z^{n-2},$$

и само уравнение принимает форму:

$$\varphi_0(z)+\bar{\beta}_0+k_0^{(0)}+k_1^{(0)}z+\ldots+k_{n-2}^{(0)}z^{n-2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{F_0(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma.$$

Коэффициенты же $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ определятся из системы:

$$\alpha_1+\bar{\alpha}_1\delta_2+2\bar{\alpha}_2\delta_2+\ldots+(n-2)\,\bar{\alpha}_{n-2}\delta_{n-2}=A_1^{(0)},$$

$$\alpha_2+\bar{\alpha}_1\delta_2+2\bar{\alpha}_2\delta_3+\ldots+(n-3)\,\bar{\alpha}_{n-3}\delta_{n-2}=A_2^{(0)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-2}+\bar{\alpha}_1\delta_{n-2}=A_{n-2}^{(0)},$$

$$A_\nu^{(0)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_0(\sigma)\,e^{-i\nu\vartheta}\,d\vartheta.$$

4. Вторая основная задача. Приведение к функциональным уравнениям. Ввиду большой аналогии между функциональными уравнениями для первой и второй основных задач, мы коротко остановимся только на ограниченных областях.

Умножив контурные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} - \psi(\sigma) = \Phi(\sigma),^{1)} \\ &\overline{\varkappa\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = \overline{\Phi(\sigma)} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - z}$ и проинтегрировав вдоль единичной окружности, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa\varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \overline{\beta}_0 = C(z), \\ &-\psi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma + \overline{\alpha}_0\varkappa = D(z), \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$C(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma, \quad D(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma.$$

Пользуясь соотношением:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{d\sigma}{\sigma - z} = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}} = k,$$

преобразуем первое из уравнений к следующему:

$$\varkappa\varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma) - \omega(z)}{\sigma - z}\cdot\frac{\overline{\varphi'(\omega)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma - k\omega(z) - \overline{\beta}_0 = C(z). \tag{45}$$

Введем новую неизвестную функцию $\varphi_0(z)$, определенную равенством:

$$\varkappa\varphi_0(z) = \varkappa\varphi(z) - k\omega(z).$$

Подставив в равенство (45) вместо $\varphi(z)$ ее значение, получим следующее уравнение для $\varphi_0(z)$:

$$\varkappa\varphi_0(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\omega(\sigma) - \omega(z)}{\sigma - z}\,\frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma - \overline{\beta}_0 = C(z).$$

---

[1]) Напомним, что под $\varkappa$ мы понимаем величину:

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},$$

причем λ и μ есть положительные постоянные, зависящие от упругих свойств изучаемого тела. Отсюда ясно, что $\varkappa$ всегда положительная величина.

Отсюда дифференцированием и предельным переходом на контур круга найдем интегральное уравнение для контурных значений $\varphi_0'(z)$:

$$\varkappa\varphi_0'(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} K(z_0, \sigma)\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma = C'(z_0). \qquad (46)$$

После нахождения из (46) $\varphi_0'(z_0)$ и восстановления по ней функции $\varphi_0(z)$, мы должны еще найти число k. Так как $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \frac{k}{\varkappa}\omega(z)$, то для k получаем уравнение:

$$k - \frac{\overline{k}}{\varkappa} = \frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\overline{\omega'(0)}},$$

которое, ввиду $\varkappa \neq \pm 1$, всегда разрешимо относительно k.

ГЛАВА VII

МЕТОД ШВАРЦА

§ 1. Метод Шварца решения задачи Дирихле для случая суммы двух областей

1. Метод Шварца в общем случае. Исследование сходимости. В шестидесятых годах прошлого столетия Шварцем был развит метод решения задачи Дирихле для гармонических функций, названный им „альтернирующим“. Этот метод заключается в следующем: пусть в плоскости $z=x+iy$ даны две области B_1 и B_2. Мы будем считать, что они налегают друг на друга, и назовем B' общую часть этих областей (пересечение областей B_1 и B_2 в смысле теории множеств). Будем считать известным, как решается задача Дирихле для гармонических функций в каждой из областей B_1 и B_2 при любых непрерывных или кусочно-непрерывных граничных данных. Шварц показал, как путем последовательного решения задач для каждой из областей мы можем решить задачу Дирихле для области B, получающейся от соединения обеих заданных областей (суммы областей B_1 и B_2).

Как именно строятся приближения к решению задачи Дирихле в $B=B_1+B_2$ путем решения этой задачи в каждой из слагаемых областей, мы покажем ниже.

Для нас важно отметить, что метод Шварца позволяет по известным решениям задачи Дирихле для сравнительно узкого класса частных областей, комбинируя эти области, получать решения для областей все более и более сложной природы. Он дает, по крайней мере принципиально, неограниченную возможность расширения классов областей, для которых может быть построено явное решение первой граничной задачи.

По своей идее, а в некоторых случаях и по вычислениям, метод Шварца сравнительно прост, но, несмотря на это, он не получил достаточного распространения, и до сих пор случаи его приложения к решению практических задач единичны.[1])

---

[1]) С. Л. Соболев [2] и С. Г. Михлин [1].

Сам Шварц и многие последующие авторы, продолжавшие его работы, рассматривали применение альтернирующего метода к уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и решали при помощи его первую граничную задачу Дирихле. Но было совершенно ясно, что этот метод применим к нахождению функций, удовлетворяющих не только уравнению Лапласа, но и более общим уравнениям, и не только к первой основной задаче, когда на границе области задаются значения искомой функции, но и к задачам с более сложными предельными условиями.

В настоящем номере мы рассмотрим основания метода Шварца для первой граничной задачи в теории дифференциальных уравнений второго порядка общего вида.[1])

Рассмотрим уравнение в частных производных вида:

$$F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1}$$

Пусть B есть некоторая область плоскости $z = x + iy$, ограниченная контуром L, и $f(M)$ есть кусочно-непрерывная функция, заданная в точках M контура L.[2])

Под первой граничной задачей, или задачей Дирихле, для уравнения (1) мы понимаем следующую задачу:

Найти функцию $u(x, y)$, подчиненную требованиям: 1) $u(x, y)$ ограничена в B; 2) внутри B u удовлетворяет уравнению (1); 3) в каждой точке M непрерывности $f(M)$ u имеет предельные значения, равные значению $f(M)$ в этой точке.

Относительно самого уравнения (1) мы сделаем следующие предположения.

Предположение 1. *Пусть D — любая область плоскости xy. Две функции $u(x, y)$ и $u^*(x, y)$, удовлетворяющие в области D уравнению* (1), *ограниченные и имеющие одинаковые предельные значения на границе области D, исключая, может быть, конечное множество точек, равны между собой всюду в D.*

Будем считать, что для уравнения (1) в областях B_1 и B_2 существует решение задачи Дирихле при любых кусочно-непрерывных значениях $u(x, y)$ на границах L_1 и L_2.

---

[1]) Мы говорили здесь о дифференциальных уравнениях только потому, что предлагаемая книга посвящена их решению. Для метода Шварца совершенно несущественно, будут ли изучаемые функции удовлетворять дифференциальному или какому-либо иному уравнению. Существенным является тот факт, что рассматриваемый класс функций удовлетворяет пяти требованиям, перечисляемым ниже. Поэтому полученный нами результат будет иметь силу не только для дифференциальных уравнений, но и для задач другого рода всюду, где выполняются наши требования.

[2]) Здесь и ниже функцию мы называем кусочно-непрерывной, если она ограничена и имеет конечное число точек разрыва.

Назовем $\bar{\alpha}$ часть границы L_1 области B_1, лежащую внутри B_2, и α — оставшуюся часть L_1. Аналогично назовем $\bar{\beta}$ часть границы области L_2, лежащую внутри B_1, и β — оставшуюся часть.

Для упрощения последующих рассуждений мы всюду ниже будем считать, что α, $\bar{\alpha}$, β и $\bar{\beta}$ состоят из конечного числа дуг жордановых кривых.

Границей суммы $B = B_1 + B_2$ заданных областей, очевидно, будет $\alpha + \beta$.

Допустим, что в точках границы L области B задана кусочно-непрерывная функция $f(M)$, и поставим перед собой задачу найти в этой области решение уравнения (1) при граничном условии

$$u(x, y) = f(M) \text{ на } L. \tag{2}$$

Сейчас мы дадим описание альтернирующего процесса Шварца, позволяющего построить последовательные приближения к решению задачи в B_1 и B_2.

Доказательство сходимости последовательных приближений и того, что предельная функция удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2), потребует от нас, разумеется, дальнейших предположений об уравнении (1). Их мы укажем ниже, когда будем исследовать этот вопрос.

Начнем с области B_1. Граничные значения здесь заданы только на части α ее контура L_1. Зададим произвольно на $\bar{\alpha}$ функцию $\varphi(M)$, подчинив ее единственному условию, чтобы вместе со значениями $f(M)$ на α она давала бы кусочно-непрерывную функцию на всем контуре облаcти B_1.

Построим функцию $u_1(x, y)$, решающую задачу Дирихле для уравнения (1) в B_1 при граничном условии:

$$u_1(x, y) = \begin{cases} f(M) \text{ на } \alpha, \\ \varphi(M) \text{ на } \bar{\alpha}. \end{cases} \tag{3}$$

Ее примем за первое приближение к $u(x, y)$ в B_1. По найденной $u_1(x, y)$ построим функцию $v_1(x, y)$, решающую в B_2 задачу Дирихле при граничных условиях:

$$v_1(x, y) = \begin{cases} f(M) \text{ на } \beta, \\ u_1(x, y) \text{ на } \bar{\beta}; \end{cases} \tag{4}$$

$v_1(x, y)$ есть первое приближение к $v(x, y)$ в B_2. По $v_1(x, y)$ строим второе приближение $u_2(x, y)$ к $u(x, y)$ в B_1 как решение задачи Дирихле для (1) при граничном условии:

$$u_2(x, y) = \begin{cases} f(M) \text{ на } \alpha, \\ v_1(x, y) \text{ на } \bar{\alpha} \end{cases}$$

и т. д.

k-е приближения $u_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$ к $u(x, y)$ в областях B_1 и B_2 мы определим через предыдущие приближения как решения задач Дирихле при граничных требованиях:

$$u_k(x, y) = \begin{cases} f(M) \text{ на } \alpha, \\ v_{k-1}(x, y) \text{ на } \overline{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_k(x, y) = \begin{cases} f(M) \text{ на } \beta, \\ u_k(x, y) \text{ на } \overline{\beta}. \end{cases}$$

В каждой из областей B_1 и B_2 мы построили последовательности приближений к искомому решению $u(x, y)$:

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y), \ldots \text{ в } B_1, \\ v_1(x, y), v_2(x, y), \ldots, v_n(x, y), \ldots \text{ в } B_2. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Займемся исследованием сходимости последовательностей (5) и определим, будут ли предельные функции удовлетворять уравнению (1) и нужным нам граничным требованиям. Это нам удастся сделать при некоторых ограничительных предположениях об уравнении (1).

Предположение II. *Пусть D есть некоторая область плоскости xy с контуром Γ, $u(x, y)$, $u^*(x, y)$ — две ограниченные функции, удовлетворяющие уравнению* (1) *в области D и имеющие на границе ее некоторые предельные значения, исключая, может быть, конечное число точек. Будем считать, что если на контуре Γ выполнено условие:*

$$u^*(x, y) \geqslant u(x, y),$$

то и всюду в области D будет

$$u^*(x, y) \geqslant u(x, y).$$

Предположение III. *В D дана последовательность решений уравнения* (1):

$$u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y), \ldots$$

Будем эту последовательность считать монотонно возрастающей или убывающей, т. е. такой, что при всяких x и y из D и при любых n выполняется либо неравенство

$$u_{n+1}(x, y) \geqslant u_n(x, y),$$

либо неравенство

$$u_{n+1}(x, y) \leqslant u_n(x, y).$$

Кроме того, мы допустим, что функции $u_n(x, y)$ ограничены в совокупности:

$$|u_n(x, y)| \leqslant M.$$

Наша последовательность, ввиду ее монотонности и ограниченности будет сходиться всюду в D:

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x, y) = u(x, y).$$

Мы будем считать, и в этом состоит третье предположение, что, *предельная функция также удовлетворяет всюду внутри области уравнению* (1). Короче говоря, мы считаем, что *предел всякой монотонной и ограниченной последовательности решений уравнения* (1) *есть также решение уравнения* (1).

Предположение IV. Его мы выскажем в ограничительной форме, относящейся к узкому классу дифференциальных уравнений.

Пусть $u(x, y)$ есть решение уравнения (1) *в области D, ограниченное и имеющее на Γ всюду, исключая, может быть, конечное число точек, предельные значения. Мы предположим, что $u(x, y)$ не может иметь внутри D ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Иначе говоря, если для всех предельных значений $u(x, y)$ на границе Γ области D выполняются неравенства*

$$-h \leqslant u(x, y) \leqslant +g \qquad (h, g \geqslant 0),$$

то всюду внутри D будут выполняться неравенства:

$$-h \leqslant u(x, y) \leqslant +g.$$

Предположение V. Рассмотрим некоторую дугу γ, являющуюся частью границы Γ области D. Пусть на γ будет дана непрерывная функция $f(M)$ и P есть внутренняя точка дуги γ. Рассмотрим ограниченное решение $u(x, y)$ уравнения (1). Мы предположим, что *если $u(x, y)$ имеет во всех точках дуги γ, исключая, может быть, только точку P, граничные значения, равные $f(M)$, то при приближении точки (x, y) к P $u(x, y)$ будет также иметь предельное значение, причем это предельное значение будет равно как раз $f(P)$.*

Идея наших дальнейших рассуждений состоит в следующем. Мы построим для последовательностей (5) особого рода мажорантные и минорантные последовательности и покажем, что они будут сходиться к одним и тем же пределам. Отсюда будет ясно, что к тем же пределам будут сходиться и последовательности (5).

Начнем с построения превосходящей последовательности. Обозначим через m точную верхнюю границу значений, принимаемых $|\varphi(M)|$ на $\overline{\alpha}$ и $f(M)$ на L:

$$m = \max[\sup|\varphi(M)|; \ \sup f(M)],$$

и построим, решая задачи Дирихле в B_1 и B_2, последовательности функций $u_n^+(x, y)$ и $v_n^+(x, y)$ по правилу:

$$u_1^+(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \alpha, \\ m & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_1^+(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \beta, \\ u_1^+(x, y) & \text{на } \bar{\beta}; \end{cases}$$

. . . .

$$u_n^+(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \alpha, \\ v_{n-1}^+(x, y) & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_n^+(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \beta, \\ u_n^+(x, y) & \text{на } \bar{\beta}; \end{cases}$$

Покажем сейчас, что $u_n^+(x, y) \geqslant u_n(x, y)$ и $v_n^+(x, y) \geqslant v_n(x, y)$. В самом деле, по выбору граничных значений для $u_1^+(x, y)$, на L_1 всюду $u_1^+(x, y) \geqslant u_1(x, y)$. Но тогда, по второму предположению, всюду в области B_1 будет:

$$u_1^+(x, y) \geqslant u_1(x, y),$$

в частности, на $\bar{\beta}$ $v_1^+(x, y) = u_1^+(x, y) \geqslant u_1(x, y) = v_1(x, y)$ и так как на β $v_1^+ = v_1 = f(M)$, то всюду на границе L_2 области B_2 $v_1^+ \geqslant v_1$. В силу того же предположения везде в области B_2 будет

$$v_1^+(x, y) \geqslant v_1(x, y).$$

Продолжая эти рассуждения дальше, мы установим, что в B_1 или соответственно в B_2 выполняются неравенства:

$$u_n^+(x, y) \geqslant u_n(x, y) \quad \text{или} \quad v_n^+(x, y) \geqslant v_n(x, y).$$

Аналогично строится минорантная последовательность. Определим $u_n^-(x, y)$, $v_n^-(x, y)$ условиями:

$$u_1^-(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \alpha, \\ -m & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_1^-(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \beta, \\ u_1^-(x, y) & \text{на } \bar{\beta}; \end{cases}$$

. . . .

$$u_n^-(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \alpha, \\ v_{n-1}^-(x, y) & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_n^-(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \beta, \\ u_n^-(x, y) & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Такими же рассуждениями, как и в случае превосходящих функций u_n^+ и v_n^+, можно показать, что для u_n^- и v_n^- выполняются соответственно в областях B_1 и B_2 неравенства:

$$u_n^-(x,y) \leqslant u_n(x,y), \quad v_n^-(x,y) \leqslant v_n(x,y).$$

Теперь исследуем сходимость обеих вспомогательных последовательностей. Рассмотрим сначала мажорантную последовательность. По выбору числа m, граничные значения $u_1^+(x,y)$ на L_1 не превосходят m. Поэтому, в силу четвертого предположения, всюду внутри B_1 $u_1^+(x,y) \leqslant m$. В частности, $u_1^+(x,y) \leqslant m$ на $\bar{\beta}$. Граничные значения $v_1^+(x,y)$, равные $f(M)$ на β и $u_1^+(x,y)$ на $\bar{\beta}$, будут также не больше m. Следовательно, $v_1^+(x,y) \leqslant m$ везде в B_2. В частности, это неравенство будет выполняться на $\bar{\alpha}$. Сравним между собой граничные значения $u_1^+(x,y)$ и $u_2^+(x,y)$. На α они совпадают и равны $f(M)$, на $\bar{\alpha}$ $u_2^+(x,y) = v_1^+(x,y) \leqslant m$, а $u_1^+(x,y) = m$. Следовательно, всюду на границе L_1 $u_1^+(x,y) \geqslant u_2^+(x,y)$. По третьему предположению $u_1^+(x,y)$ будет больше $u_2^+(x,y)$ везде в B_1:

$$u_1^+(x, y) \geqslant u_2^+(x, y).$$

Отсюда и из граничных условий:

$$v_2^+(x, y) - v_1^+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u_2^+(x, y) - u_1^+(x, y) & \text{на } \bar{\beta}; \end{cases}$$

. . . .

$$u_{n+1}^+(x, y) - u_n^+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ v_n^+(x, y) - v_{n-1}^+(x,y) & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_{n+1}^+(x, y) - v_n^+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u_{n+1}^+(x, y) - u_n^+(x, y) & \text{на } \bar{\beta}, \end{cases}$$

пользуясь вторым предположением, последовательно можно вывести следующие неравенства:

$$u_1^+(x, y) \geqslant u_2^+(x, y) \geqslant \ldots,$$
$$v_1^+(x, y) \geqslant v_2^+(x, y) \geqslant \ldots,$$

устанавливающие монотонное убывание последовательностей u_n^+ и v_n^+. Аналогично, из того факта, что решение уравнения (1) не может иметь отрицательного минимума внутри области можно прийти к заключению о монотонном возрастании последовательностей u_n^- и v_n^-:

$$u_1^-(x, y) \leqslant u_2^-(x, y) \leqslant \ldots ,$$
$$v_1^-(x, y) \leqslant v_2^-(x, y) \leqslant \ldots$$

Раньше мы видели, что $u_n^+ \geqslant u_n \geqslant u_n^-$, и, следовательно,

$$u_n^+(x, y) \geqslant u_1^-(x, y),$$

также

$$v_n^+(x, y) \geqslant v_1^-(x, y).$$

Таким образом, оказывается, что последовательности u_n^+ и v_n^+ — монотонно убывающие и ограничены снизу. Они будут сходится соответственно в областях B_1 и B_2 к некоторым решениям уравнения (1):

$$\lim_{n \to \infty} u_n^+(x, y) = u^+(x, y),$$

$$\lim_{n \to \infty} v_n^+(x, y) = v^+(x, y).$$

Покажем теперь, что в общей части $B' = B_1 B_2$ областей B_1 и B_2 обе предельные функции совпадают:

$$u^+(x, y) = v^+(x, y),$$

и, следовательно, функция $v^+(x, y)$ будет продолжением $u^+(x, y)$ из B_1 в область B_2. Кроме того, мы покажем, что продолженная таким образом функция $u^+(x, y)$ будет решением нашей предельной задачи в области $B = B_1 + B_2$.

На $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ функции $u_n^+(x, y)$ и $v_n^+(x, y)$ связаны соотношениями:

$$u_n^+(x, y) = v_{n-1}^+(x, y) \text{ на } \overline{\alpha},$$

$$u_n^+(x, y) = v_n^+(x, y) \text{ на } \overline{\beta}.$$

Если здесь перейти к пределу при $n \to \infty$, то будет ясно, что $u^+(x, y)$ и $v^+(x, y)$ имеют одинаковые значения на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$.[1])

---

[1]) Рассуждения, показывающие возможность предельного перехода в равенствах, приведенных в тексте, имеют некоторые особенности, и поэтому мы указываем их в кратких чертах.

Пусть точка M лежит на $\overline{\alpha}$. Рассмотрим неравенство $u^+(x, y) \leqslant u_n^+(x, y)$ и устремим в нем точку (x, y) к M:

$$\overline{\lim_{(x, y) \to M}} u^+(x, y) \leqslant \lim_{(x, y) \to M} u_n^+(x, y) = v_{n-1}^+(M).$$

Это неравенство верно при всяких n. Перейдем в нем к пределу при $n \to \infty$:

$$\overline{\lim_{(x, y) \to M}} u^+(x, y) \leqslant v^+(M). \qquad (*)$$

Построим, далее функцию $u^*(x, y)$, решая задачу Дирихле в B_1 при граничном условии

$$u^*(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \alpha, \\ v^+(x, y) & \text{на } \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь поведение их на α и β. Возьмем любую внутреннюю точку M части α, в которой функция $f(M)$ непрерывна. Мы знаем, что

$$u_1^+(x, y) \geqslant u^+(x, y) \geqslant u_1^-(x, y),$$

когда точка (x, y) стремится к точке M, и $u_1^+(x, y)$ и $u_1^-(x, y)$ будут стремиться к $f(M)$ по их построению. Поэтому и $u^+(x, y)$ будет также стремиться к $f(M)$, когда точка $(x, y) \to M$.

То же самое можно сказать и о $v^+(x, y)$. Граница B' состоит из $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ и может быть еще некоторой общей части α и β, которую мы назовем γ. На рис. 63 изображен случай, когда B_1 и B_2 есть два налегающих прямоугольника $ACDH$ и $BCEF$. Здесь $\bar{\alpha}$ есть отрезок DG и $\bar{\beta}$ — отрезок BG. B' есть прямоугольник $BCDG$. Граница его состоит из α, β, а затем точки G и ломаной BCD, являющихся общей частью α и β. В частных случаях может оказаться, что γ состоит из нескольких точек, которые являются концами дуг кривых, входящих в $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Когда точка (x, y) приближается к внутренней точке части $\bar{\alpha}$ или $\bar{\beta}$ границы B', $u^+(x, y)$ и $v^+(x, y)$ будут стремиться к одному и тому же пределу. Совершенно так же $u^+(x, y)$ и $v^+(x, y)$ будут стремиться к одному и тому же пределу, когда (x, y) будет приближаться к внутренней точке γ, не являющейся местом разрыва $f(M)$. Мы ничего не можем сказать о предельных значениях $u^+(x, y)$ и $v^+(x, y)$ в точках разрыва $f(M)$ на γ (таких точек конечное число) и в точках, являющихся концами дуг кривых, образующих $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ (их также конечное число). Таким образом, $u^+(x, y)$ и $v^+(x, y)$ имеют одинаковые граничные значения всюду на границе B', исключая, может быть, конечное число точек. По предположению I, отсюда следует, что везде в области B'

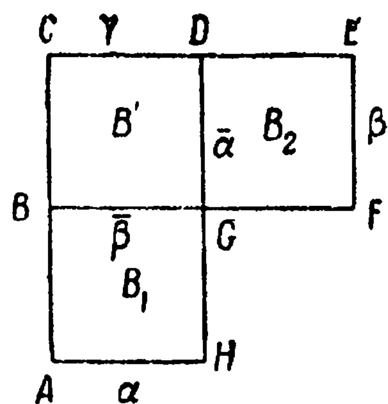


Рис. 63.

$$u^+(x, y) = v^+(x, y).$$

Функция $v^+(x, y)$ является продолжением $u^+(x, y)$ из области B_1 в область B_2. Кроме того, из рассуждений ясно, что продолженное

На $\bar{\alpha}$ $v_{n-1}^+(x, y) \geqslant v^+(x, y)$. Поэтому на всей границе L_1 $u_n^+(x, y) \geqslant u^*(x, y)$.

По второму предположению везде в B_1 $u_n^+(x, y) \geqslant u^*(x, y)$. Отсюда видно, что $u^+(x, y) \geqslant u^*(x, y)$. Когда точка (x, y) приближается к M, из этого неравенства видно, что

$$\underline{\lim}_{(x, y) \to M} u^+(x, y) \geqslant \lim_{(x, y) \to M} u^*(x, y) = v^+(M).$$

Последнее же совместимо с (*) только в том случае, когда $u^+(x, y)$ имеет в точке M предельное значение, равное $v^+(x, y)$.

таким образом решение $u^+(x, y)$ на границе области $B = B_1 + B_2$ будет иметь заданные предельные значения $f(M)$, исключая, может быть, конечное число точек, которые являются концами дуг кривых, входящих в состав $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, и мест разрыва $f(M)$.

Аналогично можно показать, что минорантные последовательности $u_n^-(x, y)$ и $v_n^-(x, y)$ сходятся в областях B_1 и B_2 к некоторым предельным функциям, которые будут решениями уравнения (1):

$$\lim_{n\to\infty} u_n^-(x, y) = u^-(x, y),$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n^-(x, y) = v^-(x, y).$$

При этом предельные функции будут совпадать в общей части B' областей B_1 и B_2 и решение уравнения $v^-(x, y)$ будет, следовательно, продолжением решения $u^-(x, y)$ из B_1 в B_2. Наконец, продолженная функция $u^-(x, y)$ будет на границе области B принимать заданные значения $f(M)$, исключая, может быть, конечное число точек разрыва $f(M)$ и концов дуг, образующих $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$.

Продолженные решения $u^+(x, y)$ и $u^-(x, y)$ на границе L имеют одинаковые значения, за исключением, может быть, конечного числа точек. Но тогда они должны совпадать всюду в B:

$$u^+(x, y) = u^-(x, y) = u(x, y).$$

Итак, оказывается, что мажорантные и минорантные последовательности u_n^+, v_n^+ и u_n^-, v_n^- сходятся соответственно в B_1 и B_2 к одному и тому же решению $u(x, y)$. Отсюда ясно, что построенные нами первоначальные последовательные приближения (5) u_n и v_n будут сходиться к тому же решению $u(x, y)$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u(x, y) \text{ в } B_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n(x, y) = u(x, y) \text{ в } B_2.$$

Нам осталось проверить, что предельная функция $u(x, y)$ дает решение поставленной задачи Дирихле в области B, т. е. во всякой точке непрерывности $f(M)$ $u(x, y)$ имеет граничное значение на L, равное $f(M)$. Во всех точках непрерывности $f(M)$, не являющихся концами дуг из $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, $u(x, y)$ имеет граничные значения, равные $f(M)$, как это мы видели раньше. Нам осталось только проверить, что если точка P есть конец какой-либо дуги из $\overline{\alpha}$ или $\overline{\beta}$ и если в этой точке $f(M)$ непрерывна, то при приближении к этой точке $u(x, y)$ будет стремиться к $f(P)$. Таких точек — конечное множество. Так как точек разрыва $f(M)$ также конечное число, то около каждой точки P найдется такая часть границы L, которая содержит внутри себя

точку P и не содержит ни одной точки разрыва $f(M)$ и ни одного конца дуг $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ кроме P.

Для всех точек M этой дуги, исключая, может быть, лишь точку P, $u(x, y)$ будет стремиться к $f(M)$, когда точка (x, y) приближается к M. По предположению V, то же будет и в точке P. Этим доказано, что $u(x, y)$ будет иметь на L всюду нужные граничные значения и является, следовательно, искомым решением задачи Дирихле в B.

Сделаем еще одно дополнительное замечание о последнем, пятом, предположении. Мы им воспользовались в конце рассуждений при доказательстве того, что предельная функция $u(x, y)$ принимает в концах дуг $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ заданные значения. Оно будет излишним, если допустить существование решения задачи Дирихле в области B и исследовать только вопрос о сходимости процесса Шварца и доказательство того, что предельная функция будет совпадать с решением, существование которого предположено.

В самом деле, из первых четырех предположений вытекает, что построенные по Шварцу последовательные приближения u_n и v_n сходятся к некоторой предельной функции $u(x, y)$, которая будет удовлетворять уравнению (1) и принимать значения, равные $f(M)$ во всех точках границы L области B, исключая, может быть, только точки разрыва $f(M)$ и концы дуг, входящих в $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$. Во всяком случае граничные значения $u(x, y)$, за исключением конечного числа точек, совпадают с граничными значениями искомого решения задачи Дирихле. По первому из предположений мы можем сказать, что предельная функция $u(x, y)$ будет тождественно равна искомому решению всюду внутри B.

2. Случай линейного уравнения эллиптического типа. Оценка быстроты сходимости процесса Шварца для уравнения Лапласа. Мы рассмотрим сейчас возможность применения альтернирующего метода Шварца к решению уравнения Дирихле для линейных уравнений эллиптического типа. Для упрощения рассуждений ограничимся исследованием уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-q(x, y)\,u=0, \tag{6}$$

хотя результаты остаются в силе для уравнений более общего вида, чем (6).

О коэффиценте $q(x, y)$ мы предположим, что он неотрицателен и непрерывен:

$$q(x, y)\geqslant 0. \tag{7}$$

Получим сейчас одно соотношение для функций, удовлетворяющих уравнению (6), которое будет полезно нам в дальнейшем.

Выберем в области B произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и опишем около нее круг радиуса R, лежащий в области D.

Уравнение (6) мы можем рассматривать как уравнение Пуассона $\Delta u = q(x, y) u$ со свободным членом $q(x, y) u$. Всякое решение его представимо в форме суммы двух функций $u = v + w$, первая из которых v удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta v = 0$ и принимает на границе области те же значения, что и u, вторая же w является решением уравнения Пуассона $\Delta w = q(x, y) u$ и обращается в нуль на границе области.

В круге, построенном нами, v может быть представлена интегралом Пуассона [гл. VI, § 2, (1)]. Если ввести полярные координаты r, φ с полюсом в M_0 и с полярной осью, параллельной оси x, так что

$$x = x_0 + r\cos\varphi; \quad y = y_0 + r\sin\varphi,$$

то интеграл Пуассона будет иметь вид:

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + R\cos\psi, y_0 + R\sin\psi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\psi.$$

Функция w может быть представлена [см. гл. VI, § 2, (27)] через функцию Грина для круга при помощи следующего интеграла:

$$w(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^R qu\ln\frac{|R^2 - \bar{t}z|}{R|t - z|}\,\rho\,d\rho\,d\psi, \quad t = \rho e^{i\psi}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Поэтому функция $u(x, y)$ в круге может быть представлена следующей суммой двух интегралов:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\psi - \\ - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^R qu\ln\frac{|R^2 - \bar{t}z|}{R|t - z|}\,\rho\,d\rho\,d\psi. \quad (8)$$

Интегральное уравнение (8) для функции u в круге равносильно тому факту, что она в этом круге удовлетворяет дифференциальному уравнению (6).

Из этого уравнения видно также, что на окружности круга u принимает значения равные тем, которые стоят под знаком интеграла Пуассона. Но $u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)$ может быть задана произвольно и, по существу, никаких ограничений на граничные значения u уравнение (8), следовательно, не налагает.

Чтобы установить, будет ли применим метод Шварца к уравнению (6), мы должны проверить, что для него выполняются все предположения, которые мы сформулировали в n° 1.

Мы начнем с четвертого из них и покажем, что при соблюдении условия (7) решение уравнения (6) не может внутри области иметь ни положительных максимумов, ни отрицательных минимумов.[1] Случай отрицательного минимума приводится к случаю положительного максимума путем умножения $u(x, y)$ на -1, и поэтому нам достаточно установить отсутствие у $u(x, y)$ положительных максимумов внутри D.

Рассмотрим ту часть области D, где $u(x, y) > 0$, и будем считать, что круг радиуса R, построенный нами выше, принадлежит этой части. В формуле (8), так как при всяких z и t, по модулю меньших R, $\frac{|R^2 - \bar{t}z|}{R\,|t-z|} > 1$, функция, стоящая под знаком двойного интеграла, будет не отрицательной. Поэтому $u(x, y)$ не будет превосходить функцию, представляемую интегралом Пуассона. Рассмотрим $u(x, y)$ в центре круга и положим $r = 0$. Тогда получим:

$$u(x_0, y_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0 + R\cos\psi,\ y_0 + R\sin\psi)\, d\psi.$$

Это последнее неравенство говорит о том, что значение $u(x, y)$ в центре круга будет не больше, чем среднее арифметическое ее значение на окружности круга. Отсюда легко получается нужный нам результат. В самом деле, допустим, что $u(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет положительный максимум. Мы всегда можем считать его собственным в том смысле, что в любой окрестности точки M_0 найдутся значения $u(x, y)$, меньшие $u(x_0, y_0)$. Заменим в последнем неравенстве интегрируемую функцию $u(x_0 + R\cos\psi,\ y_0 + R\sin\psi)$ на $u(x_0, y_0)$. Так как она нигде не больше $u(x_0, y_0)$ и окружность мы всегда можем выбрать так, чтобы на ней нашлись точки, в которых интегрируемая функция будет меньше, чем $u(x_0, y_0)$, то при такой замене правая часть неравенства увеличится, и мы после замены будем иметь:

$$u(x_0, y_0) < \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(x_0, y_0)\, d\psi = u(x_0, y_0).$$

---

[1]) Для читателя, знакомого с теорией подгармонических функций, этот факт является очевидным. Известно, что если функция $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема, то признаком ее подгармоничности является неотрицательность операции Лапласа от нее: $\Delta u \geqslant 0$. Поэтому в тех частях плоскости, где $u \geqslant 0$, функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta u \equiv qu$, будет подгармонической и там, где $u \leqslant 0$, — надгармонической. Кроме того, известно, что подгармоническая функция не может иметь внутри области максимумов, а надгармоническая функция — минимумов. Поэтому функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta u = qu$, не может иметь внутри области ни положительных максимумов, ни отрицательных минимумов.

Последнее неравенство, очевидно, является невозможным. Таким образом, предположение о том, что $u(x, y)$ имеет положительный максимум, приводит к невозможному следствию и должно быть отброшено.

В частном случае отсюда вытекает, что если $u(x, y)$ обращается в нуль на контуре области, то и всюду внутри области $u(x, y) = 0$. В самом деле, если допустить, что $u(x, y)$ не будет тождественным нулем внутри D, то $u(x, y)$ должна была бы внутри D иметь либо положительный максимум, либо отрицательный минимум, чего не может быть.

Теперь проверим предположение I. Пусть $u(x, y)$ и $u^*(x, y)$ суть два решения, ограниченные в D и принимающие на границе Γ одинаковые значения, за исключением, может быть, конечного множества точек. Мы должны показать, что $u(x, y) = u^*(x, y)$ всюду в D.

Каждую из этих функций разложим на два слагаемых по следующему правилу.

Положим $u = v + w$, где w удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta w = qu$ и обращается в нуль во всех точках контура Γ, а v есть функция гармоническая: $\Delta v = 0$. При этом видно, что v во всех точках Γ, где u имеет предельные значения, также будет иметь предельные значения, равные предельным значениям u.[1])

Совершенно так же положим

$$u^* = v^* + w^*,$$

где v^* и w^* обладают аналогичными свойствами.

Рассмотрим теперь разность между u и u^*:

$$u - u^* = (v - v^*) + (w - w^*).$$

Разность $v - v^*$ есть гармоническая в D функция, которая принимает на L, исключая, может быть, конечное множество точек, значения, равные нулю. Легко видеть, кроме того, что она ограничена. Действительно, так как u и u^* ограничены по предположению, $u - u^*$ будет ограничена. Функции w и w^* непрерывны в D, включая и границу Γ; поэтому они обе будут ограничены в D. Отсюда видно, что $v - v^* = (u - u^*) - (w - w^*)$ будет ограниченной функцией. Но известно, что если гармоническая функция ограничена и на контуре области принимает значения, равные нулю, за исключением, может быть, конечного множества точек, то она тождественно равна

---

[1]) В наших рассуждениях здесь и несколькими страницами ниже мы предполагаем возможность такого разложения. Иначе говоря, мы считаем, что уравнение Пуассона $\Delta w = q(x, y)u$ имеет решение, обращающееся в нуль на контуре Γ. Мы не будем заниматься исследованием этого вопроса и отметим только, что для существования нужного решения достаточно потребовать, чтобы $q(x, y)$ удовлетворяла условию Липшица с каким-либо показателем, и область D была такой, чтобы для нее существовала функция Грина. Для подавляющего большинства практически встречающихся задач оба эти требования будут, наверное, выполняться.

нулю всюду в D: [1])

$$v - v^* = 0$$

и, значит,

$$u(x, y) - u^*(x, y) = w(x, y) - w^*(x, y).$$

Интересующая нас функция $u - u^*$ как разность двух функций, имеющих всюду на контуре Γ предельные значения, равные нулю, равна нулю на всем контуре. С другой стороны, она, очевидно, будет решением уравнения (6). Несколькими строками выше мы говорили о том, что решение уравнения (6), обращающееся в нуль на границе области, должно быть равно нулю и внутри области. Следовательно,

$$u(x, y) = u^*(x, y),$$

и для уравнения (6) выполняется предположение I.

Обратимся к предположению II. Пусть $u(x, y)$ и $u^*(x, y)$ суть решения уравнения (6), удовлетворяющие на границе Γ области D условию

$$u(x, y) \geqslant u^*(x, y).$$

Мы должны показать, что тогда всюду в D $u(x, y) \geqslant u^*(x, y)$. Возьмем разность между ними $u - u^*$. Она удовлетворяет уравнению (6) и на Γ $u - u^* \geqslant 0$. Если бы внутри области D она принимала отрицательные значения, то внутри области она должна была бы иметь отрицательный минимум, чего не может быть, и, стало быть, всюду в D должно быть $u - u \geqslant 0^*$

---

[1]) Наиболее просто в этом убедиться можно путем следующих рассуждений. Будем считать для простоты D односвязной и совершим конформное преобразование ее на единичный круг. Рассмотрим в D гармоническую функцию U. Пусть будет известно, что она ограничена и при приближении к любой точке Γ, за исключением некоторого конечного множества точек, стремится к нулю. Мы должны показать, что она равна нулю всюду в D.

После преобразования она перейдет в некоторую функцию U_1, определенную в круге, ограниченную и имеющую всюду на окружности, исключая конечное множество точек, предельные значения, равные нулю.

Возьмем круг радиуса $R < 1$ и представим в нем функцию U_1 интегралом Пуассона

$$U_1(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U_1(R, \psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi.$$

Фиксируем как-либо r и φ и будем увеличивать R до единицы. Ядро Пуассона будет стремиться к $\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \psi) + r^2}$, функция $U_1(R, \psi)$, за исключением конечного множества значений ψ, будет стремиться к нулю. Ввиду ограниченности $U_1(R, \psi)$, можно будет переходить к пределу под знаком интеграла. Поэтому ясно, что в пределе интеграл даст нуль и, следовательно, при любых r и φ

$$U_1(r, \varphi) = 0.$$

Проверим предположение III о том, что предел любой монотонной и ограниченной последовательности решений уравнения (6) есть также решение уравнения (6). Пусть в D дана монотонная и равномерно ограниченная последовательность решений (6)

$$u_1(x, y),\ u_2(x, y),\ \ldots,\ u_n(x, y),\ \ldots$$

Предельную функцию этой последовательности назовем $u(x, y)$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u(x, y).$$

Нам нужно показать, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (6).

Возьмем в D любую точку $M_0(x_0, y_0)$ и опишем около нее как около центра круг радиуса R, целиком лежащий внутри D. Применим к u_n равенство (8):

$$u_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_n \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, d\psi -$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^R q u_n \ln\frac{|R^2 - \bar{t}z|}{R|t - z|}\, \rho\, d\rho\, d\psi.$$

Перейдем здесь к пределу при $n\to\infty$. Так как u_n равномерно ограничены, допустимым является предельный переход под знаком интеграла. В пределе мы получим, что для предельной функции $u(x, y)$ выполняется равенство (8). При выводе же равенства (8) мы отмечали, что соблюдение его равносильно выполнению уравнения (6). Следовательно, предельная функция действительно удовлетворяет уравнению (6).

Наконец, последнее предположение V. Возьмем дугу γ, лежащую на границе Γ области D. Пусть на ней дана непрерывная функция $f(M)$ и P — какая-то внутренняя точка γ. Рассмотрим ограниченное решение $u(x, y)$ уравнения (6) в D и допустим, что при приближении к любой точке M дуги, за исключением P, $u(x, y)$ будет стремиться к $f(M)$. Мы должны показать, что тогда при приближении к точке P также будет

$$\lim_{(x, y)\to M} u(x, y) = f(P).$$

На помощь здесь нам вновь придет тот факт, что соответствующее предположение для гармонических функций известно. Разложим взятое нами решение u на два слагаемых

$$u = v + w,$$

где w удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta w = qu$ и при приближении к контуру Γ всюду стремится к нулю, а v есть гармоническая

функция. Относительно нее можно сказать, что во всех точках M, где u имеет предельные значения, v также будет иметь предельные значения, причем они будут равны предельным значениям u. В частности, на дуге γ v будет иметь во всех точках, за исключением, может быть, P, предельные значения, равные $f(M)$. Кроме того, v ограничена, так как u ограничена по предположению, а w ограничена ввиду ее непрерывности в D вплоть до контура Γ. Если v удовлетворяет указанным свойствам, то тогда можно утверждать, что при приближении точки (x, y) к P v будет стремиться к $f(P)$. [1])

Но так как при приближении к любой точке контура Γ w будет стремиться к нулю, мы можем утверждать, что

$$\lim_{(x, y) \to P} u(x, y) = f(P).$$

Итак, оказывается, что для уравнения (6) выполняются все пять предположений, достаточных для сходимости альтернирующего метода Шварца.

---

[1]) Это получается на основании следующей теоремы. Пусть $u(x, y)$ гармоническая и ограниченная в D. На границе Γ области дана непрерывная функция $f(M)$ и известно, что, исключая, может быть, точку P, $\lim\limits_{(x, y) \to M} u(x, y) = f(M)$. Тогда $u(x, y) \to f(P)$ при приближении к точке P.

Теорема может быть доказана путем следующих рассуждений. Будем для упрощения считать D односвязной и совершим конформное преобразование ее на единичный круг. Функция $f(M)$ перейдет в некоторую функцию $F(M)$, определенную в точках окружности. Изображение точки P назовем P'. Функция $u(x, y)$ перейдет в функцию $U(x, y)$, ограниченную и гармоническую в круге. При приближении к любой точке окружности, исключая, может быть, P', $U(x, y)$ будет стремиться к $F(M)$.

Если совершить предельный переход, подобный тому, который мы делали в предыдущей сноске, можно показать, что $U(x, y)$ представима интегралом Пуассона:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, d\psi.$$

Значения $U(\psi)$, принимаемые функцией $U(x, y)$ на окружности круга, которые стоят под знаком интеграла, равны $F(M)$ везде, за исключением, может быть, одной точки P'. Не изменяя величины интеграла, мы можем в него вместо $U(\psi)$ поставить $F(M)$:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(M) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, d\psi.$$

Из теории интеграла Пуассона известно, что если $F(M)$ непрерывна в какой-либо точке окружности, то при приближении к этой точке интеграл стремится к значению $F(M)$ в этой точке. В частности, так как $F(M)$ непрерывна в точке P', при приближении (x, y) к P' $U(x, y)$ будет стремиться к $F(P')$.

До настоящего времени мы установили лишь самый факт сходимости последовательных приближений, построенных по Шварцу, к решению задачи в сумме двух областей и не занимались вопросом оценки быстроты сходимости этих приближений. Разумеется, быстрота сходимости будет зависеть, во-первых, от того, какое уравнение рассматривается, и, во-вторых, от геометрических свойств областей, в которых строятся последовательные приближения.

Мы произведем сейчас оценку быстроты сходимости для уравнения Лапласа. В основание ее положим следующую лемму, принадлежащую Шварцу.

Пусть D есть плоская область, ограниченная контуром Г. Возьмем на Г две простых[1]) точки P и Q и будем считать, что существуют касательные к Г в этих точках. Проведем в области D любую кривую C, соединяющую точки P и Q. Относительно нее мы предположим, что она имеет касательные в своих концах P и Q, не совпадающие с касательными к контуру Г в этих точках.

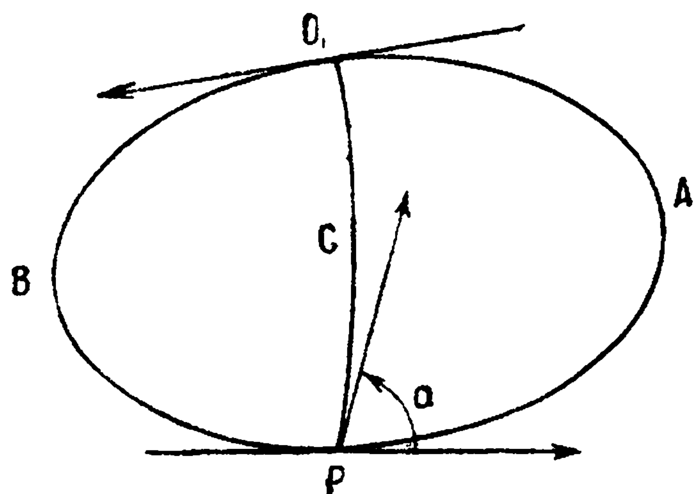


Рис. 64.

Кроме того, мы будем считать, что проведенное нами сечение PQ области разделяет ее на две новых области. Назовем через A и B части Г, на которые он разлагается проведенным сечением (рис. 64).

Пусть u есть гармоническая функция, имеющая на части A предельные значения, равные нулю, а на части B — предельные значения, не превосходящие по абсолютной величине некоторого числа m. Тогда утверждается, что существует такое положительное число $\vartheta < 1$, зависящее только от геометрических свойств области D и кривой C и не зависящее от выбора функций u и числа m, что на кривой C имеет место оценка

$$|u| \leqslant \vartheta m.$$

При доказательстве леммы мы можем ограничиться случаем $m = 1$, так как иначе могли бы вместо u рассмотреть функцию $\frac{u}{m}$.

Введем функцию U, гармоническую и ограниченную в D, имеющую на A граничные значения, равные нулю, а на B — равные единице.

На контуре Г области D выполнено неравенство

$$-U \leqslant u \leqslant +U.$$

[1]) В n°2 § 1 пятой главы мы говорили о том, какие точки контура называются кратными. Всякая некратная точка контура называется простой.

По принципу максимума мы можем утверждать, что то же неравенство выполнено и внутри D. Иначе говоря, что всюду в D

$$|u| \leqslant U.$$

Всюду внутри D функция U меньше единицы. В частности, это будет и во всех внутренних точках кривой C. Мы докажем лемму Шварца, если убедимся в том, что при приближении к точкам P и Q вдоль кривой C U будет стремиться к пределам меньшим, нежели 1.

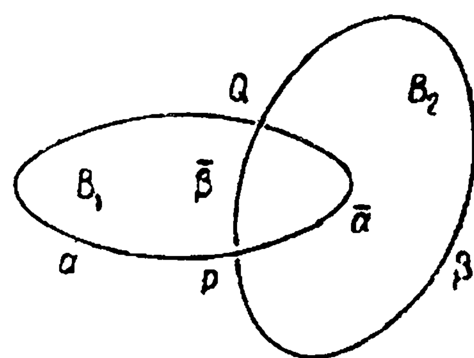


Рис. 65.

Введем полярные координаты r и φ с полюсом в P и направим полярную ось по касательной к Г в сторону A. Возьмем ту ветвь угла φ, которая стремится к нулю при приближении к P вдоль Г со стороны A. Направление отсчета полярного угла выберем так, чтобы при приближении к точке P вдоль Г со стороны B полярный угол стремился к значению $+\pi$.

Функция $\frac{\varphi}{\pi}$ будет регулярной гармонической в D и будет принимать на Г непрерывные значения, исключая точку P, где она будет иметь скачок, равный единице. Функция $U - \frac{\varphi}{\pi} = v$ будет гармонической в D. Ее граничные значения непрерывны вблизи точки P и стремятся к нулю при приближении к этой точке. Мы можем, следовательно, сказать, что при приближении к этой точке P по любому пути из D, в частности и по C, v будет стремиться к нулю.

Но если мы будем приближаться к P вдоль C, то, так как касательная к C в P отлична от касательной к Г в этой точке, принятой за полярную ось, угол φ будет стремиться к некоторому положительному пределу, меньшему π. На нашем чертеже предельное значение угла названо α. Поэтому U при приближении к P вдоль C будет стремиться к пределу $\frac{\alpha}{\pi}$, лежащему между нулем и единицей. То же самое можно сказать и о точке Q. Этим лемма доказана.

Мы сохраним ниже обозначения n°1. Пусть даны две области B_1 и B_2, ограниченные контурами L_1 и L_2 и налегающие друг на друга (рис. 65). Часть L_1, лежащую внутри B_2, как и раньше, обозначим $\bar{\alpha}$ и оставшуюся часть L_1 обозначим α; часть L_2, лежащую внутри B_1, назовем $\bar{\beta}$ и остальную часть β. Для упрощения рассуждений мы будем считать, что $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ состоят каждая из одной дуги. Концы $\bar{\alpha}$ назовем $P_{\bar{\alpha}}$ и $Q_{\bar{\alpha}}$, а концы $\bar{\beta}$ — $P_{\bar{\beta}}$, $Q_{\bar{\beta}}$. Дуга $\bar{\alpha}$ будет некоторой кривой, лежащей в области B_2, соединяющей точки $P_{\bar{\alpha}}$ и $Q_{\bar{\alpha}}$. Аналогичное можно сказать о $\bar{\beta}$.

Для случая, изображенного на чертеже, $P_{\bar{\alpha}}$ и $Q_{\bar{\alpha}}$ совпадают соответственно с $P_{\bar{\beta}}$ и $Q_{\bar{\beta}}$ и обозначены P и Q.

Мы будем предполагать, что концы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ являются простыми точками контуров B_1 и B_2 и что в этих точках существуют касательные к L_1 и L_2, наклоненные друг к другу под углом, отличным от 0 и π.

Допустим, что вдоль границы $L=\alpha+\beta$ области $B=B_1+B_2$ даны кусочно-непрерывные граничные значения $f(M)$. Дополним их какими-либо кусочно-непрерывными значениями $\varphi(M)$ на $\bar{\alpha}$. Следуя Шварцу, мы построим дальше в областях B_1 и B_2 последовательные приближения (5) к решению задачи Дирихле в B, решая граничные задачи по условиям (3) и (4) из n° 1.

Решение задачи Дирихле в B при граничных значениях $u|_L=f(M)$, мы будем считать существующим и обозначим его $u(x, y)$. [1]) Нас будет интересовать только оценка разностей $u-u_n$ и $u-v_n$. Эти разности последовательно могут быть вычислены одна за другой путем решения следующих задач Дирихле в областях B_1 и B_2: $u(x, y)-u_1(x, y)$ регулярна в B_1 и на L_1 имеет граничные значения:

$$u-u_1=\begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ u-\varphi(M) & \text{на } \bar{\alpha}. \end{cases}$$

Разность $u-v_1$ регулярна в B_2 и на L_2 принимает значения:

$$u-v_1=\begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u-u_1 & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Разности $u-u_n$ и $u-v_n$ регулярны соответственно в B_1 и B_2 и получаются из предыдущих разностей путем решения задач Дирихле при граничных условиях:

$$u-u_n=\begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ u-v_{n-1} & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases} \qquad u-v_n=\begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u-u_n & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Применим к оценке всех разностей лемму Шварца. Выберем m настолько большим, чтобы было $|f|\leqslant m$ и $|\varphi|\leqslant m$. По выбору m, всюду в B $|u(x, y)|\leqslant m$.

Гармоническая функция $u-u_1$ на α принимает граничные значения, равные нулю, а на $\bar{\alpha}$ — значения, оцениваемые следующим образом: $|u-u_1|\leqslant 2m$. На основании леммы, найдется число $\vartheta<1$,

[1]) Существование решения задачи Дирихле в области B следует из предположения о существовании решения задачи Дирихле в B_1 и B_2, как это видно из рассуждений n° 1 настоящего параграфа.

зависящее только от геометрической конфигурации B_1 и B_2, такое, что на дуге $\overline{\beta}$ будет иметь место оценка

$$|u - u_1| \leqslant 2M\vartheta_1.$$

Точно так же гармоническая функция $u - v_1$ принимает на β значения, равные нулю, а ее значения на $\overline{\beta}$ оцениваются так: $|u - v_1| = |u - u_1| \leqslant 2M\vartheta_1$. По этой же лемме должно найтись число $\vartheta_2 < 1$ такое, что на $\overline{\alpha}$ будет:

$$|u - v_1| \leqslant 2M\vartheta_1 \cdot \vartheta_2.$$

Продолжая эти оценки дальше, мы докажем справедливость неравенств

$$|u - u_n| \leqslant 2M\vartheta_1^n \vartheta_2^{n-1} \text{ на } \overline{\beta}; \quad |u - v_n| \leqslant 2M\vartheta_1^n\vartheta_2^n \text{ на } \overline{\alpha}.$$

Отсюда легко получаются оценки изучаемых разностей в областях B_1 и B_2. По построению, $u - u_n$ принимает на α значения, равные нулю, значения же ее на $\overline{\alpha}$ по только что написанным неравенствам оцениваются так: $|u - u_n| = |u - v_{n-1}| \leqslant 2M\vartheta_1^{n-1}\vartheta_2^{n-1}$. По принципу максимума везде внутри B_1 должно быть

$$|u - u_n| \leqslant 2M\vartheta_1^{n-1}\vartheta_2^{n-1}.$$

Аналогично для $u - v_n$ в B_1 получим оценку

$$|u - v_n| \leqslant 2M\vartheta_1^n\vartheta_2^{n-1}.$$

Оба последних неравенства говорят о том, что разности между решением задачи u и последовательными приближениями u_n и v_n, построенными по Шварцу, убывают не медленнее членов геометрической прогрессии с знаменателем $q = \vartheta_1\vartheta_2$.

3. Приведение метода Шварца к решению системы интегральных уравнений последовательными приближениями. До сих пор мы занимались изучением сходимости последовательных приближений, построенных по Шварцу, и совершенно не затрагивали вопроса о методах эффективного построения самих приближений u_n и v_n. Мы остановимся сейчас на одном из таких методов, основанном на сведении нашей задачи к решению системы интегральных уравнений типа Фредгольма.

Сохраним здесь обозначения n° 1. Для построения пары приближений $u_{n+1}(x, y)$ и $v_{n+1}(x, y)$ в областях B_1 и B_2 по предыдущей паре u_n и v_n, как это видно из равенств (4) n° 1, достаточно знать u_n и v_n соответственно на $\overline{\beta}$ и $\overline{\alpha}$. Отсюда ясно, что для нахождения всех последовательных приближений u_n и v_n достаточно уметь находить их значения только на $\overline{\beta}$ и $\overline{\alpha}$.

Пусть для областей B_1 и B_2 известны функции Грина $G_1(x, y; \xi, \eta)$ и $G_2(x, y; \xi, \eta)$. Через них и через граничные значения функция $u(x, y)$, решающая задачу Дирихле в B, имеет следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= -\int_{L_1} u(\xi, \eta)\frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n}\,ds \text{ в } B_1,\\ u(x, y) &= -\int_{L_2} u(\xi, \eta)\frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n}\,ds \text{ в } B_2,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где n — внешняя нормаль к контурам L_1 и L_2 в точке (ξ, η).

Разложим интегралы по L_1 и L_2 на суммы интегралов по α, $\overline{\alpha}$ и β, $\overline{\beta}$. Примем во внимание, что граничные значения $u(x, y)$ на α и β известны и равны $f(M)$ и, стало быть, интегралы по α и β дадут известные функции, которые мы обозначим так:

$$F_1(x, y) = -\int_{\alpha} f(M)\frac{\partial G_1}{\partial n}\,ds;\quad F_2(x,y) = -\int_{\beta} f(M)\frac{\partial G_2}{\partial n}\,ds. \tag{10}$$

$F_1(x, y)$ есть функция, гармоническая в B_1, граничные значения которой на α равны $f(M)$ и на $\overline{\alpha}$ равны нулю. Совершенно так же $F_2(x, y)$ — гармоническая в B_2 и принимающая на β значения, равные $f(M)$ и на $\overline{\beta}$ — значения, равные нулю.

Будем считать, что в первом из равенств (9) точка (x, y) лежит на $\overline{\beta}$ и во втором — на $\overline{\alpha}$. Тогда для неизвестных нам значений функции $u(x, y)$ на $\overline{\beta}$ и $\overline{\alpha}$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= F_2(x, y) - \int_{\overline{\beta}} u(\xi, \eta)\frac{\partial G_2}{\partial n}\,ds \text{ на } \overline{\alpha},\\ u(x, y) &= F_1(x, y) - \int_{\overline{\alpha}} u(\xi, \eta)\frac{\partial G_1}{\partial n}\,ds \text{ на } \overline{\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

По самому смыслу задачи $u(x, y)$ должна принимать ограниченные значения на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, и поэтому искомые нами значения должны давать ограниченное решение системы (11). Возьмем теперь, наоборот, любое ограниченное решение системы (11) и покажем, что оно доставляет нужные нам значения гармонической функции на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$.

Обозначим через $u^*(M)$ и $v^*(M)$ функции, определенные в точках $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, удовлетворяющие системе (11). Построим по ним соот-

ветственно в областях B_1 и B_2 функции

$$u(x, y) = F_1(x, y) - \int_{\overline{\alpha}} u^*(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds,$$

$$u(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\overline{\beta}} v^*(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds.$$

Функция $u(x, y)$ — гармоническая в B и принимает на границе значения:

$$u(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \alpha, \\ u^*(M) & \text{на } \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Аналогично, v — гармоническая в B_2, и значения, принимаемые ею на L_2, будут:

$$v(x, y) = \begin{cases} f(M) & \text{на } \beta, \\ v^*(M) & \text{на } \overline{\beta}. \end{cases}$$

Далее, они ограничены, так как под знаком интеграла множителями при нормальной производной от функции Грина стоят ограниченные функции.

Можно видеть, что в общей части областей B_1 и B_2 функции u и v совпадают. Чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что u и v принимают одинаковые значения на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$. А это будет наверное так, в силу того, что u^* и v^* удовлетворяют системе (11). В самом деле, значения $v(x, y)$ на $\overline{\alpha}$ равны

$$F_2(x, y) - \int_{\overline{\beta}} v^*(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds \qquad (x, y) \in \overline{\alpha}.$$

Но в силу первого уравнения (11):

$$u^*(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\overline{\beta}} v^*(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds,$$

и, следовательно, на $\overline{\alpha}$ $v(x, y) = u^* = u(x, y)$. Также можно установить, что $v(x, y) = u(x, y)$ на $\overline{\beta}$.

Таким образом, в общей части B_1 и B_2 построенные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ совпадают и, стало быть, $v(x, y)$ является продолжением $u(x, y)$ из B_1 в B_2. Кроме того, из написанных выше граничных значений для u и v видно, что продолженная функция $u(x, y)$ будет на всей границе L области B принимать заданные значения.

Отсюда, между прочим, вытекает, что система (11) может иметь только одно ограниченное решение, так как если бы их было несколько, то для каждого из них мы смогли бы построить решение

задачи Дирихле в B. При этом ясно, что решения задачи Дирихле, отвечающие различным решениям системы (11), будут различными. Мы получили бы несколько различных ограниченных решений задачи Дирихле в B, чего не может быть.

Отметим, что в некоторых случаях кроме указанного ограниченного решения система (11) может иметь еще и неограниченное решение. Можно видеть, и на этом мы не будем останавливаться, что соответствующие такому неограниченному решению функции u и v будут иметь особенности в концах дуг $\overline{\alpha}$ или $\overline{\beta}$.

Для практических вычислений факт существования неограниченного решения для системы (11) не является существенным. Мы покажем позже, что если эту систему решать методом последовательных приближений, то с каких бы ограниченных исходных значений ни начинать, в пределе всегда получим ограниченное решение системы (11).

Сейчас мы установим, что решение системы (11) последовательными приближениями по существу есть не что иное, как применение метода Шварца к задаче Дирихле в области B.

Для облегчения записи обозначим искомые значения $u(x, y)$ на $\overline{\beta}$ через v. Значения же, которые принимает она на $\overline{\alpha}$, по-прежнему назовем u. Система (11) тогда примет форму:

$$\left.\begin{aligned} u &= F_2(x, y) - \int_{\overline{\beta}} v\frac{\partial G_2}{\partial n}\,ds \text{ на } \overline{\alpha}, \\ v &= F_1(x, y) - \int_{\overline{\alpha}} u\frac{\partial G_1}{\partial n}\,ds \text{ на } \overline{\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (11_1)$$

Зададим теперь для u на $\overline{\alpha}$ произвольные ограниченные и кусочно-непрерывные значения $u_1 = \varphi(M)$. Подставим их вместо u в правую часть второго уравнения (11_1), и полученную функцию на $\overline{\beta}$ примем за первое приближение v_1 для v. С точки зрения задачи Дирихле, как это видно из (10) и строения второго члена правой части, наши вычисления означают, что мы находим в области B_1 гармоническую функцию

$$u_1(x, y) = F_1(x, y) - \int_{\overline{\alpha}} \varphi(M)\frac{\partial G_1}{\partial n}\,ds$$

как решение задачи Дирихле при граничном условии:

$$u_1(x, y) = \begin{cases} f(M) \text{ на } \alpha, \\ \varphi(M) \text{ на } \overline{\alpha} \end{cases}$$

и затем определяем ее значения на $\overline{\beta}$. Они и дают v_1.

Найдя функцию v_1, подставляем ее в правую часть первого уравнения (11_1), и полученную после подстановки на дуге $\bar{\alpha}$ функцию принимаем за второе приближение u_2 к u.

С точки зрения гармонических функций наши вычисления означают, что мы в B_2 строим гармоническую функцию

$$v_1(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\bar{\beta}} v_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} ds$$

по граничным значениям:

$$v_1(x, y) = \begin{cases} f(M) \text{ на } \beta, \\ v_1 \text{ на } \bar{\beta} \end{cases}$$

и определяем ее значения u_2 на $\bar{\alpha}$ и т. д. Совершенно ясно, что получаемые нами при таком процессе последовательные приближения u_1, v_1, u_2, $v_2, \ldots$ к u и v будут как раз те, которые получаются по методу Шварца, описанному в n° 1.

В nn° 1 и 2 мы показали, что процесс Шварца сходится к решению задач Дирихле, с каких бы ограниченных и кусочно-непрерывных значений $\varphi(M)$ для u (x, y) на $\bar{\alpha}$ мы ни начинали вычисления. Поэтому метод последовательных приближений для системы (11) будет сходиться к ограниченному решению этой системы, с какого бы ограниченного и кусочно-непрерывного исходного приближения $\varphi(M)$ для u на $\bar{\alpha}$ мы ни начинали вычисления.

В практических вычислениях, разумеется, нет нужды вычислять обе серии последовательных приближений $u_1, u_2, \ldots$; $v_1, v_2, \ldots$ к обеим искомым функциям u и v. Одну из этих функций можно исключить и вычислять поэтому только одну серию последовательных приближений. Исключим, например, v. Для этой цели подставим вместо v ее значение из второго уравнения системы (11_1) в первое. После подстановки получим следующее уравнение с одной только неизвестной функцией:

$$u = F(x, y) + \int_{\bar{\alpha}} u\, k(x, y;\ \xi, \eta)\, ds. \tag{12}$$

Здесь (x, y) — координаты любой фиксированной точки на $\bar{\alpha}$, (ξ, η) — координаты переменной точки по кривой интегрирования $\bar{\alpha}$,

$$F(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\bar{\beta}} F_1(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds$$

и

$$k(x, y; \xi, \eta) = \int_{\bar{\beta}} \frac{\partial G_2(x, y; \xi_1, \eta_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial G_1(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial n} ds_1.$$

Уравнение (12) решается далее обычным способом последовательных приближений. После того, как будет найдена u, функцию v можно восстановить, пользуясь вторым из уравнений (11_1).

§ 2. Метод Шварца — Неймана решения задачи Дирихле для случая пересечения двух областей

1. Описание метода и исследование сходимости последовательных приближений. В § 1 мы изложили метод Шварца решения задачи Дирихле в области, которая является суммой двух областей, если известно, как решается эта задача для каждой отдельно из слагаемых областей. Как заметил Нейман [1], сходный порядок идей может быть применен для решения задачи Дирихле в области, которая является общей частью (пересечением в теоретико-множественном смысле) двух других областей, налегающих друг на друга.

Мы изложим сейчас идею метода. Однако мы не будем ограничиваться рассмотрением только уравнения Лапласа, как это делал Нейман, и будем иметь в виду произвольное линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое удовлетворяет перечисляемым ниже требованиям. Возьмем уравнение вида:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0, \qquad (1)$$

пусть D есть некоторая область плоскости xy, ограниченная контуром Γ.

Мы будем считать, что для уравнения (1) выполняются следующие условия, аналогичные тем, которые мы формулировали в § 1.

I. *Если две ограниченные функции $u(x, y)$, $u^*(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1) в D и имеют на контуре Γ области D одинаковые предельные значения, исключая, может быть, конечное множество точек, то они совпадают между собой:*

$$u(x, y) = u^*(x, y) \text{ всюду в } D.$$

II. *Решение уравнения (1) не может иметь внутри области регулярности ни положительного максимума, ни отрицательного минимума, иначе говоря, если $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в D и если на контуре Γ области выполнено неравенство*

$$-h \leqslant u(x, y) \leqslant +g \qquad (h, g \geqslant 0),$$

то и всюду внутри D

$$-h \leqslant u(x, y) \leqslant +g.$$

Отметим одно следствие, вытекающее отсюда. Пусть $u(x, y)$ и $u^*(x,y)$ суть два решения уравнения (1) и пусть на Γ $u(x,y) \geqslant u^*(x,y)$. Тогда всюду внутри D $u(x, y) \geqslant u^*(x, y)$. Действительно, ввиду линейности и однородности (1) разность $u(x, y) - u^*(x, y)$ будет решением уравнения, и так как на Γ $u(x, y) - u^*(x, y) \geqslant 0$ по условию, то и везде в D

$$u(x, y) - u^*(x, y) \geqslant 0.$$

III. *Предел монотонной и ограниченной последовательности решений уравнения (1) есть также решение уравнения (1).*

IV. Пусть $u(x, y)$ ограничена и удовлетворяет в области D уравнению (1). Рассмотрим дугу γ, являющуюся частью границы Γ области D; допустим, что на ней дана непрерывная функция $f(M)$, и P есть внутренняя точка γ. Мы предположим, что *если $u(x, y)$ имеет во всех точках M дуги γ, исключая, может быть, точку P, граничные значения, равные $f(M)$, то при приближении (x, y) к P $u(x, y)$ будет также стремиться к предельному значению, и это предельное значение равно $f(P)$.*

Все сформулированные нами до сих пор предположения I — IV совпадали с соответствующими предположениями, которые мы делали при изучении вопроса о сходимости процесса Шварца для суммы двух областей. В наших настоящих рассуждениях потребуется еще одно дополнительное предположение V, которое мы сформулируем позже, когда будем рассматривать вопрос о сходимости последовательных приближений.

Возьмем в плоскости xy две области B_1 и B_2, ограниченные контурами L_1 и L_2. Пусть они налегают друг на друга и B' есть их общая часть: $B' = B_1 \cdot B_2$.

Относительно частей L_1 и L_2 мы сохраним те же обозначения, что и в § 1. Часть L_1, лежащую внутри B_2, назовем $\overline{\alpha}$ и остальную часть α. Часть L_2, лежащую внутри B_1, обозначим $\overline{\beta}$ и оставшуюся часть β. Наконец, общую часть β и α, которая принадлежит границе B', обозначим γ. Границей B' будет, очевидно, $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \gamma$.

Ради простоты, будем считать, что все эти части состоят из конечного числа дуг Жордановых кривых. Допустим, что для каждой из областей B_1 и B_2 мы можем решить задачу Дирихле при любых непрерывных или кусочно-непрерывных граничных значениях искомых функций, и пусть нужно найти функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую в области B' уравнению (1) и принимающую на границе ее L' заданные значения:

$$w(x, y) \mid L' = f(M). \tag{2}$$

Здесь $f(M)$ есть кусочно-непрерывная функция положения точки M на L'.

Идея Неймана заключается в том, чтобы представить искомую функцию $w(x, y)$ в виде суммы двух функций

$$w(x, y) = u(x, y) + v(x, y),$$

первая из которых $u(x, y)$ определена и удовлетворяет уравнению (1) в B_1, вторая же $v(x, y)$ определена и удовлетворяет уравнению (1) в B_2. Оба слагаемых $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны быть подобраны так, чтобы сумма удовлетворяла граничному условию (2).

Поставленная задача о разложении $w(x, y)$ на слагаемые содержит в себе элемент неопределенности. Для выяснения степени ее мы рассмотрим частный случай областей, который изображен на рис. 63. На нем эта неопределенность выясняется вполне, и после его рассмотрения станет очевидным, в какой мере неопределенна задача в самом общем случае.

Напомним, что, согласно первому предположению, для того, чтобы знать функцию $u(x, y)$ или $v(x, y)$ всюду в B_1 или B_2, нужно указать ее значения соответственно на L_1 или L_2, исключая, может быть, конечное множество точек, которое мы будем, ради простоты изложения, опускать в ближайших рассуждениях.

Возьмем любое решение $\omega(x, y)$ уравнения (1) регулярное в $B = B_1 + B_2$. Оно определяется своими граничными значениями на контуре $L = \alpha + \beta$ этой области. В нашей задаче этот контур есть ломаная линия $ABCDEFGH$. Отметим также, что значения $\omega(x, y)$ на L могут быть задаваемы любыми кусочно-непрерывными, так как из предположения о существовании решения задачи Дирихле в каждой из слагаемых областей B_1 и B_2 при произвольных кусочно-непрерывных граничных значениях, по изложенному в § 1, следует существование решения той же задачи в B при любых кусочно-непрерывных граничных значениях.

Представим искомое решение $w(x, y)$ в форме

$$w(x, y) = [u(x, y) + \omega(x, y)] + [v(x, y) - \omega(x, y)].$$

На части α, не принадлежащей границе L', т. е. на $\alpha - \gamma$, которая в нашем случае будет ломаной $BAHG$, где никаких условий на граничные значения u не налагается, мы можем граничные значения ω подобрать так, чтобы первое слагаемое $u + \omega$ имело какие угодно наперед заданные значения. Аналогично, на части $\beta - \gamma$ контура L_2, которая в нашей задаче будет ломаной $DEFG$, выбором граничных значений можно распорядиться так, чтобы второе слагаемое $v - \omega$ на $\beta - \gamma$ имело произвольные граничные значения. На части γ области B, состоящей в нашем примере из ломаной BCD и точки G, выбором ω можно распорядиться так, чтобы одно из слагаемых, например $u + \omega$, имело любые значения. Второе же слагаемое $v - \omega$ тогда получит на γ вполне определенные значения $f(M) - (u + \omega)$, так как здесь задана их сумма w.

Сообразно с этим мы можем первой функции u на α (или v на β) задавать произвольные значения. Для второй же функции v можно задавать произвольные граничные значения только на $\beta - \gamma$, значения же ее на γ определяются вполне и равны $f(M) - u$.

Мы покажем сейчас, что таким заданием граничных значений оба слагаемых, если они существуют, определяются единственным образом. Пусть, в самом деле, мы разложили w двумя способами:

$$w = u' + v' = u'' + v'',$$

причем u' и u'' регулярны в B_1 и имеют одинаковые значения на α, а v' и v'' регулярны в B_2 и принимают одинаковые значения на β. Рассмотрим разности $u' - u''$ и $-(v' - v'')$. Они являются решениями уравнения соответственно в областях B_1 и B_2 и обращаются в нуль на частях α и β их границ. Кроме того, как это видно из последнего равенства, в общей части B' этих двух областей они совпадают:

$$u' - u'' = -(v' - v'').$$

Поэтому разность $v'' - v'$ является продолжением решения $u' - u''$ уравнения (1) из B_1 в B_2. Далее, продолженное таким образом решение на границе $L = \alpha + \beta$ области B имеет нулевые значения. Но тогда, на основании предположения I, оно равно тождественно нулю всюду в B и, следовательно, $u' = u''$ и $v' = v''$. Таким образом, первое и второе слагаемые, на которые мы разложили w, поставленными граничными требованиями определяются единственным образом.

Доказательство существования и построение нужного нам решения $w(x, y)$ уравнения (1) мы свели к построению функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Для нахождения же их мы применим метод последовательных приближений в форме, немного отличной от той, которую предложил Нейман.

Мы должны сейчас произвести выбор граничных значений $u(x, y)$ на α и $v(x, y)$ на $\beta - \gamma$. Зададим на $\alpha - \gamma$ функцию $\varphi(M)$ так, чтобы ее значения вместе с значениями $f(M)$ на $\overline{\alpha} + \gamma$ образовали кусочно-непрерывную функцию положения точки M на L_1, и будем считать, что

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi(M) & \text{на } \alpha - \gamma, \\ f(M) & \text{на } \gamma. \end{cases}$$

Выбором $u(x, y)$ на α мы определили значения $v(x, y)$ на γ, а именно должно быть $v(x, y)|_\gamma = 0$. Значения $v(x, y)$ на $\beta - \gamma$ могут быть заданы, как мы говорили выше, произвольно. Мы положим их, для простоты, равными нулю, так что для $v(x, y)$ мы получим следующие граничные значения:

$$v(x, y) = 0 \text{ на } \beta.$$

Такой выбор граничных значений $u(x,y)$ и $v(x,y)$ на α и β является, разумеется, не обязательным и сделан нами для определенности и некоторого упрощения записи. Кроме того, ясно, что такой выбор граничных значений $u(x,y)$ и $v(x,y)$ для сходимости последовательных приближений является несущественным, и если последовательные приближения будут сходиться при нашем выборе граничных значений, то они будут сходиться и при всяком другом их выборе, лишь бы они были кусочно-непрерывными и такими, что на γ $u+v=f(M)$. В самом деле, всякий другой способ выбора граничных значений может быть приведен к нашему путем замены

$$u'=u+\omega \quad \text{и} \quad v'=v-\omega$$

и надлежащего выбора функции ω, о которой говорилось несколькими строками выше.

Нам неизвестны значения $u(x,y)$ на $\bar{\alpha}$. К разысканию их и сводится задача построения $u(x,y)$. Зададим на $\bar{\alpha}$ произвольно значения $\bar{\varphi}(M)$, подчинив их единственному требованию, чтобы они вместе со значениями $u(x,y)$ на α образовали кусочно-непрерывные значения на всей границе L_1.

В теоретических исследованиях мы не будем налагать на $\varphi(M)$ и $\bar{\varphi}(M)$ никаких других ограничений. При практических вычислениях произволом их нужно, очевидно, распорядиться так, чтобы вычисления, необходимые для нахождения действительных значений $u(x,y)$ на $\bar{\alpha}$, по излагаемой ниже схеме были по возможности проще.

Первое приближение $u_1(x,y)$ к $u(x,y)$ построим как решение задачи Дирихле для уравнения (1) при граничном условии:

$$u_1(x,y)=\begin{cases} \varphi(M) & \text{на } \alpha-\gamma, \\ f(M) & \text{на } \gamma, \\ \bar{\varphi}(M) & \text{на } \bar{\alpha}. \end{cases} \qquad (2_1)$$

Найдем значения, которые принимает $u_1(x,y)$ на $\bar{\beta}$ и вычтем их из $f(M)$. Если бы $u_1(x,y)$ совпало с $u(x,y)$, мы нашли бы точные значения $v(x,y)$ на $\bar{\beta}$. Но так как $u_1(x,y)$ есть лишь некоторое приближение к $u(x,y)$, найденные нами значения $f(M)-u_1(x,y)$ на $\bar{\beta}$ не будут совпадать с $v(x,y)$ и дадут только приближенно $v(x,y)$ на $\bar{\beta}$. По ним и по известным значениям $v(x,y)$ на β мы построим первое приближение $v_1(x,y)$ к $v(x,y)$, решая задачу Дирихле для уравнения (1) в B_2 при граничных значениях:

$$v_1(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ f(M)-u_1(x,y) & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases} \qquad (2_2)$$

По найденному первому приближению $v_1(x, y)$ строим второе приближение $u_2(x, y)$ к $u(x, y)$, решая в B_1 задачу Дирихле при граничных условиях:

$$u_2(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{на } \alpha, \\ f(M) - v_1(x, y) & \text{на } \bar{\alpha} \end{cases}$$

и т. д.

Следующие приближения $u_{n+1}(x, y)$ и $v_{n+1}(x, y)$ мы определим через предыдущие как решения краевой задачи уравнения (1) в B_1 и B_2 при граничных данных:

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1}(x, y) &= \begin{cases} u_n(x, y) & \text{на } \alpha, \\ f(M) - v_n(x, y) & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases} \\ v_{n+1}(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ f(M) - u_{n+1}(x, y) & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для каждой из искомых функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ мы построим последовательность приближений

$$\left.\begin{matrix} u_1(x, y), & u_2(x, y), & \ldots \\ v_1(x, y), & v_2(x, y), & \ldots \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

Сейчас мы исследуем вопрос об их сходимости. Идея наших последующих рассуждений та же, что и в n° 1 § 1. Для каждой из последовательностей мы построим мажорантную и минорантную последовательности и покажем, что обе они будут сходиться к одному и тому же пределу. Тогда будет ясно, что к тем же пределам будут сходиться и последовательности (4). Само построение мажорантных и минорантных последовательностей проводится способом, сходным с тем, который мы применяли в § 1 n° 1, и будет отличаться от него первоначально лишь в одном пункте. А именно, там мы строили одновременно мажоранты u_n^+ и v_n^+ для u_n и v_n. Здесь же построение мажоранты u_n^+ для u_n будет проводиться параллельно с построением миноранты v_n^- для v. Причина этого очевидна: построение мажоранты для одного слагаемого суммы, по-видимому, должно быть связано с минорантой для другого слагаемого.

Обозначим через N положительное число, большее чем $\max |\overline{\varphi}(M)|$. Выбором его мы займемся немного позже. Затем построим последовательность функций $u_n^+(x, y)$ и $v_n^-(x, y)$, решая задачу Дирихле

для уравнения (1) в областях B_1 и B_2 соответственно при граничных значениях:

$$u_1^+(x, y) = \begin{cases} \varphi(M) & \text{на } \alpha - \gamma, \\ f(M) & \text{на } \gamma, \\ +N & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_1^-(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ f(M) - u_1^+(x, y) & \text{на } \bar{\beta}; \end{cases}$$

. . . .

$$u_{n+1}^+(x, y) = \begin{cases} u_n^+(x, y) & \text{на } \alpha, \\ f(M) - v_n^-(x, y) & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_{n+1}^-(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ f(M) - u_{n+1}^+(x, y) & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $u_1^+(x, y)$, $u_2^+(x, y), \ldots$ будет мажорантной для $u_1(x, y)$, $u_2(x, y), \ldots$, а последовательность $v_1^-(x, y)$, $v_2^-(x, y), \ldots$ — минорантной для $v_1(x, y)$, $v_2(x, y), \ldots$

Рассмотрим разности между соответствующими функциями этих последовательностей. Они будут решениями уравнения (1) в области B_1 или B_2, и граничные значения их будут связаны между собой при помощи следующих соотношений:

$$u_1^+ - u_1 = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ N - \bar{\varphi}(M) & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_1^- - v_1 = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u_1 - u_1^+ & \text{на } \bar{\beta}; \end{cases}$$

. . . .

$$u_{n+1}^+ - u_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ v_n - v_n^- & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_{n+1}^- - v_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u_{n+1} - u_{n+1}^+ & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Ввиду выбора числа N, из первого соотношения следует, что граничные значения $u_1^+ - u_1$ на L_1 неотрицательны. По предположению II, отсюда вытекает, что всюду в B_1 будет $u_1^+ - u_1 \geqslant 0$. Но тогда, как это видно из второго соотношения, значения $v_1^- - v_1$ на L_2 будут неположительны и, значит, в силу того же предположения II, везде в B_2 будет $v_1^- - v_1 \leqslant 0$. Продолжая эти рассуждения дальше, мы убедимся в том, что при любых n будут выполнены неравенства

$$u_n^+(x, y) \geqslant u_n(x, y); \quad v_n^-(x, y) \leqslant v_n(x, y).$$

Аналогично строятся последовательности u_1^-, u_2^-, ..., минорантная для u_1, u_2, ..., и v_1^+, v_2^+, ..., мажорантная для v_1, v_2, ... Определим функции u_n^- и v_n^+ рекуррентно как решения уравнения (1) в B_1 или, соответственно, B_2 при граничных условиях:

$$u_1^-(x, y) = \begin{cases} \varphi(M) & \text{на } \alpha - \gamma, \\ f(M) & \text{на } \gamma, \\ -N & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_1^+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ f(M) - u_1^-(x, y) & \text{на } \bar{\beta}; \end{cases}$$

. . . .

$$u_{n+1}^-(x, y) = \begin{cases} u_n^-(x, y) & \text{на } \alpha, \\ f(M) - v_n^+(x, y) & \text{на } \bar{\alpha}; \end{cases}$$

$$v_{n+1}^+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ f(M) - u_{n+1}^-(x, y) & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Можно показать, что при всяких n будут выполняться неравенства:

$$u_n^-(x, y) \leqslant u_n(x, y); \quad v_n^+(x, y) \geqslant v_n(x, y).$$

Попытаемся теперь число N выбрать так, чтобы все построенные нами вспомогательные мажорантные и минорантные последовательности функций были монотонными. Это удастся нам сделать при дополнительном предположении V, которое будет относиться не только к дифференциальному уравнению, как предположения I—IV, но и к рассматриваемым областям B_1 и B_2.

V. Обозначим $U_{\bar{\alpha}, f}(x, y)$ функцию, решающую задачу Дирихле для уравнения (1) в области B_1 при граничном условии

$$U_{\bar{\alpha}, f} = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ f(M) & \text{на } \bar{\alpha}. \end{cases}$$

Аналогично, назовем $V_{\bar{\beta}, f}(x, y)$ функцию, решающую задачу Дирихле в B_2 при граничном условии

$$V_{\bar{\beta}, f} = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ f(M) & \text{на } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию, решающую задачу Дирихле в B_1 при граничных значениях, равных нулю на α и единице на $\bar{\alpha}$. Это есть $U_{\bar{\alpha}, 1}$. Возьмем значения, которые она принимает на $\bar{\beta}$, и решим задачу Дирихле в B_2 при граничных значениях, равных нулю на β и $U_{\bar{\alpha}, 1}$

на $\overline{\beta}$. Задача решается функцией, которая во введенных обозначениях записывается $V_{\overline{\beta}, U_{\overline{\alpha}, 1}}$.

Из второго предположения видно, что все значения, принимаемые $U_{\overline{\alpha}, 1}$ в B_1, будут лежать в интервале $[0, 1]$. В частности, в этом интервале будут лежать все значения, которые принимает $U_{\overline{\alpha}, 1}$ на $\overline{\beta}$. Поэтому граничные значения для $V_{\overline{\beta}, U_{\overline{\alpha}, 1}}$ все будут также принадлежать интервалу $[0, 1]$, и, следовательно, все значения, которые эта функция принимает в B_1, будут лежать между нулем и единицей. Для нас сейчас представляют интерес значения, которые принимает $V_{\overline{\beta}, U_{\overline{\alpha}, 1}}$ на части $\overline{\alpha}$ контура области B_1. Они во всяком случае неотрицательны и не больше единицы. Относительно них мы потребуем, и в этом состоит наше предположение V, чтобы все они не превосходили некоторой правильной дроби:

$$V_{\overline{\beta}, U_{\overline{\alpha}, 1}} \leqslant \vartheta < 1 \text{ при } (x, y) \in \overline{\alpha}. \tag{5}$$

Возвратимся теперь к нашим вспомогательным последовательностям и изучим разность $u_1^+(x, y) - u_2^+(x, y)$. Ее значения на L_1 следующие:

$$u_1^+(x, y) - u_2^+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ N - f(M) + v_1^-(x, y) & \text{на } \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Ясно, что $u_1^+(x, y)$ можно представить в форме суммы двух решений уравнения (1), первое из которых $NU_{\overline{\alpha}, 1}$ принимает на $\overline{\alpha}$ значения, равные N, а на α — значения, равные нулю, второе же $U_{\alpha, u}$ принимает на α те же значения, что и u_1^+ или u, и на $\overline{\alpha}$ значения, равные нулю:

$$u_1^+(x, y) = NU_{\overline{\alpha}, 1}(x, y) + U_{\alpha, u}(x, y).$$

Сообразно с этим $v_1^-(x, y)$, как это видно из ее граничных значений, представим в виде

$$v_1^-(x, y) = V_{\overline{\beta}, f} - V_{\overline{\beta}, u_1} = V_{\overline{\beta}, f} - NV_{\overline{\beta}, U_{\overline{\alpha}, 1}} - V_{\overline{\beta}, U_{\alpha, u}},$$

и поэтому значения на $\overline{\alpha}$ интересующей нас разности $u_1^+(x, y) - u_2^+(x, y)$ равны

$$N - f(M) + v_1^-(x, y) = N(1 - V_{\overline{\beta}, U_{\overline{\alpha}, 1}}) + V_{\overline{\beta}, f} - V_{\overline{\beta}, U_{\alpha, u}} - f(M).$$

Три последних члена суть ограниченные функции положения точки (x, y) на $\overline{\beta}$. Скобка, стоящая множителем при N, по сделанному нами предположению V, положительна и не меньше нежели $1 - \vartheta$. Следо-

вательно, число N всегда можно выбрать настолько большим, чтобы было

$$N(1 - V_{\beta,\, v_{\overline{\alpha},\, 1}}) \geqslant |V_{\overline{\beta},\, f} - V_{\overline{\beta},\, v_{\alpha,\, u}} - f(M)|.$$

Тогда значения изучаемой разности на α будут неотрицательными. При таком выборе N $u_1^+ - u_2^+$ всюду на L_1 будет не меньше нуля и по второму предположению мы можем утверждать, что везде в B_1 будет

$$u_1^+(x, y) - u_2^+(x, y) \geqslant 0.$$

Пользуясь этим неравенством и следующими выражениями для граничных значений u_n^+ и v_n^-

$$v_{n+1}^- - v_n^- = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u_n^+ - u_{n+1}^+ & \text{на } \overline{\beta}; \end{cases}$$

$$u_{n+2}^+ - u_{n+1}^+ = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ v_n^- - v_{n+1}^- & \text{на } \overline{\alpha} \end{cases}$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

без труда можно последовательно доказать неравенства, устанавливающие монотонный характер построенных нами последовательностей $u_n^+(x, y)$ и $v_n^-(x, y)$:

$$u_1^+(x, y) \geqslant u_2^+(x, y) \geqslant \ldots$$
$$v_1^-(x, y) \leqslant v_2^-(x, y) \leqslant \ldots$$

При том же выборе N аналогично устанавливается монотонность и второй пары последовательностей:

$$u_1^-(x, y) \leqslant u_2^-(x, y) \leqslant \ldots$$
$$v_1^+(x, y) \geqslant v_2^+(x, y) \geqslant \ldots$$

После того как доказан монотонный характер всех вспомогательных последовательностей, дальнейшие рассуждения будут в значительной части повторять рассуждения конца n° 1 § 1. Прежде всего, из $u_n^+ \geqslant u_n \geqslant u_n^-$ и предыдущих неравенств следует, что

$$u_1^+(x, y) \geqslant u_n^+(x, y) \geqslant u_n^-(x, y) \geqslant u_1^-(x, y).$$

Последовательности u_n^+ и u_n^- будут не только монотонными, но и ограниченными. По третьему предположению предельные функции, которые мы назовем

$$u^+(x, y) = \lim_{n \to \infty} u_n^+(x, y) \quad \text{и} \quad u^-(x, y) = \lim_{n \to \infty} u_n^-(x, y),$$

будут удовлетворять уравнению (1) в области B_1.

Из аналогичных соображений видно, что последовательности v_n^+ и v_n^- будут также сходиться, и предельные функции

$$v^+(x, y) = \lim_{n\to\infty} v_n^+(x, y) \text{ и } v^-(x, y) = \lim_{n\to\infty} v_n^-(x, y)$$

будут удовлетворять уравнению (1) в области B_2. Функция $u^+(x, y)$ определена в B_1 и $v^-(x, y)$ — в области B_2. Сумма их $w(x, y) = u^+(x, y) + v^-(x, y)$ определена в $B' = B_1 \cdot B_2$ и удовлетворяет там уравнению (1). Найдем предельные значения, которые она принимает на границе $L' = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \gamma$ этой области.

Пусть точка M лежиг на части $\overline{\alpha}$ этой границы, и заданная функция $f(M)$ непрерывна в этой точке. По построению функций $u_{n+1}^+(x, y)$ и $v_n^-(x, y)$ в ней имеет место равенство:

$$u_{n+1}^+(x, y) = f(M) - v_n^-(x, y).$$

Исходя отсюда, путем несложных рассуждений можно показать, что $w(x, y)$ при приближении (x, y) к M будет иметь предельное значение, равное $f(M)$. В самом деле, будем точку (x, y) приближать к точке M. Из неравенства $u^+(x, y) \leqslant u_{n+1}^+(x, y)$ ясно, что при этом будет:

$$\overline{\lim_{(x,y)\to M}} u^+(x, y) \leqslant \lim_{(x,y)\to M} u_{n+1}^+(x, y) = f(M) - v_n^-(M).$$

Это неравенство верно при всяком n. Будем в нем n увеличивать безгранично. Первая часть неравенства не зависит от n и не будет изменяться при изменении n. Последняя же часть будет стремиться к $f(M) - v^-(M)$, и в пределе мы получим следующее неравенство:

$$\overline{\lim_{(x,y)\to M}} u^+(x, y) \leqslant f(M) - v^-(M).$$

Рассмотрим, с другой стороны, функцию $u_*(x, y)$, решающую задачу Дирихле в B_1 при граничном условии:

$$u_*(x, y) = \begin{cases} \varphi(M) & \text{на } \alpha - \gamma, \\ f(M) & \text{на } \gamma, \\ f(M) + v^-(M) & \text{на } \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Так как $v_n^-(x, y) \leqslant v^-(x, y)$, ясно, что на границе L_1 и, следовательно, всюду в области B_1 $u_{n+1}^+(x, y) \geqslant u_*(x, y)$. Поэтому также

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}^+(x, y) = u^+(x, y) \geqslant u_*(x, y).$$

Если в этом неравенстве устремить точку (x, y) к M, найдем:

$$\underline{\lim_{(x,y)\to M}} u^+(x, y) \geqslant \lim_{(x,y)\to M} u_*(x, y) = f(M) - v^-(M).$$

Это последнее неравенство совместимо с ранее полученной нами оценкой сверху предельного значения $u^+(x, y)$ в точке M только в одном случае, когда наибольшее и наименьшее предельные значения $u^+(x, y)$ в M совпадают и оба равны $f(M) - v^-(M)$. Отсюда ясно, что $w(x, y) = u^+(x, y) + v^-(x, y)$ будет иметь при приближении точки (x, y) к M предельное значение, равное $f(M)$.

Таким же способом доказывается, что при приближении (x, y) к любой точке M на $\overline{\beta}$, в которой $f(M)$ непрерывна, $w(x, y)$ будет стремиться к предельному значению, равному $f(M)$.

Исследуем предельные значения $w(x, y)$ на γ. Пусть M есть внутренняя точка γ и функция $f(M)$ непрерывна в M. Мы должны установить, что при приближении точки (x, y) к M $w(x, y)$ будет стремиться к $f(M)$. Вспомним, что

$$u_1^+(x, y) \geqslant u^+(x, y) \geqslant u_1^-(x, y).$$

Дальше, по построению функций u_1^+ и u_1^-, когда точка (x, y) приближается к M, $u_1^+(x, y)$ и $u_1^-(x, y)$ будуг стремиться к одному и тому же пределу $f(M)$. Напомним, что обе эти функции мы определяли как решение задачи Дирихле, причем граничные их значения на γ равны как раз $f(M)$. Поэтому к тому же значению $f(M)$ будет стремиться и $u^+(x, y)$.

Отметим еще один факт, полезный нам для дальнейшего. Пусть M есть точка на $\alpha - \gamma$, в которой $\varphi(M)$ непрерывна. Когда (x, y) будет приближаться к M, и $u_1^+(x, y)$ и $u_1^-(x, y)$ будут стремиться к $\varphi(M)$. Из последнего неравенства следует, что к тому же пределу будет при этом стремиться и $u^+(x, y)$.

Из неравенства

$$v_1^-(x, y) \leqslant v^-(x, y) \leqslant v_1^+(x, y)$$

и из того факта, что при приближении (x, y) к любой внутренней точке части β контура L_2 $v_1^-(x, y)$ и $v_1^+(x, y)$ стремятся к нулю, следует, что $v^-(x, y)$ имеет предельные значения, равные нулю во всех внутренних точках β.

Итак, $w(x, y) = u^+(x, y) + v^-(x, y)$ во всех точках границы L' области B', исключая точки разрыва и, может быть, точки, являющиеся концами дуг кривых, входящих в $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ (и тех и других, по сделанным предположениям, конечное число), имеют предельные значения, равные $f(M)$. Чтобы показать, что $w(x, y)$ решает поставленную задачу Дирихле в B', нам осталось лишь установить, что если $f(M)$ непрерывна в точке, являющейся концом какой-либо дуги из $\overline{\alpha}$ или $\overline{\beta}$, то $w(x, y)$ будет стремиться к $f(M)$ при приближении к этой точке.

Ввиду того, что таких точек конечное число, так же как и точек разрыва $f(M)$, около каждой такой точки можно указать дугу на L', содержащую ее внутри себя и не содержащую ни точек разрыва $f(M)$, ни других концов дуг из $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$. При приближении (x, y) к любой точке дуги, кроме рассматриваемой, $w(x, y)$, как было показано выше, стремится к $f(M)$. Кроме того, $w(x, y)$ ограничена. По четвертому предположению мы можем утверждать, что при приближении к рассматриваемой точке $w(x, y)$ будет также стремиться к значению $f(M)$ в этой точке.

Путем подобных же рассуждений для $u^-(x, y)$ и $v^+(x, y)$ можно показать, что сумма $u^-(x, y)+v^+(x, y)$ есть решение поставленной задачи Дирихле в области B'.

Так как задача Дирихле в B' может иметь только единственное решение, то

$$u^-(x, y)+v^+(x, y)=u^+(x, y)+v^-(x, y)=w(x, y).$$

С другой стороны, разложение $w(x, y)$ на два слагаемых $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих требованиям, поставленным нами, как говорилось в начале n° 1, может быть только единственным. Поэтому должно быть:

$$u^+(x, y)=u^-(x, y)=u(x, y); \quad v^+(x, y)=v^-(x, y)=v(x, y).$$

Возвратимся теперь к исходным построенным нами последовательным приближениям u_n и v_n. Мы показали, что мажорантные u_n^+, v_n^+ и минорантные u_n^-, v_n^- последовательности сходятся к функциям $u(x, y)$ и $v(x, y)$, решающим задачу о разложении $w(x, y)$ на два слагаемых, регулярных соответственно в B_1 и B_2. К тем же функциям должны сходиться и наши последовательности u_n и v_n:

$$\lim u_n(x, y)=u(x, y); \ \lim v_n(x, y)=v(x, y); \ w(x, y)= \\ =u(x, y)+v(x, y).$$

Этим установлена сходимость алгорифма Шварца — Неймана при сделанных пяти предположениях в задаче Дирихле для произведения двух областей.

Еще несколько слов относительно практических вычислений по методу Шварца — Неймана. Для решения всей задачи достаточно уметь найти значения какой-либо одной из искомых функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$ соответственно на $\overline{\alpha}$ или $\overline{\beta}$. В самом деле, пусть мы нашли значения, которые принимает $u(x, y)$ на $\overline{\alpha}$. Значения $u(x, y)$ на оставшейся части α контура L_1 нами были заданы заранее. Мы будем, следовательно, знать значения $u(x, y)$ на всей границе L_1 области B_1. Решая задачу Дирихле в B_1, мы восстановим по известным контурным значениям $u(x, y)$ ее всюду внутри B_1.

Далее, вычислив значения, которые принимает $u(x, y)$ на $\overline{\beta}$ и вычтя их из $f(M)$, определим значения $f(M) - u(M)$, которые принимает $v(x, y)$ в точках $\overline{\beta}$. После этого нам будут известны значения $v(x, y)$ всюду на L_2, так как на оставшейся части β контура L_2 мы считали значения $v(x, y)$ равными нулю. Решив задачу Дирихле в B_2, мы по известным граничным значениям $v(x, y)$ на контуре найдем ее значения всюду внутри B_2.

Допустим теперь, что, исходя из каких-либо соображений, характер которых нам теперь безразличен, мы задали приближенные значения $\varphi^*(M)$ функции $u(x, y)$ на $\overline{\alpha}$. Выше мы выяснили, что эти значения могут быть заданы совершенно произвольно, лишь бы выполнялось условие кусочной непрерывности граничных значений $u(x, y)$.

Вместе с известными точными значениями $u(x, y)$ на α, эти значения дадут приближенные значения $u(x, y)$ на всей границе L_1. По ним мы находим приближенно значения, принимаемые $u(x, y)$ не всюду в B_1, а лишь в точках части $\overline{\beta}$ контура L_2, лежащей внутри B_1. Вычитая найденные значения $u(x, y)$ из заданных значений $f(M)$ на $\overline{\beta}$, определим приближенно значения $v(x, y)$ на $\overline{\beta}$. Вместе с нулевыми значениями на остальной части β они дадут приближенно контурные значения $v(x, y)$ на всей границе L_2. Решая задачу Дирихле уже в области B_2, по ним мы найдем значения, которые принимает $v(x\ y)$ на $\overline{\alpha}$. И, наконец, вычтя их из заданных значений функции $f(M)$, определим исправленные значения $u(x, y)$ на $\overline{\alpha}$. Вообще говоря, они будут ближе к истинным значениям $u(x, y)$ на $\overline{\alpha}$, чем заданные нами.

Если исправленные значения, полученные нами после одного цикла вычислений, совпадут в пределах поставленной точности с заданными нами исходными значениями, то на этом мы обрываем вычисление, так как исходные значения оказались, в пределах принятой точности, совпадающими с истинными значениями.

Если же исправленные значения будут отличаться от исходных, то их мы принимаем за исходные и повторяем весь цикл вычислений снова. Эти вычисления продолжаем до тех пор, пока значения $u(x, y)$ на $\overline{\alpha}$ в начале цикла совпадут со значениями в конце его.

2. Пример исследования сходимости метода Шварца — Неймана. Оценка быстроты сходимости в случае уравнения Лапласа. Приведем пример дифференциального уравнения, для которого выполняются перечисленные в n° 1 пять достаточных условий сходимости метода Шварца — Неймана. Возьмем уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - q(x, y)\, u = 0. \tag{6}$$

Мы сохраним прежнее предположение о коэффициенте $q(x, y)$, а именно будем его считать непрерывным и неотрицательным. В исследованиях n° 2 § 1 мы показали, что для уравнения (6) выполняются первые

четыре требования, которые мы формулировали в начале n° 1. Укажем сейчас достаточные условия выполнимости последнего предположения V, записанного нами в предыдущем номере в форме неравенства (5).

Будем считать для простоты, что $\overline{\beta}$ состоит из одной дуги кривой и представляет собой некоторое сечение области B_1 между точками P и Q.

Может оказаться, что конец дуги $\overline{\beta}$ будет одновременно концом одной из дуг, входящих в $\overline{\alpha}$. Таков конец P для случая, изображенного на рис. 66. Мы будем считать, что в этом случае $\overline{\beta}$ имеет в конце касательную, не совпадающую с касательной к $\overline{\alpha}$ в этой точке.

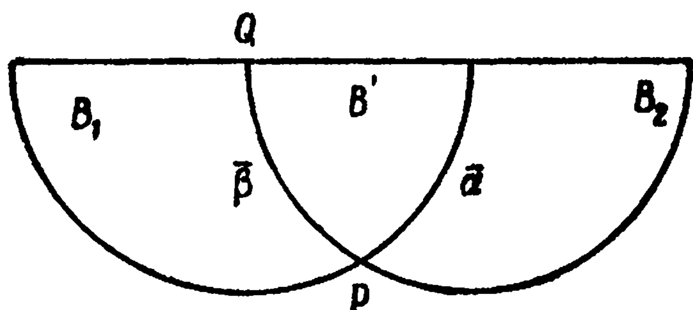


Рис. 66.

Может оказаться также, что конец дуги $\overline{\beta}$ не будет одновременно концом $\overline{\alpha}$. Таков конец Q на рис. 66. Тогда мы не налагаем никаких ограничений на поведение $\overline{\beta}$ вблизи конца дуги.

Рассмотрим теперь решение уравнения (6), принимающее значение 1 на $\overline{\alpha}$ и значение нуль на α (его мы обозначили в n° 1 $U_{\overline{\alpha},1}$), и оценим значения, которые оно принимает на $\overline{\beta}$. Представим $U_{\overline{\alpha},1}$ в виде суммы двух слагаемых:

$$U_{\overline{\alpha},1} = v_* + w_*, \tag{7}$$

первое из которых v_* есть функция гармоническая, имеющая те же значения на контуре L_1 области B_1, что и $U_{\overline{\alpha},1}$, второе же w_* принимает на L_1 значения, равные нулю, и внутри B_1 удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta w_* = q(x, y)\, U_{\overline{\alpha},1}. \tag{8}$$

Так как граничные значения $U_{\overline{\alpha},1}$ на L_1 неотрицательны, $U_{\overline{\alpha},1}$ будет неотрицательной всюду в B_1. Ввиду $q(x, y) \geqslant 0$, правая часть уравнения (8) будет неотрицательной всюду в B_1. Известно, далее, что решение уравнения Пуассона (8) с неотрицательной правой частью, имеющее на границе области значения, равные нулю, не может внутри области принимать положительных значений: [1])

$$w_* \leqslant 0.$$

[1]) Ибо, в самом деле, если $G_1(x, y; \xi, \eta)$ есть функция Грина для области B_1 с полюсом в точке (ξ, η), то w_* имеет следующее выражение:

$$w_*(x, y) = -\iint\limits_{B_1} G_1(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, U_{\overline{\alpha},1}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

и, так как все функции, стоящие под знаком двойного интеграла, неотрицательны, ясно, что $w_* \leqslant 0$. См., например, Курант Р. и Гильберт Д. [1], т. I, гл. V, § 14, n° 5.

Поэтому

$$U_{\bar{\alpha},1} \leqslant v_*.$$

Гармоническая функция v_* принимает внутри области B_1 значения меньше единицы. В частности, это будет и на дуге $\bar{\beta}$. Мы покажем, что ее значения на $\bar{\beta}$ будут меньше некоторой правильной дроби, если установим, что при приближении к концам P и Q этой дуги v_* стремится к значениям, меньшим единицы.

Когда мы приближаемся к концу $\bar{\beta}$, который не является одновременно и концом какой-либо дуги из $\bar{\alpha}$ (для случая, изображенного на рисунке, таким концом будет Q), v_* будет стремиться к нулю. Если же мы, следуя $\bar{\beta}$, приближаемся к концу $\bar{\beta}$, являющемуся одновременно концом дуги из $\bar{\alpha}$ (таким является конец P), v_* будет стремиться к пределу, меньшему единицы, так как касательная к $\bar{\beta}$ в такой точке не совпадает с касательной $\bar{\alpha}$ в этой точке. Последнее легко вытекает из рассуждений, которые мы проводили в n° 2 § 1 при доказательстве леммы Шварца.

Таким образом, должно существовать положительное число $\vartheta < 1$ такое, что во всех точках

$$U_{\bar{\alpha},1} \leqslant v_* \leqslant \vartheta.$$

Граничные значения функции $V_{\bar{\beta}\,U_{\bar{\alpha},1}}$ здесь оказываются меньшими ϑ и, следовательно, значения, которые принимает эта функция в B_2, будут также меньше ϑ, и неравенство (5), при наших предположениях о $\bar{\beta}$, для уравнения (6) выполняется.

Это неравенство также, очевидно, будет выполняться и в том случае, если $\bar{\beta}$ будет состоять из конечного числа дуг, для каждой из которых выполняется высказанное в начале номера предположение.

Наши исследования устанавливали лишь факт сходимости процесса Шварца — Неймана к решению задачи и не давали оценки разности между u_n и v_n и предельными функциями u и v. Мы произведем сейчас эту оценку для уравнения Лапласа, получающегося из (6) при $q(x, y) = 0$. Сохраним тот же порядок идей, который был применен нами в n° 2 § 1. Относительно областей B_1 и B_2 сделаем прежние предположения. Будем считать, что $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ каждая состоит из одной дуги и обе они удовлетворяют условиям леммы Шварца (см. n° 2 § 1). Существование функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, решающих задачу о представлении $w(x, y)$ в форме суммы двух гармонических функций, было нами установлено в предыдущих исследованиях. Сейчас нас будет интересовать оценка разностей $u(x, y) - u_n(x, y)$ и $v(x, y) - v_n(x, y)$. Они последовательно могут

быть определены как решения задач Дирихле в B_1 и B_2 при граничных значениях:

$$u(x, y) - u_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ u - \overline{\varphi}(M) & \text{на } \overline{\alpha}; \end{cases}$$

$$v(x, y) - v_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u_1 - u & \text{на } \overline{\beta}; \end{cases}$$

. . . .

$$u(x, y) - u_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha, \\ v_{n-1} - v & \text{на } \overline{\alpha}; \end{cases}$$

$$v(x, y) - v_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \beta, \\ u_n - u & \text{на } \overline{\beta}. \end{cases}$$

Обозначим через N верхнюю границу абсолютного значения $u - \overline{\varphi}(M)$ на $\overline{\alpha}$. Так как и u и φ ограниченные функции, N будет конечным числом. N зависит, разумеется, от оценки неизвестных нам значений u на $\overline{\alpha}$, выяснять которую мы не будем. Поэтому результат, полученный нами ниже, может служить только для определения порядка убывания $u - u_n$ и $v - v_n$, а не для точного определения погрешности n-х приближений, так как он будет содержать неизвестную нам величину N.

Кривая $\overline{\beta}$ разобьет границу L_1 на две части. На одной из них будет находиться $\overline{\alpha}$.

Граничные значения $u - u_1$ на α равны нулю и на $\overline{\alpha}$ по абсолютной величине не больше N. По лемме Шварца должно существовать такое $\vartheta_1 < 1$, зависящее лишь от геометрических свойств B_1 и $\overline{\beta}$, что на дуге $\overline{\beta}$ будет

$$|u - u_1| \leqslant N\vartheta_1.$$

Дуга $\overline{\alpha}$ разобьет границу L_1 области B_2 на две части, на одной из которых будет лежать $\overline{\beta}$.

Граничные значения $v - v_1$ на β равны нулю, а на $\overline{\beta}$ по абсолютной величине не больше чем $N\vartheta_1$. По той же лемме Шварца должно найтись число $\vartheta_2 < 1$ такое, что во всех точках дуги $\overline{\alpha}$ будет:

$$|v - v_1| \leqslant N\vartheta_1\vartheta_2.$$

Продолжая эти рассуждения дальше, получим следующие оценки:

$$|u - u_n| \leqslant N\vartheta_1^n\vartheta_2^{n-1} \quad \text{на } \overline{\beta}; \quad |v - v_n| \leqslant N\vartheta_1^n\vartheta_2^n \quad \text{на } \overline{\alpha}.$$

Отсюда немедленно получаются оценки изучаемых разностей $u - u_n$ и $v - v_n$ всюду в областях соответственно B_1 и B_2. Рассмотрим

первую из этих разностей. Ее граничные значения на α равны нулю и на $\overline{\alpha}$ равны $v_{n-1} - v$, что по абсолютной величине не превосходит согласно полученным оценкам, $N\vartheta_1^{n-1}\vartheta_2^{n-1}$. Поэтому везде в B_1 должно иметь место:

$$|u - u_n| \leqslant N\vartheta_1^{n-1}\vartheta_2^{n-1}.$$

Совершенно так же для $v - v_n$ в области B_2 получим:

$$|v - v_n| \leqslant N\vartheta_1^{n}\vartheta_2^{n-1}.$$

Оба последних неравенства показывают, что отклонения n-х приближений u_n и v_n от предельных функций u и v убывают не медленнее, чем члены геометрической прогрессии с знаменателем $q = \vartheta_1\vartheta_2$.

3. Приведение метода Шварца — Неймана к решению системы интегральных уравнений последовательными приближениями. В n° 3 § 1 мы показали, что метод Шварца решения задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа для суммы двух областей может быть приведен к решению последовательными приближениями системы интегральных уравнений, помеченной цифрой (11).

Подобным же способом к решению некоторой системы интегральных уравнений последовательными приближениями может быть приведен метод Шварца — Неймана решения задач Дирихле для пересечения двух областей.

При построении самой системы мы сохраним для областей B_1 и B_2 и их границ обозначения и предположения n°1. Мы видели там, что для определения слагаемого $u(x, y)$ нужно задать его значения на части $\overline{\alpha}$ контура L_1. Мы считали в n°1, что $u(x, y)$ на γ принимает значения $f(M)$ такие же, как и $w(x, y)$, и задавали лишь ее значения на $\alpha - \gamma$. Эти значения мы обозначили через $\varphi(M)$. Для определения же второго слагаемого $v(x, y)$ мы должны задать его значения на части $\beta - \gamma$ границы L_2. Мы приняли их равными нулю. Значения $v(x, y)$ на γ определяются по заданным значениям $u(x, y)$ и равны $f(M) - u(x, y)$. При нашем выборе граничных значений $u(x, y)$ значения $v(x, y)$ на γ равны нулю. Наконец, значения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ подлежат определению.

Обозначим функцию Грина для области B_1 с полюсом в точке (ξ, η) через $G_1(x, y; \xi, \eta)$. Также $G_2(x, y; \xi, \eta)$ назовем функцию Грина для B_2.

Пусть n есть внешняя нормаль к области; $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют следующие выражения через их граничные значения:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= -\int_{L_1} u(\xi, \eta)\frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n}ds \text{ в } B_1, \\ v(x, y) &= -\int_{L_2} v(\xi, \eta)\frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n}ds \text{ в } B_2. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Здесь s — длина дуги контура от некоторой фиксированной точки до переменной точки интегрирования $M(\xi, \eta)$.

Если принять во внимание, что значения v на β равны нулю, а значения u на α известны, и ввести обозначение:

$$F(x, y) = -\int_{\alpha-\gamma} \varphi(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds - \int_{\gamma} f(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds, \tag{10}$$

то из предыдущих равенств получим:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= F(x, y) - \int_{\overline{\alpha}} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds, \\ v(x, y) &= -\int_{\overline{\beta}} v(\xi, \eta) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

$F(x, y)$ — гармоническая в B_1 функция, принимающая на $\overline{\alpha}$ значения, равные нулю, на γ — значения $f(M)$ и на $\alpha - \gamma$ — значения $\varphi(M)$.

Будем считать, что в первом из равенств (11) точка (x, y) лежит на $\overline{\beta}$ и во втором — на $\overline{\alpha}$.

Примем во внимание, что значения $u(x, y)$ на $\overline{\beta}$ равны $f(x, y) - v(x, y)$ и значения $v(x, y)$ на $\overline{\alpha}$ равны $f(x, y) - u(x, y)$. Через $f(x, y)$ здесь обозначено значение $f(M)$ в точке (x, y). Равенства (11) дают следующую систему интегральных уравнений для неизвестных значений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ соответственно на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$:

$$\left. \begin{aligned} v(x, y) &= f(x, y) - F(x, y) + \int_{\overline{\alpha}} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds \quad \text{на } \overline{\beta}, \\ u(x, y) &= f(x, y) + \int_{\overline{\beta}} v(\xi, \eta) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds \quad \text{на } \overline{\alpha}. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Теория этой системы сходна с теорией аналогичной системы (11) § 1.

По условиям поставленной нами задачи Дирихле, искомые значения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны дать ограниченное решение системы (12). Наоборот, пусть $u^*(x, y)$ и $v^*(x, y)$ ограничены и удовлетворяют системе (12). Покажем, что они дают как раз искомые значения гармонических функций u и v на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$.

Построим по $u^*(x, y)$ и $v^*(x, y)$, сообразно равенствам (11), гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$u(x, y) = F(x, y) - \int_{\overline{\alpha}} u^*(\xi, \eta) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds,$$

$$v(x, y) = -\int_{\overline{\beta}} v^*(\xi, \eta) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds.$$

Обе они ограничены, так как ограничена функция $F(x, y)$ и ограничены u^* и v^*, стоящие под знаком интегралов множителями при нормальных производных от функций Грина. Первая из них регулярна в B_1, а вторая — в B_2. Граничные значения их на контурах этих областей легко выясняются, если вспомнить значение $F(x, y)$ и свойства интегральных членов, и равны:

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi(M) & \text{на } \alpha - \gamma, \\ f(M) & \text{на } \quad \underline{\gamma}, \\ u^*(x, y) & \text{на } \quad \overline{\alpha}; \end{cases}$$

$$v(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } \underline{\beta}, \\ v^*(x, y) & \text{на } \overline{\beta}. \end{cases}$$

Сумма этих двух функций:

$$u(x, y) + v(x, y) = F(x, y) - \int_{\overline{\alpha}} u^*(\xi, \eta) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds - \int_{\overline{\beta}} v^*(\xi, \eta) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds$$

будет гармонической и регулярной в общей части B' областей B_1 и B_2. Нам осталось только показать, что $u + v$ принимает на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ заданные значения $f(M)$. Пусть точка (x, y) приближается к некоторой точке N на $\overline{\alpha}$. Правая часть последнего равенства при этом будет стремиться к значению

$$u^*(N) - \int_{\overline{\beta}} v^*(\xi, \eta) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds,$$

но, по второму из уравнений (12),

$$\int_{\overline{\beta}} v^*(\xi, \eta) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds = u^*(N) - f(N),$$

и потому предыдущее выражение равно

$$u^*(N) - u^*(N) + f(N) = f(N).$$

Итак, если $(x, y) \to N$, то

$$\lim [u(x, y) + v(x, y)] = f(N).$$

Так же доказывается, что при приближении точки (x, y) к какой-либо точке N на β $u+v$ будет стремиться к заданному значению $f(N)$ в этой точке.

Разыскание ограниченного решения у системы (12) равносильно решению задачи Дирихле в области B'. Отсюда, между прочим, ясно, что система (12) может иметь только одно ограниченное решение, так как если бы она имела два различных ограниченных решения, то по ним мы нашли бы две различные пары функций u и v, решающих поставленную задачу о представлении w в форме суммы двух слагаемых, регулярных соответственно в B_1 и B_2 и так, чтобы первое из них u принимало заданные значения на α, а второе v — на $\beta - \gamma$. Как мы выяснили в начале n° 1, такое представление обязательно единственно. Оба ограниченные решения системы (12), следовательно, обязаны совпадать.

Мы покажем теперь, что метод последовательных приближений для системы интегральных уравнений (12) эквивалентен, по существу, описанному выше алгорифму Шварца — Неймана. Зададим на $\bar{\alpha}$ произвольно кусочно-непрерывную функцию $\varphi^*(M)$. Примем ее за исходное первое приближение $u_1(M)$ к $u(x, y)$ и подставим в первое уравнение системы (12). После подстановки получим некоторую функцию $v_1(M)$, определенную в точках $\bar{\beta}$. Ее мы принимаем за первое приближение к $v(x, y)$. Подставляем $v_1(M)$ вместо $v(\xi, \eta)$ в первую часть второго уравнения системы и после вычислений получаем функцию $u_2(M)$, определенную в точках $\bar{\alpha}$. Это есть второе приближение к $u(x, y)$ и т. д.

Все эти вычисления равносильны следующим: после задания $\varphi^*(M)$ на $\bar{\alpha}$ мы строим в B_1 гармоническую функцию

$$u_1(x, y) = F(x, y) - \int_{\bar{\alpha}} \varphi^*(M) \frac{\partial G_1}{\partial n}\, ds,$$

решая задачу Дирихле в этой области по граничным данным

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(M) & \text{на } \alpha - \gamma, \\ f(M) & \text{на } \gamma, \\ \varphi^*(M) & \text{на } \bar{\alpha}. \end{cases}$$

Затем находим ее значения на $\bar{\beta}$ и вычитаем их из заданных значений $f(M)$ на $\bar{\beta}$, т. е. производим все вычисления, которые нужны в алгорифме Шварца — Неймана для определения граничных значений на $\bar{\beta}$ первого приближения $v_1(x, y)$ к $v(x, y)$. В результате получаем:

$$f(x, y) - F(x, y) + \int_{\bar{\alpha}} \varphi^*(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds = f(N) - u_1(x, y) \text{ на } \bar{\beta}.$$

Но это как раз есть результат подстановки в правую часть первого уравнения (12) вместо $u(\xi, \eta)$ функции $\varphi^*(M)$. Таким образом, найденное нами первое приближение $v_1(M)$ для $v(x, y)$ при методе последовательных приближений будет совпадать с граничным значением на β первого приближения $v_1(x, y)$ в алгорифме Шварца — Неймана.

Продолжая эти рассуждения дальше, мы убедимся в том, что построенные нами последовательные приближения при решении системы интегральных уравнений (12) совпадают с граничными значениями на $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ последовательных приближений в алгорифме Шварца — Неймана.

При практических вычислениях, разумеется, нет необходимости вычислять последовательные приближения для обеих неизвестных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Систему (12) можно преобразовать так, чтобы в нее входила лишь одна из неизвестных функций. Для исключения одной из неизвестных функций, например $v(x, y)$, нужно во второе уравнение системы вместо $v(\xi, \eta)$ подставить ее выражение через u из первого уравнения. После исключения получим уравнение с одной неизвестной функцией и затем решаем его последовательными приближениями.

§ 3. Пример приложения метода Шварца

Рассмотрим один пример применения метода Шварца к решению задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа для суммы двух областей. Пусть область B есть уголок $OACDEFO$, размеры и положение которого относительно осей координат указаны на рис. 67.

Будем искать функцию $w(x, y)$, гармоническую в B и принимающую на контуре ее следующие значения:

$$w(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } EFOAC, \\ f(x) & \text{на } DC, \\ \varphi(y) & \text{на } DE, \end{cases}$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ — заданные функции.

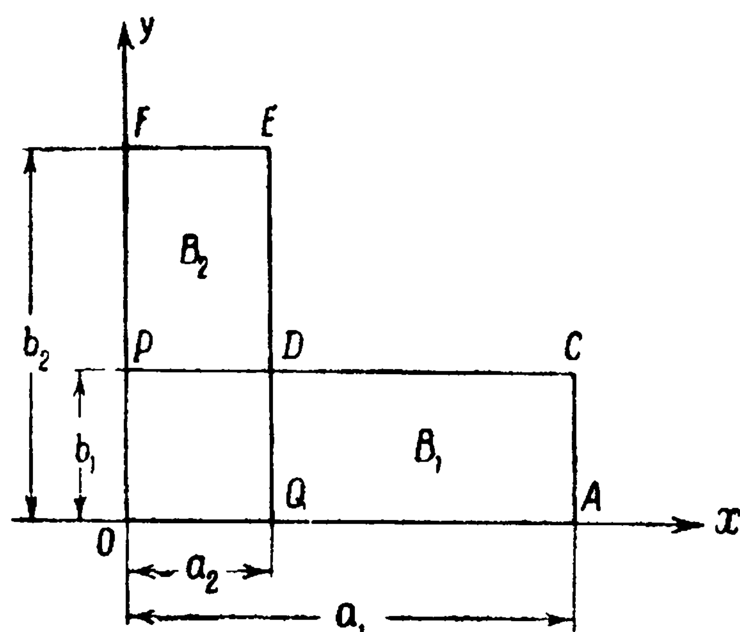


Рис. 67.

Примем за B_1 прямоугольник $OACPO$ и за B_2 — прямоугольник $OQEFO$. Значения, принимаемые разыскиваемой функцией $w(x, y)$ в B_1, назовем $u(x, y)$ и ее значения в B_2 обозначим $v(x, y)$. По Шварцу, для определения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в каждой из областей B_1 и B_2 строят последовательности приближений $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$,... и $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$,... к u и v путем решения в этих областях задач Дирихле при граничных условиях, о которых мы будем говорить несколькими строками ниже.

Начнем с B_1. Значения $u(x, y)$ известны лишь на части $POACD$ контура этого прямоугольника, а именно на $POAC$ они равны нулю и на CD равны $f(x)$. На части же DP они неизвестны. Зададим их как-либо на DP. Иначе говоря, продолжим $f(x)$ с CD на DP. Продолженную функцию назовем $f_1(x)$. Ее мы будем считать кусочно-непрерывной и удовлетворяющей условиям теоремы Дирихле о разложении в ряд Фурье. Способ продолжения в остальном произволен.

Построим затем в B_1 и B_2 последовательности функций $u_1(x, y)$, $u_2(x, y), \ldots$ и $v_1(x, y)$, $v_2(x, y), \ldots$, решая задачу Дирихле при граничных условиях:

$$u_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } POAC, \\ f_1(x) & \text{на } CP; \end{cases} \qquad v_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } EFOQ, \\ \varphi(y) & \text{на } DE, \\ u_1(a_2, y) & \text{на } QD; \end{cases}$$

. . . .

$$u_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } POAC, \\ f(x) & \text{на } CD, \\ v_{n-1}(x, b_1) & \text{на } DP; \end{cases} \qquad v_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } EFOQ, \\ \varphi(y) & \text{на } DE, \\ u_n(a_2, y) & \text{на } QD. \end{cases}$$

Для построения каждой из функций $u_n(x, y)$ нужно решить задачу Дирихле в прямоугольнике B_1 при граничных условиях вида

$$u_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } POAC, \\ f_n(x) & \text{на } CP. \end{cases}$$

При этом в нашей задаче $f_n(x)$ $(n \geqslant 2)$ равна $f(x)$ при $a_2 \leqslant x \leqslant a_1$ и $v_{n-1}(x, b_1)$ при $0 \leqslant x \leqslant a_2$. Решение такой задачи известно и может быть найдено при помощи рядов методом, указанным в n° 1 § 1 первой главы этой книги. Оно имеет следующий вид. Разложим $u_n(x, b_1) = f_n(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг:

$$u_n(x, b_1) = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \sin k\frac{\pi x}{a_1}. \tag{1}$$

Тогда $u_n(x, y)$ будет представляться рядом:

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{\operatorname{sh} k\frac{\pi b_1}{a_1}} \operatorname{sh} k\frac{\pi y}{a_1} \sin k\frac{\pi x}{a_1}. \tag{2}$$

Для построения же $v_n(x, y)$ нужно решить в B_2 задачу Дирихле по граничным значениям

$$v_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } EFOQ, \\ \varphi_n(y) & \text{на } QE, \end{cases}$$

причем $\varphi_n(y)$ равно $u_n(a_2, y)$ при $0 \leqslant y \leqslant b_1$ и $\varphi(y)$ при $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$.

Если разложение $\varphi_n(y)$ в ряд по синусам кратных дуг есть

$$v_n(a_2, y) = \varphi_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(n)} \sin k \frac{\pi y}{b_2}, \tag{3}$$

то $v_n(x, y)$ будет представляться при помощи ряда

$$v_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^{(n)}}{\operatorname{sh} k \frac{\pi a_2}{b_2}} \operatorname{sh} k \frac{\pi x}{b_2} \sin k \frac{\pi y}{b_2}. \tag{4}$$

Построение $u_n(x, y)$ по известной $v_{n-1}(x, y)$ сводится к двум операциям: 1) нужно найти коэффициенты $\alpha_k^{(n)}$ разложения $f_n(x)$ в ряд (1) и 2) по найденным коэффициентам $\alpha_k^{(n)}$ образовать ряд (2). Аналогично для нахождения $v_n(x, y)$ нужно: 1) вычислить коэффициенты $\beta_k^{(n)}$ разложения $\varphi_n(y)$ в ряд (3) и 2) по коэффициентам $\beta_k^{(n)}$ составить ряд (4).

Установим теперь рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$:

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{2}{a_1} \int_0^{a_1} f_n(x) \sin k \frac{\pi x}{a_1} dx = \frac{2}{a_1} \int_0^{a_2} v_{n-1}(x, b_1) \sin k \frac{\pi x}{a_1} dx + \\ + \frac{2}{a_1} \int_{a_2}^{a_1} f(x) \sin k \frac{\pi x}{a_1} dx.$$

Если в ряду (4) n заменить на $n-1$, вместо y подставить b_1 и полученный после этого ряд для $v_{n-1}(x, b_1)$ внести в первый из интегралов правой части последнего равенства, мы приведем его к виду

$$\alpha_k^{(n)} = \sum_{s=1}^{\infty} A_{k,s} \beta_s^{(n-1)} + C_k, \tag{5}$$

где

$$C_k = \frac{2}{a_1} \int_{a_2}^{a_1} f(x) \sin k \frac{\pi x}{a_1} dx,$$

$$A_{k,s} = \frac{2}{a_1} \frac{\sin s \frac{\pi b_1}{b_2}}{\operatorname{sh} s \frac{\pi a_2}{b_2}} \int_0^{a_2} \operatorname{sh} s \frac{\pi x}{b_2} \sin k \frac{\pi x}{a_1} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{s^2 a_1^2}{s^2 a_1^2 + k^2 b_2^2} \cdot \frac{\sin s \frac{\pi b_1}{b_2}}{\operatorname{sh} s \frac{\pi a_2}{b_2}} \left[\frac{b_2}{s a_1} \sin k \frac{\pi a_2}{a_1} \operatorname{ch} s \frac{\pi a_2}{b_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{k b_2^2}{s^2 a_1^2} \cos k \frac{\pi a_2}{a_1} \operatorname{sh} s \frac{\pi a_2}{b_2} \right]. \quad (6)$$

Формулы, позволяющие вычислять $\beta_k^{(n)}$ по $\alpha_k^{(n)}$, получаются таким же способом:

$$\beta_k^{(n)} = \sum_{s=1}^{\infty} B_{k,s} \alpha_s^{(n)} + D_k; \quad D_k = \frac{2}{b_2} \int_{b_1}^{b_2} \varphi(y) \sin k \frac{\pi y}{b_2} dy, \quad (7)$$

$$B_{k,s} = \frac{2}{b_2} \frac{\sin s \frac{\pi a_2}{a_1}}{\operatorname{sh} s \frac{\pi b_1}{a_1}} \int_0^{b_1} \operatorname{sh} s \frac{\pi y}{a_1} \sin k \frac{\pi y}{b_2} dy = \frac{2}{\pi} \frac{s^2 b_2^2}{s^2 b_2^2 + k^2 a_1^2} \times$$

$$\times \frac{\sin s \frac{\pi a_2}{a_1}}{\operatorname{sh} s \frac{\pi b_1}{a_1}} \left[\frac{a_1}{s b_2} \sin \frac{\pi b_1}{b_2} \operatorname{ch} s \frac{\pi b_1}{a_1} - \frac{k a_1^2}{s^2 b_2^2} \cos k \frac{\pi b_1}{b_2} \operatorname{sh} s \frac{\pi b_1}{a_1} \right]$$

При начале вычислений мы задали значения $u_1(x, y)$ на PC, считая их равными $f_1(x)$. Разлагая $f_1(x)$ в ряд по синусам:

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} \sin k \frac{\pi x}{a_1}, \quad (8)$$

мы определим исходные коэффициенты

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{2}{a_1} \int_0^{a_1} f_1(x) \sin k \frac{\pi x}{a_1} dx. \quad (9)$$

Зная $\alpha_k^{(1)}$, мы, пользуясь равенствами (7), найдем $\beta_k^{(1)}$, затем из равенств (5) определим $\alpha_k^{(2)}$ и т. д.

Из общей теории метода Шварца, которую мы излагали в § 1, видно, что последовательные приближения $u_1, u_2, \ldots; v_1, v_2, \ldots$ будут

сходиться к предельным функциям $u(x, y)$, и $v(x, y)$, решающим поставленную задачу Дирихле. Более того, из оценки отклонений $u(x, y)-u_n(x, y)$ и $v(x, y)-v_n(x, y)$ n-х приближений от предельных функций, данной нами в n°2 § 1, видно, что сходимость будет равномерной. Отсюда, в частности, следует, что полученные при наших вычислениях последовательности

$$\alpha_k^{(1)},\ \alpha_k^{(2)},\ldots,\ \alpha_k^{(n)},\ldots;$$
$$\beta_k^{(1)},\ \beta_k^{(2)},\ldots,\ \beta_k^{(n)},\ldots$$

будут сходиться, и предельные значения их α_k и β_k будут являться коэффициентами Фурье разложения $u(x, b_1)$ и $v(a_2, y)$ в ряды по синусам.

Если $f(x)$ и $\varphi(y)$ удовлетворяют условиям теоремы Дирихле о разложении функции в ряд Фурье, то ряды

$$u(x, b_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin k\frac{\pi x}{a_1},\qquad v(a_2, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin k\frac{\pi y}{b_2}$$

будут сходиться.

По найденным α_k и β_k мы построим ряды

$$\left.\begin{aligned} u(x, y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\operatorname{sh}k\frac{\pi b_1}{a_1}}\operatorname{sh}k\frac{\pi y}{a_1}\sin k\frac{\pi x}{a_1},\\ v(x, y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\operatorname{sh}k\frac{\pi a_2}{b_2}}\operatorname{sh}k\frac{\pi x}{b_2}\sin k\frac{\pi y}{b_2}. \end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Они также будут сходиться и будут представлять искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в областях соответственно B_1 и B_2.

При практических расчетах построение последовательностей $\alpha_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(2)},\ldots$; $\beta_k^{(1)}$, $\beta_k^{(2)},\ldots$ продолжают до тех пор, пока в пределах принятой точности следующие значения $\alpha_k^{(n+1)}$, $\beta_k^{(n+1)}$ коэффициентов повторят предыдущие $\alpha_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$.

Еще одно замечание по поводу равенств (5) и (7). Рассмотрим следующую бесконечную систему линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных α_k и β_k:

$$\alpha_k=\sum_{s=1}^{\infty}A_{k,s}\beta_s+C_k;\quad \beta_k=\sum_{s=1}^{\infty}B_{k,s}\cdot\alpha_s+D_k.\tag{11}$$

Применим к ней метод последовательных приближений. Примем за исходные значения для α_k коэффициенты $\alpha_k^{(1)}$ и подставим их в пра-

вую часть второго из уравнений (11). Полученные после подстановки значения примем за первые приближения $\beta_k^{(1)}$ к неизвестным β_k. Подставим их в правую часть первого из уравнений (11), результат подстановки примем за второе приближение $\alpha_k^{(2)}$ к α_k и т. д. Равенства (5) и (7) дадут правила вычисления n-х приближений $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ к α_k и β_k по известному $(n-1)$-му приближению $\beta_k^{(n-1)}$ к β_k. Таким образом, изложенный нами способ нахождения α_k и β_k есть, по существу своему, не что иное, как метод последовательных приближений к решению бесконечной системы (11), когда за исходные значения для α_k приняты (9).

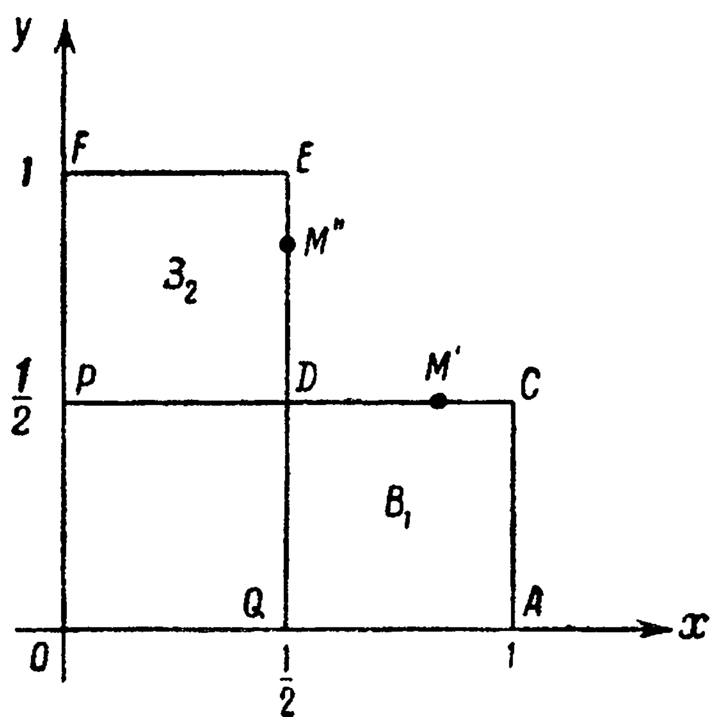


Рис. 68.

Мы изложили сейчас общий ход идеи решения задачи Дирихле для „уголка“, если пользоваться рядами. Последующие вычисления будут зависеть от геометрических свойств „уголка“ и граничных значений искомой функции $w(x, y)$. Их мы проведем при следующих предположениях. Пусть „уголок“ состоит из трех равных квадратов со стороной 1/2 (см. рис. 68). Граничные же значения $w(x, y)$ будем считать следующими:

$$w(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } EFOAC, \\ \sin 2\pi x & \text{на } DC, \\ -\sin 2\pi y & \text{на } DE. \end{cases}$$

Сначала сделаем несколько замечаний, упрощающих вычисления. Ряды (10), представляющие $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в прямоугольниках B_1 и B_2, так как $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = \frac{1}{2}$, примут вид:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh} k\pi y \sin k\pi x, \\ v(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\operatorname{sh} k\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh} k\pi x \sin k\pi y. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Область B симметрична относительно биссектрисы $x = y$ первого координатного угла. Граничные же значения относительно той же биссектрисы распределены антисимметрично в следующем смысле.

Если взять две точки M' и M'' на границе, симметричные относительно биссектрисы $x=y$, то значения $w(x, y)$ в них связаны равенством

$$w(M'') = -w(M').$$

Отсюда ясно, что всюду внутри B значения $w(x, y)$ должны быть распределены антисимметрично относительно прямой $y=x$:

$$w(y, x) = -w(x, y).$$

Это дает следующую связь между $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$v(y, x) = -u(x, y).$$

Поэтому коэффициенты α_k и β_k в рядах (12) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\beta_k = -\alpha_k. \tag{13}$$

Рассмотрим систему равенств (5) и (7), служащую для вычисления приближений $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ к α и β. Коэффициенты $A_{k,s}$ и $B_{k,s}$ в них подсчитаны раньше и для нашего симметричного „уголка" будут равны:

$$A_{k,s} = B_{k,s} = \frac{2}{\pi}\frac{s^2}{s^2+k^2}\sin s\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{s}\operatorname{cth} s\frac{\pi}{2} - \frac{k}{s^2}\cos k\frac{\pi}{2}\right].$$

Когда s четное, то $\sin s\frac{\pi}{2}=0$. Поэтому в правых частях этих равенств сохранятся только члены, содержащие $\alpha_s^{(n)}$ и $\beta_s^{(n-1)}$ с нечетными индексами s. Когда же s нечетное: $s=2q+1$, $\sin(2q+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^q$ и, стало быть,

$$A_{k,2q+1} = B_{k,2q+1} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^q(2q+1)^2}{(2q+1)^2+k^2}\left[\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{2q+1}\operatorname{cth}(2q+1)\frac{\pi}{2} - \frac{k\cos k\frac{\pi}{2}}{(2q+1)^2}\right]. \tag{14}$$

При наших граничных значениях $f(x) = \sin 2\pi x$, $\varphi(y) = -\sin 2\pi y$ и свободные члены C_k, D_k равенств (5) и (7) есть

$$C_k = -D_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sin 2\pi x\sin k\pi x\,dx = \begin{cases}\frac{1}{2} \text{ при } k=2,\\ -\frac{4}{\pi}\frac{\sin(k+2)\frac{\pi}{2}}{k^2-4} \text{ при } k\neq 2.\end{cases}$$

Сами же равенства (5) и (7) примут вид:

$$\alpha_k^{(n)} = -\frac{4}{\pi}\frac{\sin(k+2)\frac{\pi}{2}}{k^2-4} + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q(2q+1)^2}{(2q+1)^2+k^2}\left[\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{2q+1}\operatorname{cth}(2q+1)\frac{\pi}{2} - \frac{k\cos k\frac{\pi}{2}}{(2q+1)^2}\right]\beta_{2q+1}^{(n-1)},$$

$$\alpha_2^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q\beta_{2q+1}^{(n-1)}}{(2q+1)^2+4}; \qquad (15)$$

$$\beta_k^{(n)} = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(k+2)\frac{\pi}{2}}{k^2-4} + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q(2q+1)^2}{(2q+1)^2+k^2}\left[\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{2q+1}\operatorname{cth}(2q+1)\frac{\pi}{2} - \frac{k\cos k\frac{\pi}{2}}{(2q+1)^2}\right]\alpha_{2q+1}^{(n)},$$

$$\beta_2^{(n)} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q\alpha_{2q+1}^{(n)}}{(2q+1)^2+4}.$$

В правые части равенств здесь входят α и β только с нечетными номерами. Отсюда ясно, что при вычислении всех приближений $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$, кроме последнего, достаточно вычислять только коэффициенты $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ с нечетными индексами k:

$$\alpha_1^{(n)}, \ \alpha_3^{(n)}, \ \alpha_5^{(n)}, \ldots;$$
$$\beta_1^{(n)}, \ \beta_3^{(n)}, \ \beta_5^{(n)}, \ldots$$

Исключение, разумеется, представит последнее из приближений, в котором $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ мы принимаем за действительные значения α_k и β_k. По α_k и β_k мы должны будем дальше построить ряды (12), а для этого нам потребуются не только нечетные, но и четные коэффициенты α_k, β_k.

Положив в предыдущих равенствах k нечетным: $k=2p+1$, получим рекуррентные формулы для вычисления нечетных коэффициентов $\alpha_{2p+1}^{(n)}$ и $\beta_{2p+1}^{(n)}$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2p+1}^{(n)} &= \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2-4} + \\ &+ \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+q}(2q+1)\beta_{2q+1}^{(n-1)}}{(2q+1)^2+(2p+1)^2}\operatorname{cth}(2q+1)\frac{\pi}{2}, \\ \beta_{2p+1}^{(n)} &= -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2-4} + \\ &+ \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+q}(2q+1)\alpha_{2q+1}^{(n)}}{(2q+1)^2+(2p+1)^2}\operatorname{cth}(2q+1)\frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Для того, чтобы начать вычисления, мы должны теперь произвести выбор значений $u_1(x, y)$ на PD.

Мы примем

$$f_1(x) = u_1\left(x, \frac{1}{2}\right) = \sin 2\pi x.$$

При таком выборе $f_1(x)$

$$\alpha_1^{(1)} = 0,\ \alpha_2^{(1)} = 1,\ \alpha_3^{(1)} = \alpha_4^{(1)} = \ldots = 0.$$

Исходные значения всех нечётных коэффициентов $\alpha_k^{(1)}$ равны нулю.

Чтобы упростить вычисление коэффициентов системы (16), мы введем вместо неизвестных $\alpha_{2p+1}^{(n)}$ и $\beta_{2p+1}^{(n)}$ новые неизвестные, положив

$$\alpha_{2p+1}^{(n)} = \frac{4}{\pi(2p+1)}\,\alpha_{2p+1}^{*(n)};\quad \beta_{2p+1}^{(n)} = \frac{4}{\pi(2p+1)}\,\beta_{2p+1}^{*(n)}, \tag{17}$$

тогда формулы (16) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2p+1}^{*(n)} &= \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2-4} + \frac{2(2p+1)}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q}^*\,\beta_{2q+1}^{*(n-1)},\\ \beta_{2p+1}^{*(n)} &= -\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2-4} + \frac{2(2p+1)}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q}^*\,\alpha_{2q+1}^{*(n)},\\ A_{p,q} &= \frac{(-1)^{p+q}\,\mathrm{cth}\,(2q+1)\frac{\pi}{2}}{(2q+1)^2+(2p+1)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

При приближенном вычислении $\alpha_{2p+1}^{(n)}$ и $\beta_{2p+1}^{(n)}$ мы возьмем первые 12 из этих величин $\alpha_1^{(n)}, \alpha_3^{(n)}, \ldots, \alpha_{11}^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_3^{(n)}, \ldots, \beta_{11}^{(n)}$ и отбросим все остальные. Выделим в каждом из соотношений (18) первые шесть равенств и, положив в них все $\alpha_{2q+1}^{(n)}$ и $\beta_{2q+1}^{(n-1)}$ с номерами, большими чем 11, равными нулю, получим следующие рекуррентные формулы для подсчета нужных нам величин:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2p+1}^{*(n)} &= \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2-4} + \frac{2(2p+1)}{\pi}\sum_{q=0}^{5} A_{p,q}^*\,\beta_{2q+1}^{*(n-1)},\\ \beta_{2p+1}^{*(n)} &= -\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2-4} + \frac{2(2p+1)}{\pi}\sum_{q=0}^{5} A_{p,q}^*\,\alpha_{2q+1}^{*(n)}\\ &\quad p = (0, 1, \ldots, 5). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Таблица коэффициентов $\overset{*}{A}_{p,q}$, если их вычислить с четырьмя десятичными знаками, имеет вид:

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$
$p=0$	0,5451	—0,1000	0,0385	—0,0200	0,0122	—0,0082
$p=1$	—0,1090	0,0556	—0,0294	0,0172	—0,0111	0,0077
$p=2$	0,0419	—0,0294	0,0200	—0,0135	0,0094	—0,0068
$p=3$	—0,0218	0,0172	—0,0135	0,0102	—0,0077	0,0059
$p=4$	0,0133	—0,0111	0,0094	—0,0077	0,0062	—0,0050
$p=5$	—0,0089	0,0077	—0,0068	0,0059	—0,0050	0,0041

Последовательные приближения $\alpha_{2p+1}^{*(n)}$ и $\beta_{2p+1}^{*(n)}$, найденные из (19), сведены нами в таблицу, помещаемую ниже. Все вычисления при их нахождении, за исключением операций сложения и вычитания, выполнены нами на 25-сантиметровой логарифмической линейке.

n	$\alpha_1^{*(n)}$	$\alpha_3^{*(n)}$	$\alpha_5^{*(n)}$	$\alpha_7^{*(n)}$	$\alpha_9^{*(n)}$	$\alpha_{11}^{*(n)}$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	—0,2651	—0,5834	0,1990	—0,1142	0,0770	—0,0583
3	—0,2781	—0,5805	0,2012	—0,1173	0,0810	—0,0625
4	—0,2800	—0,5794	0,1999	—0,1168	0,0804	—0,0611

n	$\beta_1^{*(n)}$	$\beta_3^{*(n)}$	$\beta_5^{*(n)}$	$\beta_7^{*(n)}$	$\beta_9^{*(n)}$	$\beta_{11}^{*(n)}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{45}$	$-\frac{9}{77}$	$\frac{11}{117}$
2	0,2856	0,5759	—0,1980	0,1154	—0,0787	0,0604
3	0,2807	0,5782	—0,1993	0,1164	—0,0804	0,0604
4	0,2802	0,5790	—0,1995	0,1164	—0,0804	0,0604

Мы оборвали вычисления на четвертом приближении, так как следующее приближение повторило бы его, и положили

$$\alpha_1^* = -\beta_1^* = -0{,}2802; \qquad \alpha_7^* = -\beta_7^* = -0{,}1164;$$
$$\alpha_3^* = -\beta_3^* = -0{,}5790; \qquad \alpha_9^* = -\beta_9^* = 0{,}0804;$$
$$\alpha_5^* = -\beta_5^* = 0{,}1995; \qquad \alpha_{11}^* = -\beta_{11}^* = -0{,}0604.$$

По ним вычисляем α_{2p+1} и β_{2p+1} из равенств

$$\alpha_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}\alpha_{2p+1}^*, \qquad \beta_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}\beta_{2p+1}^*:$$

$$\alpha_1 = -\beta_1 = -0{,}3568; \qquad \alpha_7 = -\beta_7 = -0{,}0211;$$
$$\alpha_3 = -\beta_3 = -0{,}2457; \qquad \alpha_9 = -\beta_9 = 0{,}0114;$$
$$\alpha_5 = -\beta_5 = 0{,}0508; \qquad \alpha_{11} = -\beta_{11} = -0{,}0070.$$

Для определения коэффициентов α и β с четными номерами воспользуемся равенствами (15). Выпустим в них все члены, содержащие коэффициенты α и β с нечетными номерами, большими чем 11, которыми мы пренебрегали при вычислениях, и применим их к полученным нами четвертым приближениям, принятым за действительные значения α и β. Считая в них k четным: $k = 2p$, найдем:

$$\alpha_2 = -\beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{q=0}^{5}\frac{(-1)^q}{(2q+1)^2+4}\beta_{2q+1},$$

$$\alpha_{2p} = -\beta_{2p} = -\frac{p}{\pi}\sum_{q=0}^{5}\frac{(-1)^{p+q}}{(2q+1)^2+4p^2}\beta_{2q+1} \quad (p \geqslant 2).$$

Мы вычислили отсюда $\alpha_2, \ldots, \alpha_{12}, \beta_2, \ldots, \beta_{12}$:

$$\alpha_2 = -\beta_2 = 0{,}5638; \qquad \alpha_8 = -\beta_8 = -0{,}0061;$$
$$\alpha_4 = -\beta_4 = -0{,}0246; \qquad \alpha_{10} = -\beta_{10} = 0{,}0038;$$
$$\alpha_6 = -\beta_6 = 0{,}0115; \qquad \alpha_{12} = -\beta_{12} = -0{,}0031.$$

Наконец, по найденным α_k и β_k составим ряды (12). Например, ряд для $u(x, y)$ имеет вид:

$$u(x, y) = -0{,}3568\,\frac{\operatorname{sh}\pi y}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}}\sin\pi x + 0{,}5638\,\frac{\operatorname{sh}2\pi y}{\operatorname{sh}\pi}\sin 2\pi x -$$

$$-0{,}2457\,\frac{\operatorname{sh}3\pi y}{\operatorname{sh}\frac{3\pi}{2}}\sin 3\pi x - 0{,}0246\,\frac{\operatorname{sh}4\pi y}{\operatorname{sh}2\pi}\sin 4\pi x +$$

$$+0{,}0508\,\frac{\operatorname{sh}5\pi y}{\operatorname{sh}\frac{5\pi}{2}}\sin 5\pi x + 0{,}0115\,\frac{\operatorname{sh}6\pi y}{\operatorname{sh}3\pi}\sin 6\pi x -$$

$$-0{,}0211\,\frac{\operatorname{sh}7\pi y}{\operatorname{sh}\frac{7\pi}{2}}\sin 7\pi x - 0{,}0061\,\frac{\operatorname{sh}8\pi y}{\operatorname{sh}4\pi}\sin 8\pi y +$$

$$+0{,}0114\,\frac{\operatorname{sh}9\pi y}{\operatorname{sh}\frac{9\pi}{2}}\sin 9\pi x + 0{,}0038\,\frac{\operatorname{sh}10\pi y}{\operatorname{sh}5\pi}\sin 10\pi x -$$

$$-0{,}0070\,\frac{\operatorname{sh}11\pi y}{\operatorname{sh}\frac{11\pi}{2}}\sin 11\pi x - 0{,}0031\,\frac{\operatorname{sh}12\pi y}{\operatorname{sh}6\pi}\sin 12\pi x.$$

Выражение для $v(x, y)$ получается отсюда путем изменения знаков у всех коэффициентов и перестановки аргументов x и y.

Для характеристики точности результата мы подсчитали значения $u(x, y)$ в четырех точках $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$:

$$u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \sum \alpha_k \sin k\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11}) + (\alpha_2 - \alpha_6 + \alpha_{10}) = 0{,}1122;$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum \alpha_k \sin k\frac{\pi}{2} = \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_7 + \alpha_9 - \alpha_{11} = -0{,}0208;$$

$$u\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \sum \alpha_k \sin \frac{3\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11}) + (-\alpha_2 + \alpha_6 - \alpha_{10}) = -0{,}9999;$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \alpha_1\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}} - \alpha_3\frac{\operatorname{sh}\frac{3\pi}{4}}{\operatorname{sh}\frac{3\pi}{2}} + \alpha_5\frac{\operatorname{sh}\frac{5\pi}{4}}{\operatorname{sh}\frac{5\pi}{2}} - \ldots = -0{,}1110.$$

Точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ лежит на контуре области и, как видно из граничного условия нашей задачи, $u(x, y)$ должна в ней обращаться в нуль. Приближенное значение, найденное нами, $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -0{,}0208$ отличается от действительного на 0,0208. Точка $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ также лежит на границе, и $u(x, y)$ в ней должна принимать значение, равное -1. Вычисленное приближенное значение $u\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = -0{,}9999$ весьма близко к истинному.

На отрезке DP разыскиваемые функции u и v должны быть равны между собой. То же можно сказать о них и для отрезка DQ. Приближения к ним, найденные нами, вообще говоря, не будут совпадать на DP и DQ. Чтобы охарактеризовать, насколько они разнятся между собой на этих отрезках, мы вычислим приближенные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ на DP. Значение $u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ найдено раньше и равно 0,1122. Значение же $u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ может быть легко определено на основании следующих соображений. Возьмем точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, симметричную с $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ относительно биссектрисы первого координатного угла. Из самого построения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ясно, что значения их в точках, симметричных относительно биссектрисы $y = x$, должны отличаться только знаками: $v(x, y) = -u(y, x)$. Поэтому должно быть $v\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 0{,}1110$.

Таким образом, в точке $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ $u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 0{,}1122$ и $v\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 0{,}1110$. Разница между ними 0,0012 составляет около 1% от их значений в этой точке.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Абрамян Б. Л. [1] Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением, Прикл. матем. и мех. **13**, № 5, 551—556, 1949.

[2] Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением, Прикл. матем. и мех. **14**, № 3, 265—276, 1950.

[3] К плоской задаче теории упругости для прямоугольника, Прикл. матем. и мех. **21**, № 1, 89—100, 1957.

Акбергенов И. А. [1] Об оценке погрешности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода по способу E.Niström'a, Труды 2-го Всесоюзного матем. съезда, 386—387, 1934.

[2] О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода и определении его собственных значений, Матем. сб. **42**, № 6, 679—697, 1935.

Аккерман Р. Б. [1] Квадратурные формулы типа формул Маркова, Труды Матем. ин-та АН СССР **53**, 3—15, 1959.

Артмеладзе Н. К. [1] О приближенном решении интегральных уравнений, Труды Матем. ин-та АН Груз. ССР **13**, 29—52, 1944.

Арутюнян Н. Х. [1] Приближенное решение проблемы кручения стержней с полигональным поперечным сечением, Прикл. матем. и мех. **6**, № 1, 19—30, 1942.

[2] Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения, Прикл. матем. и мех. **13**, № 1, 107—112, 1949.

Балуев А. Н. [1] О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 33, 28—31, 1958.

Банин А. М. [1] Приближенное конформное отображение в применении к задаче обтекания произвольного контура плоскопараллельным потоком, Прикл. матем. и мех. **7**, № 2, 131—140, 1943.

Бари Н. К. [1] Sur les systémes complets de fonctions orthogonales, Матем. сб. **14**, № 1—2, 51—108, 1944.

Баславский И. А. [1] Изгиб прямоугольной плиты переменной толщины, Труды Высш. инж.-техн. уч-ща ВМФ, в. 4, 37—81, 1943.

Безикович Я. С. [1] Исчисление конечных разностей, Изд. ЛГУ, 1939.

Белоцерковский О. М. [1] Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной, Прикл. матем. и мех. **22**, № 2, 206—219, 1958.

[2] О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине, Прикл. матем. и мех. **24**, № 3, 511—517, 1960.

Бергман (Bergmann S.) [1] Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen, Math. Ann. **86**, 238—271, 1922.

Берстоу и Берри (Bairstow L., Berry A.) [1] Two dimensional solutions of Poisson and Laplace's equations, London Proc. Roy. Soc. (A) **95**, 457—475, 1918.

Бибербах (Bieberbach L.) [1] Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **38**, 98—112, 1914, 2 sem.

Бизано и Кох (Biezano C. B., Koch J. J.) [1] On the buckling on a thin-walled circular tube loaded by pure bending, Proc. Akad. Wet. Amsterdam **43**, № 7, 783—796, 1940.

Бондаренко П. С. [1] К вопросу об единственности для бесконечных систем линейных уравнений, Матем. сб. **29**, № 2, 403—418, 1951.

[2] Зауваження до чисельного розв'язування крайових задач рівняння Лапласа і бігармонічного рівняння методом нескінченних систем, Наук. зап. Київськ. ун-т **13**, № 8, 39—49, 1954.

[3] О сходимости алгорифма последовательных приближений и оценки погрешностей при численном решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, Наук. зап. Київськ. ун-т **16**, № 2, 81—89, 1957.

Бохнер (Bochner S.) [1] Über orthogonale systeme analytischer Funktionen, Math. Z. **14**, 3—4, 180—207, 1922.

Бродский М. Л. [1] Об оценке остаточного члена формул численного дифференцирования, Успехи матем. наук **12**, № 6, 72—77, 1958.

Быстров Н. А. [1] О приближенном решении уравнений в частных производных с тремя независимыми переменными, Докл. АН СССР **3**, № 1, 12—16, 1934.

Бэтмен (Bateman H.) [1] On the numerical solution of linear integral equations, London Proc. Roy. Soc. (A) **100**, № 705, 441—449, 1922.

[2] A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind, Messenger Math. **37**, 179—187, 1908.

Валле-Пуссен [1] Курс анализа, т. II, ГТТИ, 1933.

Вертгейм Б. А. [1] О некоторых методах приближенного решения нелинейных функциональных уравнений в пространствах Банаха, Успехи матем. наук. **12**, № 1, 166—169, 1957.

Ветчинкин В. П. [1] Числовые методы решения нелинейных интегральных уравнений, Труды ЦАГИ **192**, 1935.

Виландт (Wielandt H.) [1] Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations, Proc. Sympos. Appl. Math. **6**, Numerical Analysis, N. Y.—Toronto—London, 261—282, 1956.

Вилля (Villat H.) [1] Sur le probleme de Dirichlet dans une aire annulaire, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **33**, 134— 174, 1912, 1 sem.

[2] Leçons sur l' hydrodynamique, Paris, 1929.

Винтнер (Wintner A.) [1] Ein Zatz über unendliche Systeme von linearen Gleichungen, Math. Z. **24**, № 2, 266, 1925/26.

Власов В. З. [1] Строительная механика тонких упругих пластинок, Прикл. матем. и мех. **10**, № 1, 173—192, 1946.

Власова З. А. [1] О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, Труды Матем. ин-та АН СССР **53**, 16—36, 1959.

Волков Д. М. и Назаров А. А. [1] Об одной предельной задаче и ее применении в плоской теории упругости, Матем. сб. **40**, № 2, 210—228, 1933.

Волков Е. А. [1] Оценки ошибки при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа, Докл. АН СССР **96**, № 5, 897—899, 1954.

[2] К вопросу о решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, Вычислит. матем., сб. 1, 34—61, 1957.

Галеркин Б. Г. [1] Упругие тонкие плиты, Госстройиздат, 1933.

[2] Стержни и пластинки, Вестник инженеров **1**, 19, 897—908, 1915.

[3] Прямоугольные пластинки, опертые по краям, Изв. Петрогр. Политехн. ин-та, отд. техн., ест., матем. **24**, в. 1. 219—282, 1915.

[4] Изгиб прямоугольных пластинок и стенок, Изв. Петрогр. Политехн. ин-та, отд. техн., ест., матем. **26**, 124—254, 1916; **27**, 187—322, 1918.

Геккелер И. В. [1] Статика упругого тела, ГТТИ, 1934.

Гельфанд И. М. [1] Лекции по линейной алгебре, изд. 2-е, Гостехиздат, 1951.

Гершгорин С. А. [1] О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона, Изв. Ленингр. политехн. ин-та отд. техн., ест., матем., **30**, 75—95, 1927.

[2] Fehlerabschätzung für das Differenzverfahren zur Lösung partiellen Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech. **10**, № 4, 373—382, 1930.

[3] О конформном отображении односвязной области на круг, Матем. сб. **40**, № 1, 48—58, 1933.

Гиз (Giese John H.). [1] On the truncation error in a numerical solution of the Neumann problem for a rectangle, J. Math. and Phys. **37**, № 2, 169—177, 1958.

Гильберт (Hilbert D.) [1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, Berlin, 1912.

Гильдебрандт (Hildebrandt F. B.) [1] The approximate solution of singular integral equations arising in engineering practice, Proc. Amer. Acad. Arts. Sci. **74**, № 9, 287—295, 1941.

Голузин Г. М. [1] Конформное отображение многосвязных областей на плоскость с разрезами методами функциональных уравнений, Сб. „Конформное отображение односвязных и многосвязных областей", 98—110, ОНТИ 1937.

[2] Метод вариаций в конформном отображении, Матем. сб. **19**, № 2, 203—236, 1946.

Голушкевич С. С. [1] О некоторых задачах теории изгиба ледового покрова, 1947.

Гольдшмидт (Goldschmidt E.) [1] Numerische Verwendbarkeit der Methoden zur Auflösung unendlich vieler Gleichungen, Würzburg, 1912.

Гончаров В. Л. [1] Теория интерполирования и приближения функций, изд. 2-е, Гостехиздат, 1954.

Горбунов-Посадов М. И. [1] Балки и прямоугольные плиты, лежащие на основании, принимаемом за упругое полупространство, Докл. АН СССР **24**, № 5, 421—425, 1939.

Гринберг Г. А. [1] Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР, 1948.

Гуревич С. Г. [1] Об устойчивости плоского напряженного состояния, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 8, 137—152, 1939.

Гурса (Goursat E.) [1] Курс математического анализа, ГТТИ, 1934.

[2] Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$, Bull. Soc. Math. France **26**, 236—237, 1898.

[3] Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm, Bull. Soc. Math. France, **35**, 163—173, 1907.

Гюнтер Н. М. [1] Курс вариационного исчисления, ГТТИ, 1941.

[2] Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Гостехиздат, 1953.

Данилевский А. М. [1] О численном решении векового уравнения, Матем. сб. 2, № 1, 169—172, 1937.

Диксон (Dixon A. C.) [1] On a class of matrices of infinite order, Cambr. Trans. **19**, 190—233, 1902.

Дородницын А. А. [1] Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя, Журнал прикл. мех. и техн. физ., № 3, 111—118, 1960.

Егоров Д. Ф. [1] Основания вариационного исчисления, Гос. изд., М. — Петр., 1923.

Загадский Д. М [1] Аналог метода Ньютона для нелинейных интегральных уравнений, Докл. АН СССР **59**, № 6, 1041—1044, 1948.

Иванов В. В. [1] Приближенное решение особых интегральных уравнений, Докл. АН СССР **110**, № 1, 15—18, 1956.

[2] Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в случае разомкнутых контуров интегрирования, Докл. АН СССР **111**, № 5, 933—936, 1956.

[3] О применении метода моментов и „смешанного“ метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР **114**, № 5, 945—948, 1957.

Ильин В. П. [1] Оценки функций, имеющих производные суммируемые с данной степенью, на гиперплоскостях различных размерностей, Докл. АН СССР **78**, № 4, 633—636, 1951.

[2] Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов. Труды Матем. ин-та АН СССР **53**, 64—127, 1959.

Каган В. Ф. [1] Основания теории определителей, Гос. изд. Укр., 1922.

Каландия А. И. [1] Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применений в теории упругости, Матем. сб. **42**, № 2, 249—272, 1957.

Канторович Л. В. [1] О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 2, 229—235, 1933.

[2] Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 5, 647—652, 1933.

[3] О конформном отображении, Матем. сб. **40**, № 3, 294—325, 1933.

[4] О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей, Матем. сб., **41**, № 2, 235—245, 1934.

[5] О конформном отображении многосвязных областей, Докл. АН. СССР **2**, № 8, 441—444, 1934.

[6] Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных, Докл. АН СССР **2**, № 9, 532—536, 1934.

[7] Некоторые исправления к моей работе „О конформном отображении“, Матем. сб. **41**, № 1, 179—182, 1934.

[8] Об общих методах улучшения сходимости в способах приближенного решения граничных задач математической физики, Труды ин-та пром. строит. в. 2, 65—72, 1934.

[9] Эффективные методы в теории конформных отображений, Изв. АН СССР, сер. матем., № 1, 79—90, 1937.

[10] Конформное отображение круга на односвязную область, Сб. „Конформное отображение односвязных и многосвязных областей“, 5—17, ОНТИ, 1937.

[11] О функциональных уравнениях, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 3, 14—50, 1937.

[12] Определенные интегралы и ряды Фурье, Изд. ЛГУ, 1940.

[13] О сходимости вариационных процессов, Докл. АН СССР **30**, № 2, 107—111, 1941.

[14] Некоторые замечания о методе Ритца, Труды Высш. инж.-техн. уч-ща ВМФ, в. 3, 3—16, 1941.

[15] О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, Докл. АН СССР **30**, № 7, 579—582, 1941.

[16] Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, Прикл. матем. и мех. **6**, № 1, 31—40, 1942.

[17] О методе наискорейшего спуска, Докл. АН СССР **56**, № 3, 233—236, 1947.

[18] Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук **3**, № 6, 89—185, 1948.

[19] О методе Ньютона для функциональных уравнений, Докл. АН СССР **59**, № 7, 1237—1240, 1948.

[20] Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций, Труды Матем. ин-та АН СССР **28**, 3—25, 1949.

[21] Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех., астр., в. 2, 68—103, 1957.

Канторович Л. В. и Акилов Г. П. [1] Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Канторович Л. В., Крылов В. И. и Чернин К. Е. [1] Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций, Гостехиздат, 1956.

Канторович Л. В. и Фрумкин П. В. [1] Применение одного метода приближенного решения уравнений в частных производных к решению задачи о кручении призматических стержней, Труды ин-та пром. строит., в. 4, 111—122, 1937.

Карлеман (Carleman T.) [1] Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, Arkiv för Mat., Astron. och Fys. **17**, h. 9, 30, 1923.

Кваде (Quade E. S.) [1] Trigonometric approximation in the mean, Duke Math. J **3**, № 3, 529—543, 1937.

Келдыш М. В. [1] О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач, Изв. АН СССР, сер. матем., № 6, 309—330, 1942.

Келлог (Kellogg O. D.) [1] On the existence and closure of sets of characteristic functions. Math. Ann. **86**, 14—17, 1922.

Кётерицш (Kötteritzsch Th.) [1] Ueber Auflösung eines Systems von unendlich vielen Gleichungen, Z. Math. und Phys. **15**, № 1, 1—15, 229—268, 1870.

Коллатц (Collatz L.) [1] Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichunqen, Schriften des math. Seminars und Inst. angew. Math. der Universität Berlin **3**, № 1, 1—34, 1935.

[2] Genäherte Berechnung von Eigenwerten, Z. angew. Math. Mech. **19**, № 4, 224—249; 5, 297—318, 1939.

[3] Schrittweise Näherungen bei Integralgleichungen und Eigenwertschranken, Math. Z. **46**, № 5, 692—708, 1940.

[4] Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig, 1945.

Кох (Koch H.) [1] Ueber das Nichtverschwingen einer Determinante nebst Bemerkungen über Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen, Deutsche Math. Verl. **22**, 285—291, 1913.

Коялович Б. М. [1] Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка, Спб, 1902.

[2] Исследование о бесконечных системах линейных уравнений, Изв. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **3**, 41—167, 1930.

Кравчук М. Ф. [1] Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь, I, II, Киев, 1932, 1936.

Кристоффель (Christoffel E. B.) [1] Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Annali di Matematica (2), № 1, 89—104, 1867/68.

Крылов А. Н. [1] О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 4, 491—539, 1931.

[2] О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах, изд. 5-е, Гостехиздат, 1950.

[3] Лекции о приближенных вычислениях, изд. 6-е, Гостехиздат, 1954.

Крылов В. И. [1] Приложение формулы Эйлера — Лапласа к приближенному решению интегральных уравнений типа Вольтерра, Труды Матем. ин-та АН СССР **28**, 33—72, 1949.

[2] Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, 1959.

Крылов Н. М. [1] Sur différents procédés d'intégration approchée en physique mathématique, Ann. de Toulouse **17**, 153—186, 1925.

[2] Про наближене розв'язування лінійних інтегральних рівнянь, Труды физ.-матем. отд. АН УССР **3**, № 6, 185—208, 1926.

[3] Les méthodes de solution approchée de problèmes de la physique mathématique, Mémorial des Sci. Math., fasc. XLIX, Paris, 1931.

[4] Основні проблеми метематичної фізики і техніки, Хрк. — Киев, 1932.

[5] О некоторых направлениях в области приближенного решения проблем математической физики, В кн.: „Юбилейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции", т. I, стр. 231—241, Изд. АН СССР, 1947.

Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. [1] La solution approchée du problème de Dirichlet, Докл. АН СССР (А) **11**, 283—288, 1929.

[2] Application de la méthode de l'algorithme variationnel à la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique. Изв. АН СССР, сер. физ-матем. наук, в. 1, 43—71; в. 2, 105—114, 1930.

Крылов Н. М. и Тамаркин Я. Д. [1] Sur l'application de la théorie des quadratures mécaniques généralisées à l'évolution par approximations successives be la solution de l'équation intégrale, Зап. физ.-матем. отд. АН УССР **1**, № 1, 16—21, 1922.

Кублановская В. Н. [1] Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе, Труды Матем. ин-та АН СССР **53**, 145—185, 1959.

Кузнецов Е. С. и Овчинский Б. В. [1] Результаты численного решения интегрального уравнения теории рассеяния света в атмосфере, Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 4(131), 1949.

Кузьмин Р. О. [1] К теории бесконечных систем линейных уравнений, Труды физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова **2**, в. 2, 1931.

[2] Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 4, 515—546, 1934.

Курант Р. [1] Геометрическая теория функций комплексной переменной, ГТТИ, 1934.

Курант Р. и Гильберт Д. [1] Методы математической физики, т. I, изд. 3-е; т. II, изд. 2-е, Гостехиздат, 1951.

Курант, Фридрихс и Леви (Courant R., Friedrichs K., Lewy H.) [1] Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann. **100**, 32—74, 1928.

[2] О разностных уравнениях математической физики, Успехи матем. наук **8**, 125—160, 1940.

Куфарев П. П. [1] Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца — Кристоффеля, Докл. АН СССР **57**, № 6, 535—537, 1947.

Лаасонен (Laasonen Pentti) [1] On the solution of Poisson's difference equation, J. Assoc. Comput. Machinery **5**, № 4, 370—382, 1958.

Лаврентьев М. А. [1] Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, Гостехиздат, 1946.

Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. [1] Курс вариационного исчисления, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.

Леве Д. [1] Безбалочные перекрытия, изд. 2-е, Гос. научно-техн. изд., 1931.

Левин В. И. и Гросберг Ю. И. [1] Дифференциальные уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.

Лейбензон Л. С. [1] Вариационные методы решения задач теории упругости, Гостехиздат, 1943.

[2] Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.

Лехтик С. М. [1] О применении метода академика Б. Г. Галеркина для определения функции напряжений при кручении уголка, Труды Высш. инж.-техн. уч-ща ВМФ, в. 3, 56—59, 1941.

Лурье А. И. [1] Приближенное решение некоторых задач о кручении и изгибе стержня, Труды Ленингр. индустр. ин-та **3**, № 1, 121—156, 1939.

Лучинин Д. И. [1] Метод бесконечных систем в применении к решению плоской задачи теории упругости, Матем. сб. **3**, № 3, 483—508, 1938.

Люстерник Л. А. [1] Проблема Дирихле, Успехи матем. наук **8**, 115—124, 1941.

[2] О разностных аппроксимациях оператора Лапласа, Успехи матем. наук **9**, № 2, 3—66, 1954.

Малиев А. С. [1] Ряды Фурье повышенной сходимости для функций, определенных в данном промежутке, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 10, 1437—1450, 1932.

[2] О разложении в ряды Фурье повышенной сходимости функций, определенных в данном промежутке, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 8, 1113—1120, 1933.

Марков А. А. [1] Об одном вопросе Д. И. Менделеева, Записки импер. АН **62**, 1—24, 1889.

[2] Исчисление конечных разностей, Спб, 1913.

Мацкевич И. П. [1] Решение задачи Дирихле для тела, ограниченного конечным числом эллипсоидов вращения, Докл. АН БССР **4**, № 5, 190—193, 1960.

Мелентьев П. В. [1] Несколько новых методов и приемов приближенных вычислений, ОНТИ, 1937.

Мизес и Поллячек-Гейрингер (v. Mises R., Pollaczek-Geiringer H.) [1] Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, Z. angew. Math. Mech. **9**, № 1, 58—77; 2, 152—164, 1929.

Микеладзе Ш. Е. [1] О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 6, 819—842, 1934.

[2] О численном решении интегральных уравнений, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 2, 255—300, 1935.

[3] Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, Изд. АН, СССР, 1936.

[4] О численном решении дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$, Докл. АН СССР **14**, № 4, 177—180, 1937.

[5] О численном интегрировании уравнений Лапласа и Пуассона, Докл. АН СССР **14**, 4, 181—182, 1937.

[6] О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. Изв. АН СССР, сер. матем., № 2, 271—292, 1938.

[7] К вопросу о решении краевых задач разностным методом, Докл. АН СССР **28**, № 5, 401—403, 1940.

[8] К вопросу численного интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными при помощи сеток, Сообщ. Груз. фил. АН СССР **1**, № 4, 249—254, 1940.

[9] О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5, 57—74, 1941.

[10] Численное интегрирование, Успехи матем. наук **3**, № 6, 3—88, 1948.

[11] Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложения к задачам теории упругости, Гостехиздат, 1951.

Минасян Р. С. [1] О смешанной граничной задаче уравнения Лапласа для прямоугольника, Прикл. матем. и мех. **16**, № 3, 293—304, 1952.

[2] Об одной смешанной задаче изгиба крестообразной пластинки, Докл. АН АрмССР **30**, № 4, 201—209, 1960.

Михлин С. Г. [1] Метод последовательных приближений в применении к бигармонической проблеме, Труды Сейсмолог. ин-та АН СССР **39**, 1—14, 1934.

[2] О сходимости метода Галеркина, Докл. АН СССР **61**, № 2, 197—199, 1948.

[3] Метод наименьших квадратов в задачах математической физики, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 16, 167—206, 1949.

[4] Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, изд. 2-е, Гостехиздат, 1949.

[5] Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.

Мусхелишвили Н. И. [1] Applications des intègrales analoques à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique, Тбилиси, 1922.

[2] Recherches sur les problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à deix dimensions, Math. Ann. **107**, № 2, 282-312, 1932.

[3] Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости, Докл. АН СССР **3**, № 2, 51-54, 1935.

[4] Некоторые задачи теории упругости, Изд. АН СССР, 1935.

[5] Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.

Мысовских И. П. [1] Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., в. 19, 66—72, 1956.

[2] Об оценке ошибки, возникающей при решении неоднородного интегрального уравнения способом замены ядра на близкое, Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао 1, 63—73, 1958.

[3] Об оценке ошибки приближенных методов отыскания собственных чисел эрмитова ядра, Матем. сб. **48**, № 2, 137—148, 1959.

Мюнтц Г. М. Интегральные уравнения, т. I, ГТТИ, 1934.

Натансон И. П. [1] Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1951.

Нейман (Neumann C.) [1] Zur Theorie des logarithmischen und Newton'schen Potentials, Leipziger Berichte **22**, 264—321, 1870.

Нетер (Noether F.) [1] Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann. **82**, 42—63, 1921.

Николаева Г. А. [1] О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов, Труды Матем. ин-та АН СССР **53**, 236—265, 1959.

Николаева М. В. [1] О приближенном вычислении осциллирующих интегралов, Труды Матем. ин-та АН СССР **28**, 26—32, 1949.

Нистрем (Nyström E. J.) [1] Über die praktische Auflösung von linearen Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben der Potentialtheory, Commentationes Helsingfors: Societas scientiarum Fennica, Comm. physico-mathem. **4**, 15, 1928.

[2] Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen mit Anwendungen ans Randwertaufgaben, Acta Math. **54**, 185—204, 1930.

[3] Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Acta Math. **76**, 157—184, 1945.

Ньютон [1] Математические начала натуральной философии. В кн.: А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. VII. Изд. АН СССР, 1936.

Оберг (Oberg E. N.) [1] The approximate solution of integral equations, Bull. Amer. Math. Soc. **41**, № 4, 276—284, 1935.

Островский (Ostrowski A.) [1] Sur l'approximation du déterminant de Fredholm par les déterminants des systèmes d'équations linéaires, Arkiv för Mat., Astron. och Fys. **26**, h. 4, 14, 1939.

Панов Д. Ю. [1] О применении метода академика С. А. Чаплыгина к решению интегральных уравнений, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 6, 843—886, 1934.

[2] Численное решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, Успехи матем. наук **4**, 34—44, 1938.

[3] О применении метода Б. Г. Галеркина для решения некоторых задач теории упругости, Прикл. матем. и мех. **3**, № 2, 139—142, 1939.

[4] Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, изд. 5-е, Гостехиздат, 1951.

Папкович П. Ф. [1] Теория упругости, Оборонгиз, 1939.

[2] Строительная механика корабля, т. II, Судпромгиз, 1941.

Пелле (Pellet A.) [1] Des équations majorantes, Bull. Soc. Math. France **37**, 93—101, 1909.

[2] Des systèmes infinis d'équations, Bull. Soc. Math. France **41**, 119—126, 1913.

[3] Sur la méthode des réduites, Bull. Soc. Math. France **42**, 48—53, 1914.

Перельман Я. И. [1] Метод Б. Г. Галеркина в вариационном исчислении и в теории упругости, Прикл. матем. и мех. **5**, № 3, 345—358, 1941.

Петров Г. И. [1] О распространении колебаний в вязкой жидкости и возникновении турбулентности, Труды ЦАГИ, № 345, 1938.

[2] Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости, Прикл. матем. и мех. **4**, № 3, 3—12, 1940.

Петровский И. Г. [1] Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 2-е, Гостехиздат, 1953.

[2] Лекции по теории интегральных уравнений, изд. 2-е, Гостехиздат, 1951.

[3] Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей, Успехи матем. наук **8**, 161—170, 1941.

Пиконе (Picone M.) [1] Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet, Rom. Accad. L. Rend. (5) **31**, 357—359, 1922.

Привалов И. И. [1] Ряды Фурье, изд. 3-е, ГТТИ, 1934.

[2] Интегральные уравнения, ГТТИ, 1935.

[3] Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е, Физматгиз, 1960.

Протусевич Я. А. [1] Вариационные методы в строительной механике, Гостехиздат, 1948.

Рафальсон З. Х. [1] К вопросу о решении бигармонического уравнения, Докл. АН СССР **64**, № 6, 799—802, 1949.

[2] К вопросу о решении бигармонического уравнения, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 23, 169—191, 1952.

Рисс (Riesz Fr.) [1] Leçons sur les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913.

Ритц (Ritz W.) [1] Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. reine angew. Math. **135**, 1—61, 1908.

[2] Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, Ann. d. Phys. **28**, № 4, 737—786, 1909.

[3] Oeuvres complètes, Paris, 1911.

Рихтмайер Р. Д. [1] Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, 1960.

Рогов Т. Н. [1] Равносторонняя треугольная плита, свободно опертая по контуру, Труды Высш. инж.-техн. уч-ща ВМФ, в. 2, 34—43, 1940.

Рунге (Runge C.) [1] Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ constants numerisch zu integriren, Z. Math. Phys. **56**, 225—232, 1908.

[2] Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 431—448, 1911.

Рябенький В. С. и Филиппов А. Ф. [1] Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956.

Сапонджян О. М. [1] Применение метода дополнительных воздействий к решению задачи об изгибе плит, плоской задачи и задачи о кручении призматических стержней, Прикл. матем. и мех. **13**, № 5, 501—512, 1949.

Саульев В. К. [1] Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.

Сеге (Szegö G.) [1] Ueber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, Math. Z. 9, 218—270, 1921.

Семенов Н. С. [1] Применение вариационного метода Л. В. Канторовича к решению задач об изгибе тонких прямоугольных пластин. Прикл. матем. и мех. 3, № 4, 107—116, 1939.

Скарборо Дж. [1] Численные методы математического анализа, ГТТИ, 1934.

Слободянский М. Г. [1] Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости, Прикл. матем. и мех. 3, № 1, 75—82, 1939.

[2] Пространственные задачи теории упругости для призматических тел, Уч. зап. МГУ, в. 39, 103—144, 1940.

Смирнов В. И. [1] Курс высшей математики, т. II, изд. 17-е, 1961; т. III, изд. 7-е, 1957/58; т. IV, изд. 5-е, 1958, Гостехиздат; т. V, Физматгиз, 1959.

[2] Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe, Журн. Ленингр. физ.-матем. общ. 2, № 1, 155—179, 1928.

Смирнов В. И., Канторович Л. В. и Крылов В. И. [1] Вариационное исчисление, Кубуч, 1933.

Соболев С. Л. [1] Уравнения математической физики, изд. 3-е, Гостехиздат, 1954.

[2] Алгорифм Шварца в теории упругости, Докл. АН СССР 4, № 6, 235—238, 1936.

[3] Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

Соколов Б. А. [1] О кручении вала переменного сечения, Прикл. матем. и мех. 3, № 3, 153—160, 1937.

Софронов И. Д. [1] К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР 111, № 1, 37—39, 1956.

Стенин Н. П. [1] Определение параметров в формуле Кристоффеля — Шварца, Сб. „Конформное отображение односвязных и многосвязных областей", стр. 47—79, ОНТИ, 1937.

Степанянц Л. Г. [1] Расчет ламинарного пограничного слоя на телах вращения, Прикл. матем. и мех. 6, № 4, 317—326, 1942.

Стрешнева В. А. [1] Вспомогательные таблицы для решения уравнения Пуассона методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям для многоугольных областей, Труды Матем. ин-та АН СССР 53, 267—282, 1959.

Тимошенко С. П. [1] Теория колебаний в инженерном деле, ГТТИ, 1932.

[2] Теория упругости, ГТТИ, 1934.

Толстов Г. П. [1] Ряды Фурье, изд. 2-е, Физматгиз, 1960.

Треффц [1] Математическая теория упругости, ГТТИ, 1934.

Трикоми (Tricomi F.) [1] Sulla resoluzione numerica delle equazioni integrali di Fredholm, Rend. Accad. dei Lincei, 33, № 12, 483—486, 1924, 1 sem.

[2] Ancora sulla resoluzione numerica delle equazioni integrali di Fredholm, Rend. Accad. dei Lincei, 33, № 1, 26—30, 1924, 2 sem.

Уиттекер Э. и Робинсон Г. [1] Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933.

Уолш и Янг (Walsh J. L., Young David) [1] On the accuracy of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences, J. Res. Nat. Bur. Standards 51, № 6, 343—363, 1953.

Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н. [1] Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960.

Фаддеева В. Н. [1] Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам, Труды Матем. ин-та АН СССР 28, 73—103, 1949.

[2] О фундаментальных функциях оператора x^{IV}, Труды Матем. ин-та АН СССР **28**, 157—159, 1949.

Филоненко-Бородич М. М. [1] Теория упругости, изд. 4-е, Физматгиз, 1959.

Фихтенгольц Г. М. [1] Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, III, Физматгиз, 1958, 1960.

Хажалия Г. Я. [1] К теории конформных отображений двухсвязных областей, Труды Матем. ин-та Груз. фил. АН СССР **4**, 123—134, 1938.

[2] К теории конформных отображений двухсвязных областей, Матем. сб. **8**, № 1, 97—106, 1940.

Харди и Литльвуд (Hardy G. H, Littlewood J. E.) [1] A convergence criterion for Fourier series, Math. Z. **28**, № 4, 612—634, 1928.

Харрик И. Ю. [1] Об одной проблеме конструктивной теории функций, связанной с исследованием сходимости вариационных процессов, Докл. АН СССР **80**, № 1, 25—28, 1951.

[2] О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида, Матем. сб. **37**, № 2, 353—384, 1955.

Хеллингер и Теплиц (Hellinger E., Toeplitz O.) [1] Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II, 3, 2, Heft 13, 1927.

Хенки (Hencky H.) [1] Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten, München, 1913.

Чепова Т. К. [1] Приближенное решение задач кручения некоторых призматических стержней, Прикл. матем. и мех. **1**, № 2, 225—261, 1937.

Чуфистова А. М. [1] Приближенное конформное отображение с помощью показательной функции, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 6, 119—126, 1939.

Чушкин П. И. [1) Обтекание эллипсов и эллипсоидов дозвуковым потоком газа, Вычислит. матем., сб. 2, 20—44, 1957.

[2] Расчет некоторых звуковых течений газа, Прикл. матем. и мех. **21**, № 3, 353—360, 1957.

Шварц (Schwarz H. A.) [1] Über einige Abbildungsaufgaben, Ges. Math. Abh. II, 65—83, 1869.

Шевченко К. Н. [1] Применение вариационного метода к решению задачи теории упругости, Прикл. матем. и мех. **2**, № 2, 219—222, 1938.

Шмидт (Schmidt E.) [1] Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Palermo Rend. **25**, 53—77, 1908.

Шортли и Веллер (Shortley G. H., Weller) [1] The numerical Solution of the Laplace equation. J. Appl. Phys. **9**, 334—344, 1938.

Штейнхаус (Steinhaus H.) [1] Sur les suites complètes, Studia Math., Lwow, № 4, 142—145, 1933.